

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXIX

1932 (X)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1932 (X)

Digitized by the Internet Archive
in 2023

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1932 (Anno X).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Chimica. — *Persistenza di struttura anisotropa nella silice derivante dall'attacco della leucite con acidi.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. A. BLANC.

Ho avuto campo, in precedenti pubblicazioni ⁽²⁾, di rendere noti alcuni fenomeni da me osservati allorquando un cristallo di leucite viene sottoposto all'azione di una soluzione idrica di uno degli acidi minerali forti.

L'attuale ricerca è stata originata dalla constatazione del fatto, già da me allora segnalato, che, allorquando si sottopone un cristallo di leucite all'azione di una soluzione di acido cloridrico, nitrico o solforico, il cristallo stesso cede (più o meno rapidamente, a seconda delle sue dimensioni, della temperatura e del rinnovo della soluzione acida) la totalità dell'allumina e della potassa contenute in esso, senza che l'aspetto generale del cristallo venga sensibilmente modificato, fino a che questo resta intriso di liquido. E ciò tanto che riuscirebbe spesso difficile se non impossibile, di poter dire, dall'aspetto, se il cristallo sia stato introdotto nella soluzione in quell'istante, oppure se il processo di eliminazione dell'allumina e della potassa sia ormai compiuto.

Per contro, si constatazione delle variazioni di diafaneità più o meno marcate, accompagnate da imbianchimento della massa, quando, terminato che

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1932.

(2) «Atti Soc. Ital. Progr. Scienze», XVI, p. 168 e segg. (1927); «Rendic. R. Acc. Lincei», serie 6^a, XIII, p. 327 (1931).

sia l'attacco, si procede al lavaggio della massa residua con acqua e la si lascia ulteriormente prosciugare all'aria.

Ma ciò che è più notevole, e che è oggetto della presente Nota, è la tendenza che la massa di silice idrata residuale ha, non solo di conservare la forma cristallina esterna (il che si potrebbe assimilare ad un semplice fenomeno di pseudomorfosi) ma di conservare, in certe condizioni e per un tempo più o meno lungo, dopo il processo di eliminazione dei due ossidi di potassio e di alluminio, la intima struttura cristallina che si poteva considerare come caratteristica del complesso KAlSi_2O_6 .

Ricorderò qui che la leucite, pseudocubica alla temperatura ordinaria, diventa rigorosamente cubica a partire dalla temperatura di 620°C , alla pressione di 760 m/m. La birifrangenza, che è debolissima, ma pur sensibile fino alla suindicata temperatura, sparisce del tutto alle temperature superiori, la massa cristallina diventando allora perfettamente isotropa, per poi ridiventare anisotropa col raffreddamento al di sotto di 620°C , potendosi, in altre parole, considerare questa come una temperatura di passaggio da un tipo di leucite α , anisotropa, ad un tipo di leucite β , isotropa.

La struttura anisotropa della leucite a temperatura ordinaria appare, all'esame a Nicol incrociati, sotto forma di sottili lamelle di geminazione polisintetica birifrangenti, a colori d'interferenza assai bassi del primo ordine.

Queste lamelle, nelle sezioni secondo le facce del cubo, si intersecano ortogonalmente, mentre si incontrano a 60° e a 120° quando la sezione sia stata fatta parallelamente alle facce dell'ottaedro o del dodecaedro.

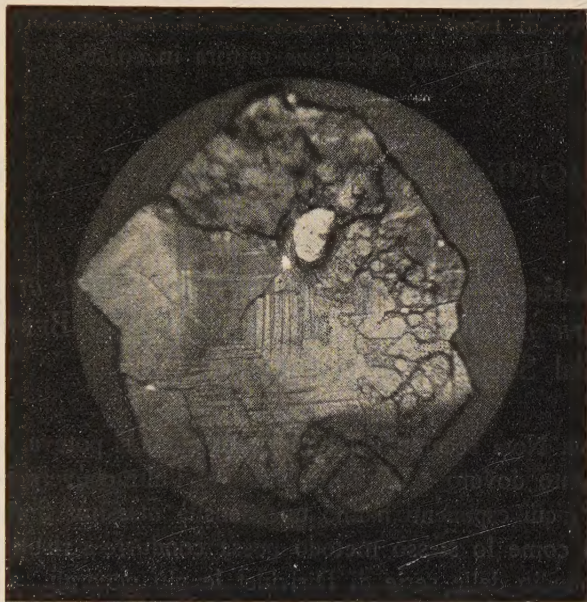
Ora ho avuto campo di osservare che i fenomeni ottici determinati dalla anisotropia risultante da tale struttura lamellare del cristallo di leucite, continuano in certi casi a manifestarsi, senza sensibile alterazione, ad attacco e lavaggio compiuto, cioè dopo la completa eliminazione della potassa e dell'allumina, aparendo il fenomeno tanto più marcato per quanto il cristallo di leucite adoperato sia meno alterato da precedenti processi di caolinizzazione, analcittizzazione ecc.

Sottoponendo per contro una sezione all'azione della soluzione acida per un tempo sufficientemente lungo, e che varia da cristallo a cristallo, cominciano a comparire delle zone di isotropia, puntiformi o a striscie, che si vanno estendendo più o meno rapidamente a tutta la sezione. Questo processo sembra notevolmente intensificato dall'aumento della temperatura.

Le esperienze sono state da me fatte nel modo seguente: scelta una roccia, per quanto possibile non alterata, a cristalli di leucite vitrei, quali si rinvencono nelle leucotefriti, leucofonoliti, ecc. dei nostri vulcani dell'Italia Centrale, ed in particolare nelle fonoliti leucitiche del Vulcano Cimino, venivano da me preparate delle sezioni sottili, nel modo consueto.

Scelta opportunamente la sezione di cristallo, ed effettuata una accurata pulizia delle due facce, con benzolo, ne veniva presa una microfotografia a Nicol incrociati. Indi veniva deposta sulla sezione qualche goccia di soluzione idrica di acido solforico al 25 %, ed il tutto veniva poi mantenuto ad una temperatura di 20-30 C° per periodi anche di parecchi giorni.

Dopo essere stata poi accuratamente lavata con acqua distillata, la sezione veniva mantenuta immersa sotto un velo di acqua, o di soluzione acida, oppure asciugata all'aria e fissata con balsamo.



Per quello che ormai sappiamo della maniera in cui si compie l'attacco di un cristallo di leucite, non era dubbio che, operando in tal modo, l'allumina e la potassa contenute entro una lamella di leucite di qualche centesimo di millimetro di spessore fossero completamente eliminate.

Ho voluto tuttavia, per maggior sicurezza, verificare questo punto ed ho potuto così constatare che la potassa e l'allumina vengono completamente eliminate, nello stesso tempo, da spessori di leucite di gran lunga superiori a quelli delle sezioni adoperate nelle esperienze ora descritte; il che non può sorprendere, ripeto, quando si pensi alle constatazioni già da me precedentemente fatte sul comportamento dei cristalli di leucite in presenza delle soluzioni di acidi forti.

La figura riproduce una microfotografia, (ingr. 30) a Nicol incrociati, di una sezione, secondo una faccia del cubo, di un frammento di cristallo di leu-

cite di una fonolite leucitica del Vulcano Cimino, dopo attacco con acido solforico.

Lo spessore della sezione è di circa mm. 0.02.

L'attacco è stato effettuato mediante immersione in una soluzione di acido solforico al 30 % in peso, per la durata di 5 giorni, a circa 20° C. Indi la sezione è stata ripetutamente e prolungatamente lavata con acqua, e fotografata mentre bagnata.

I risultati sopra riportati, possono forse essere posti in relazione con delle constatazioni fatte, anni or sono, da F. Rinne⁽¹⁾ circa il comportamento ottico della silice residuale dell'attacco con acido cloridrico di alcune zeoliti.

Mi riservo di ritornare sull'argomento in una ulteriore Nota, in cui darò i risultati di altre mie esperienze tuttora in corso.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet.* Nota di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota recente⁽³⁾ ho mostrato come si poteva, generalizzando un procedimento dovuto a H. Bohr, studiare l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet, i cui esponenti hanno una densità massima finita. Voglio mostrare adesso come lo stesso metodo possa condurre a risultati interessanti anche nello studio delle serie di Dirichlet le più generali.

In primo luogo questo metodo permette di dimostrare il teorema seguente:

TEOREMA I. — *Data una serie di Dirichlet*

$$(1) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

si può far corrispondere alla successione di esponenti $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri positivi $\{\varepsilon_n\}$ tali che ogni serie

$$(2) \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n s},$$

(1) « Centralblatt für Mineralogie », Jahrg. 1902, p. 594.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) Vedi questi « Rendiconti », vol. XIV, serie 6^a, p. 475 (1931).

i cui coefficienti sono uguali a quelli della serie (1), ed i cui esponenti soddisfano, a cominciare da un certo ordine, alla condizione

$$(3) \quad |\mu_n - \lambda_n| \leq \epsilon_n,$$

rappresenti una funzione $g(s)$ che differisce della funzione $f(s)$ solo per una funzione intera di s .

L'importanza di questo teorema consiste in ciò che esso dimostra come il fatto, per gli esponenti $\{\lambda_n\}$, di essere linearmente indipendenti, oppure di essere tutti razionali, non può influire in nessun modo nè sulla distribuzione, nè sul carattere, delle singolarità di $f(s)$. Infatti, gli esponenti μ_n , soddisfacenti alla condizione (3), possono sempre essere scelti in un modo da non presentare più il carattere aritmetico speciale dei λ_n , eppure, secondo il nostro teorema, la funzione $g(s)$ avrà le medesime singolarità della funzione $f(s)$.

Lo stesso metodo permette anche di dimostrare il teorema seguente:

TEOREMA II. — *Se la densità massima della successione di esponenti $\{\lambda_n\}$ è infinita, si può sempre trovare una successione di coefficienti $\{a_n\}$ in modo tale che la serie (1) rappresenti una funzione intera di s , pur avendo una ascissa di convergenza finita; è anche possibile ottenere che tutto il piano sia un campo di ultraconvergenza stretta⁽¹⁾ della serie (1).*

Ho dimostrato qualche anno fa⁽²⁾ che, a ogni successione di esponenti $\{\lambda_n\}$, la cui densità massima è finita, si può far corrispondere un numero δ tale che ogni funzione $f(s)$, definita da una serie (1), abbia certamente dei punti singolari situati ad una distanza non superiore a δ dalla retta di convergenza della serie stessa. Il teorema attuale mostra che, quando la densità massima degli esponenti λ_n è infinita, un tale numero non esiste più. Ne scende che la nozione di densità massima, dovuta al Pólya, non ha soltanto il valore di uno strumento d'indagine abbastanza acuto, ma corrisponde effettivamente a qualche proprietà intrinseca della successione di esponenti λ_n .

2. Indichiamo adesso brevemente come si dimostrino i teoremi annunciati. Il teorema I risulta dal fatto che, se i numeri positivi ϵ_n sono scelti in modo tale che la serie $\sum \epsilon_n e^{-\lambda_n s}$ converga in tutto il piano, la serie

$$(4) \quad H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\mu_n s})$$

convergerà anch'essa in tutto il piano ogni qualvolta la (1) avrà un'ascissa di convergenza finita, ed i μ_n soddisferanno alla (3); infatti, se s può variare entro un cerchio $|s| < A$, i termini della (4) sono, da un certo

(1) Vedi mia Nota in questi « Rendiconti », vol. XII, serie 6^a, p. 91 (1930).

(2) « Rendiconti R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. 63, p. 402 [92] (1930).

ordine in poi, inferiori in modulo ai termini corrispondenti della serie $\sum A \varepsilon_n |a_n| e^{\lambda_n A^{(1)}}$. La serie (4) rappresenta dunque una funzione intera di s ; ma, nel semi-piano di convergenza della (1) (che è anche il semi-piano di convergenza della (2)), il secondo membro della (4) è uguale alla differenza $f(s) - g(s)$. Questa differenza è dunque funzione intera di s , ed il teorema è così dimostrato.

3. Per dimostrare il teorema II conveniamo di chiamare *indice di condensazione* di un gruppo di $p + 1$ numeri positivi $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p)$ il più grande fra i numeri

$$(5) \quad \frac{1}{\mu_v} \log \left| \frac{1}{\psi'(\mu_v)} \right| \quad \text{ove} \quad \psi(z) = \frac{1}{p!} \prod_{m=0}^p (z - \mu_m).$$

Abbiasi adesso una successione di esponenti $\{\lambda_n\}$ la cui densità massima è infinita. Mostreremo che è possibile estrarne una successione di gruppi

$$(E_m) \quad \lambda_{n_m}, \lambda_{n_m+1}, \dots, \lambda_{n_m+p_m},$$

tali che il rapporto p_m/λ_{n_m} tenda verso zero per $m \rightarrow \infty$, e che inoltre, designato con δ_m l'indice di condensazione del gruppo (E_m) , si abbia $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = +\infty$. Infatti, una formola del Pólya⁽²⁾ mostra che, in questo caso, è possibile definire una successione d'intervalli $\Delta_m (\xi_m r_m, r_m)$ con $\frac{1}{2} < \xi_m < 1, r_m \rightarrow \infty$, tali che, designato con N_m il numero dei punti

λ_n compresi nell'intervallo Δ_m , e posto $A_m = \frac{N_m}{(1 - \xi_m) r_m}$, si abbia

$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \infty$. Se noi dividiamo i N_m punti λ_n compresi in Δ_m , in $\left[\frac{N_m}{p_m} \right]$

gruppi, ciascuno dei quali contiene p_m punti consecutivi, vedremo che l'uno almeno di questi gruppi sarà contenuto in un intervallo di lunghezza non

superiore a $\frac{p_m}{A_m}$. Prendendo questo gruppo come gruppo (E_m) ed indicando

con $\psi_m(z)$ la relativa funzione $\psi(z)$, definita dalla (5), vedremo che

$|\psi_m(z)| \leq \frac{1}{p_m!} \left(\frac{p_m}{A_m} \right)^{p_m} < \left(\frac{e}{A_m} \right)^{p_m}$. Se prendiamo adesso $p_m = \left\lceil \frac{\xi_m r_m}{\log_2 A_m} \right\rceil$

vedremo che δ_m è superiore a $\frac{\log A_m}{2 \log_2 A_m}$, dimodochè la successione dei gruppi (E_m) così definiti soddisfa alle condizioni da noi poste.

(1) Cfr. la Memoria di H. BOHR nei «Rend. Circ. Mat. di Palermo», t. 37, p. 1 (1913).

(2) Vedi «Math. Zeitschr.», t. 29, p. 559 (1929), o «Rend. R. Ist. Lomb.», loc. cit., p. 342 [22].

Poniamo adesso

$$(6) \quad b_m(s) = e^{-\delta_m \lambda_{n_m}} \sum_{\nu=n_m}^{n_m + p_m} \frac{e^{-\lambda_{\nu} s}}{\psi'_m(\lambda_{\nu})},$$

e consideriamo la serie

$$(7) \quad h(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(s),$$

cioè (secondo la terminologia della mia Nota precedente) la serie formata coi gruppi di Bohr relativi ai gruppi (E_m) . Dalla (6) si deduce, per via di una ben nota formola di Genocchi-Jensen ⁽¹⁾, che, nel cerchio $|s| < A$, $b_m(s)$ rimane (purchè m sia abbastanza grande) inferiore in modulo a $e^{(2A - \delta_m) \lambda_{n_m}}$; da questo fatto scende la convergenza uniforme della serie (7)

in ogni campo finito, purchè si abbia $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log m}{\lambda_{n_m}} = 0$, ciò che si può sempre

ammettere. La serie (7) rappresenta dunque una funzione intera di s ; ma, se noi la consideriamo come serie di Dirichlet di tipo (1), la sua ascissa di convergenza non sarà certamente inferiore a zero, giacchè questa serie, per il modo stesso come essa è stata costruita, deve avere un'infinità di coefficienti non inferiori ad uno in valore assoluto. La serie (7) soddisfa dunque a tutte le condizioni del teorema II: considerata come serie di Dirichlet essa ha un'ascissa di convergenza finita; essa rappresenta una funzione intera; infine, messa sotto la forma (7), essa converge in tutto il piano, e ciò, per la condizione $p_m/\lambda_{n_m} \rightarrow 0$, mostra appunto che tutto il piano è campo di ultraconvergenza stretta della serie di Dirichlet considerata.

Si può rilevare che non tutti i λ_n intervengono effettivamente nella serie di Dirichlet definita dalla (7); ma questo fatto non menoma il valore delle nostre conclusioni, giacchè basterebbe aggiungere alla (7) una serie del tipo (1), convergente in tutto il piano, per levare l'obiezione.

(1) Cfr. NÖRLUND, *Séries d'interpolation*, Paris (1926), p. 9.

Matematica (Analisi). — *Primi studii intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-paraboliche.* Nota⁽¹⁾ di MARIA CIBRARIO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

In un lavoro precedente⁽²⁾ si sono classificati i tipi distinti a cui si può ridurre una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto. Inizieremo qui lo studio sistematico dei vari tipi, incominciando dall'equazione:

$$(I) \quad y^{2(2r+1)} z_{xx} - z_{yy} = 0,$$

che si era chiamata di tipo misto iperbolico-parabolica; la (I), alterando la x per un fattore costante, si può scrivere:

$$(A) \quad 4(r+1)^2 y^{2(2r+1)} z_{xx} - z_{yy} = 0,$$

o anche

$$(A') \quad \rho^2 y^{2\rho-2} z_{xx} - z_{yy} = 0,$$

dove si è posto:

$$(2) \quad 2(r+1) = \rho.$$

Le caratteristiche della (A), uscenti dal punto $(x_0, 0)$ dell'asse delle x , sono le curve (v. fig. 1, in cui si è preso $\rho = 2$) di equazione (posto rispettivamente x_0 eguale a ξ o a η):

$$(3) \quad \xi = x - y^\rho \quad ; \quad \eta = x + y^\rho.$$

Il cambiamento di variabili (3) muta la (A) nella:

$$(4) \quad z_{\xi\eta} - \frac{2r+1}{4(r+1)(\xi-\eta)} (z_\xi - z_\eta) = 0,$$

che è l'equazione di Eulero-Poisson per $\beta = \frac{2r+1}{4(r+1)} = \frac{\rho-1}{2\rho}$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1932.

(2) M. CIBRARIO, *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*, « Rendic. della R. Acc. dei Lincei », vol. XV, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 8; una esposizione completa della questione ivi trattata è data in un lavoro di eguale titolo in corso di stampa nei « Rendic. del R. Istituto Lombardo ».

Poichè per $y = 0$ si annulla il jacobiano del cambiamento di variabili (3), per $y = 0$ (o per $\xi = \eta$) si introducono delle singolarità nella (4), che non compaiono nella (A).

Inoltre le (3) a ognuno dei due semipiani $y \geq 0$ e $y \leq 0$ fanno corrispondere il medesimo semipiano $\eta \geq \xi$. Non si possono ricavare dunque i teoremi di esistenza e di unicità per la (A) da quelli noti per la (4), ma occorre studiare direttamente la (A), pure tenendo come guida le proprietà della (4).

Ci limiteremo qui ad una breve esposizione dei principali risultati ottenuti; ne sarà data prossimamente altrove una trattazione completa, considerando anche il caso, in cui nella (1) l'esponente di y sia della forma $4k$.

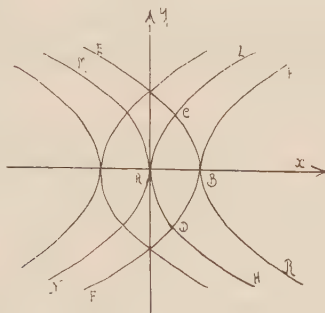


Fig. 1.

§ 1. — Si consideri la funzione di Riemann:

$$(B) \quad u(X, Y; x, y) = D^{-\beta} F(\beta, \beta, 1, \sigma),$$

dove F è la funzione ipergeometrica e:

$$(C) \quad D = (y^e + Y^e)^2 - (X - x)^2; \quad \sigma = \frac{(y^e - Y^e)^2 - (X - x)^2}{D}.$$

u è reale, finita e continua, se $D > 0$ e $\sigma \leq 1$.

Si può vedere facilmente che, se, p. es., il punto (X, Y) è fisso, si hanno i due casi:

I) $Y \neq 0$. Il punto (x, y) può variare nell'area compresa tra le due caratteristiche LAH, EBF per il punto C, di coordinate X, Y (v. fig. 1); in essa $0 \leq \sigma \leq 1$; nei punti interni al segmento AB, cioè per $y = 0$, è $\sigma = 1$; sulle due caratteristiche per C: $\sigma = 0$; è sempre $D > 0$, tranne che nei punti A e B, in cui si ha $D = 0$, e σ indeterminato (σ tende a zero avvicinandosi, p. es. ad A, lungo la caratteristica CAD, tende a uno avvicinandosi ad A in qualsiasi altra direzione)⁽¹⁾.

(1) u resta pure finita e continua se $D > 0$, $\sigma < 0$, come avviene nelle aree LCBP, RBDH, ECAM, NADF (fig. 1); sulle caratteristiche MAN e PBR è $D = 0$ e $\sigma = -\infty$. In tali aree, che però non si presentano nel seguito, σ è indeterminato nei punti A e B; fuori dell'area compresa tra le caratteristiche MAN e PBR è $D < 0$ e non si definisce la funzione u .

II) $Y = 0$. Se il punto $(X, 0)$ coincide con B (fig. 1) all'interno dell'area compresa tra le caratteristiche per B , EBF e PBR , è $D > 0$, $\sigma = 1$; sul contorno $D = 0$ (fuori di tale area è $D < 0$, e non si definisce la funzione u).

Casi analoghi I') e II') si hanno scambiando i punti (x, y) e (X, Y) .

Nei domini I) e II) (e I') e II')) u è finita e continua, tranne che nei punti in cui $D = 0$, ed è un integrale della (A), che sulle caratteristiche per il punto (X, Y) si riduce a:

$$u(X, Y; x, y) = 4^{-\beta} |y|^{-\frac{\sigma-1}{2}} |Y|^{-\frac{\sigma-1}{2}},$$

come si verifica facilmente. Le derivate prime di u sono però discontinue per $y = 0$; posto $\varepsilon = \operatorname{sgn} y$, $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} Y$, con qualche riduzione si trova, per es.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = & -2\beta\rho D^{-\beta-1} y^{\sigma-1} (y^{\sigma} + Y^{\sigma}) F(\beta, \beta, 1, \sigma) + 4^{1-2\beta} \rho \beta^2 [y^{2\sigma} - \\ & - Y^{2\sigma} + (X-x)^2] Y D^{\beta-2} F(1-\beta, 1-\beta, 2, \sigma). \end{aligned}$$

Per le singolarità che la funzione $u(X, Y; x, y)$ presenta per $y = 0$ e per la discontinuità delle sue derivate prime quando si attraversa l'asse x , non si può applicare senz'altro alla (A) il metodo di Riemann, per studiare teoremi di esistenza e di unicità in domini attraversati dall'asse x o anche solo aventi punti in comune con esso.

§ 2. — TEOREMA I: « Date due funzioni $D^{11} \tau(x)$ e $\nu(x)$ definite per $m \leq x \leq n$, esiste uno e uno solo integrale della (A), $z(x, y)$, che è funzione $D^{11(1)}$, anche per $y = 0$, e soddisfa le condizioni ai limiti:

$$(1) \quad z(x, 0) = \tau(x) \quad , \quad z_y(x, 0) = \nu(x);$$

esso è definito nel dominio (finito) compreso tra le due caratteristiche uscenti dai punti m e n dell'asse x dei due diversi sistemi, che hanno a comune due punti, simmetrici rispetto all'asse x (il risultato vale anche se $\nu''(x)$ ha in qualche punto un infinito di ordine minore di $\beta - 1$)».

Si consideri un punto $C(x, y)$ (v. fig. 1) e gli archi di caratteristiche CA, CB uscenti da esso e terminati all'asse X (indichiamo con X, Y le coordinate correnti); sia p. es. $y > 0$.

Una retta $Y = b$, dove $0 < b < y$, seghi le caratteristiche per C nei punti A', B' , le cui ascisse a', b' risultano essere:

$$(2) \quad a' = a + b^{\sigma}, \quad b' = b - b^{\sigma}, \quad \text{ove:} \quad a = x - y^{\sigma}; \quad b = x + y^{\sigma}.$$

(1) Con funzione D^n intendiamo una funzione finita e continua colle sue derivate fino a quelle di ordine n incluse.

Tenendo conto che la (A) ha per aggiunta sè stessa, e applicando il metodo di Riemann direttamente alla (A) per il trilatero A'B'C si trova:

$$(3) \quad \begin{aligned} \zeta(x, y) = & \frac{1}{2} y^{-\frac{q-1}{2}} b^{-\frac{q-1}{2}} [\zeta(a', b) + \zeta(b', b)] + \\ & + \frac{1}{2^{1-2\beta}} \frac{1}{\rho} \int_{a'}^{b'} [u(X, b; x, y) \zeta_Y(X, b) - u_Y(X, b; x, y) \zeta(X, b)] dX, \end{aligned}$$

dove $u(X, b; x, y)$ è la funzione di Riemann studiata nel § 1.

Per provare che ogni integrale della (A) che sia funzione D^{II} anche per $y = 0$ (1) e soddisfi le: (4) $\zeta(x, 0) = 0, \zeta_Y(x, 0) = 0$, è nullo sempre, basta far vedere che nelle ipotesi (4) è nulla la funzione $\zeta(x, y)$ data dalla (3); ora $\zeta(x, y)$ è indipendente da b ; poichè si può dimostrare che, nelle ipotesi (4), per b abbastanza piccolo, il secondo membro della (3) si può rendere piccolo a piacere, è necessariamente $\zeta(x, y) = 0$.

Per dimostrare l'esistenza della funzione ζ , che soddisfa il teorema, si prenda il limite, per b tendente a zero, del secondo membro della (3), facendo alcune ipotesi sul limite, per b tendente a zero, di $u(X, b; x, y)$ e di $u_Y(X, b; x, y)$ e ammettendo che nel secondo membro della (3) l'integrale del limite sia il limite dell'integrale. Si giunge così, con qualche trasformazione e riduzione alla:

$$(E) \quad \zeta(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau[\xi(t)] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \gamma_2 y \int_0^1 \nu[\xi(t)] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt,$$

dove

$$\xi(t) = a + (b-a)t = x - y^q + 2y^q t$$

e

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{[\Gamma(\beta)]^2} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma[2(1-\beta)]}{[\Gamma(1-\beta)]^2}.$$

Per giustificare le ipotesi fatte per trovare la (E), si verifica poi che la funzione ζ soddisfa la (A) e le condizioni ai limiti (1); si vede subito che il valore di ζ dipende solo dai valori che assumono $\tau(x)$ e $\nu(x)$ nei punti del segmento dell'asse x compreso tra le sue intersezioni a e b colle caratteristiche per il punto (x, y) .

§ 3. — TEOREMA II: « *Nell'area compresa tra due archi di caratteristiche CAD e CBD della (A) esiste uno e un solo integrale della (A) che è funzione D^{II} , si può mettere nella forma (E) e assume su uno dei due archi, p. es. su CAD,*

(1) Per la dimostrazione basta che per $y = 0$ esso sia finito e continuo colle sue derivate prime.

valori assegnati, colla condizione che, se questi sono dati nella forma $z = f(x)$ su AC e $z = g(x)$ su AD $\left(0 \leq x \leq \frac{m}{2}, \text{ se } m \text{ è la lunghezza del segmento AB}\right)$, sia $f(A) = g(A)$, $f'(A) = g'(A)$, e f e g siano funzioni D^V .

Supposto A coincidente coll'origine (fig. 1), l'equazione della caratteristica CAD è: $x = y^q$; non è restrittivo supporre che nel punto A sia $z = z_x = z_y = 0$, e quindi che $f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0$, e inoltre che una delle due funzioni, p. es. $g(x)$, sia nulla.

Applicando la formula (E) si trovano le $\left(\text{per } 0 \leq x \leq \frac{m}{2}\right)$:

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(2xt) t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \gamma_2 x^{\frac{1}{q}} \int_0^1 \nu(2xt) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt \\ 0 = \gamma_1 \int_0^1 \tau(2xt) t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt - \gamma_2 x^{\frac{1}{q}} \int_0^1 \nu(2xt) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt. \end{cases}$$

Poniamo $2x = X$; poichè $f(0) = f'(0) = 0$, è $f\left(\frac{X}{2}\right) = X^2 M(X)$; dalle (1) sommando e sottraendo, e facendo il cambiamento di variabile $Xt = u$, si hanno le equazioni integrali $(0 \leq X \leq m)$:

$$(2) \quad \begin{cases} 2\gamma_1 \int_0^X \tau(u) u^{\beta-1} (X-u)^{\beta-1} du = X^{1+2\beta} M(X) \\ 4^{\beta} \gamma_2 \int_0^X \nu(u) u^{-\beta} (X-u)^{-\beta} du = X^2 M(X). \end{cases}$$

Applicando a queste la formula di Abel ⁽¹⁾ e poi facendo il cambiamento di variabile $u = Xt$ negli integrali che compaiono nelle formule di risoluzione, si hanno le:

$$\begin{cases} \tau(X) = \frac{\sin \beta \pi}{2\gamma_1 \pi} X^2 \int_0^1 \frac{(1+2\beta) t^{2\beta} M(Xt) + X t^{1+2\beta} M'(Xt)}{(1-t)^{\beta}} dt \\ \nu(X) = \frac{\sin \beta \pi}{4^{\beta} \gamma_2 \pi} X^{1+2\beta} \int_0^1 \frac{2t M(Xt) + X t^2 M'(Xt)}{(1-t)^{1-\beta}} dt. \end{cases}$$

(1) Non è restrittivo supporre che le funzioni $\tau(u) u^{\beta-1}$ e $\nu(u) u^{-\beta}$ siano finite anche per $u=0$, perchè la funzione z cercata deve essere D^{II} anche per $x=y=0$, e in questo punto deve essere $z = z_y = 0$.

Poichè f è funzione D^V , M è funzione D^{III} e $\tau(X)$, $\nu(X)$ sono funzioni D^{II} (la $\nu''(X)$ ha per $X = 0$ un infinito dell'ordine $1 - 2\beta < 1 - \beta$, ma (v. teorema I) τ è D^{II} anche per $x = y = 0$) ⁽¹⁾.

§ 4. — TEOREMA III: «Esiste una e una sola funzione $D^{II}\tau$, definita nell'area compresa tra due archi di caratteristiche CAD e CBD, tranne che nei punti degli archi DA e DB, che soddisfa la (A), e sugli archi CA e CB, (esclusi i punti A e B) si riduce a funzioni D^{III} assegnate».

Siano x_1, y_1 le coordinate di C; non è restrittivo supporre che in C sia $\tau = \tau_x = \tau_y = 0$, che i valori dati siano nulli lungo uno degli archi, p. es. lungo CB e che A coincida coll'origine (v. fig. 1). Lungo CA è $x = y^q$, ed è data $\tau(y^q, y) = f(y)$ ($f(y_1) = f'(y_1) = 0$). Col metodo di Riemann si trova che la funzione τ , che all'interno del trilatero CAB (escluso il segmento AB) soddisfa la (A) e le condizioni imposte, nel punto (x, y) è data da:

$$(F) \quad \tau(x, y) = -2^{2\beta-1} \int_b^{y_1} Y^{q-2} u[Y^q, Y; x, y] [2Yf'(Y) + (\rho-1)f(Y)] dY,$$

dove $b = \left(\frac{x + y^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$ è l'ordinata del punto comune a CA e alla caratteristica dell'altro sistema per il punto (x, y) e u è la funzione di Riemann in cui si ponga $X = Y^q$. Se τ e τ_y si riducono, per $y = 0$, a funzioni D^{II} di x si può porre la τ data dalla (F) nella forma (E), prolungarla dall'altra parte dell'asse x ed essere sicuri che anche τ_{yy} è continua per $y = 0$. Lo studio di $\lim_{y \rightarrow 0} \tau(x, y)$ e di $\lim_{y \rightarrow 0} \tau_y(x, y)$ è piuttosto lungo ed esige considerazioni minute; si trovano infine due funzioni $\tau(x) = \tau(x, 0)$ e $\nu(x) = \tau_y(x, 0)$, che sono D^{II} , tranne che per $x = 0$, cioè nel punto A (escluso dall'enunciato del teorema); nel punto B, $\tau(x)$ e $\nu(x)$ si annullano. Si può dimostrare che, per la discontinuità di $u_Y(X, Y; x, y)$ per $Y = 0$, il valore di τ in un punto interno al trilatero ABD dipende proprio dai valori di τ sul segmento AB, cioè che per ottenere τ anche nel trilatero ABD occorre proprio servirsi della formula (E) e quindi è necessario determinare le funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$.

(1) Si può far vedere che per dimostrare il teorema II non si può applicare il metodo di Riemann, perchè si dovrebbero introdurre domini in cui la $u(X, Y, x, y)$ non è definita.

Matematica. — *Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz*⁽¹⁾.
Nota di A. DEL CHIARO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Data una superficie S chiusa e costruita, mediante il procedimento di Schwarz, la superficie S' di rotazione attorno ad un asse parallelo all'asse delle z e racchiudente lo stesso volume di S , è stato dimostrato che S' ha un'area più piccola od al più uguale di quella di S . Se $z = f(x, y)$ è l'equazione di una superficie aperta S , soddisfacente ad opportune condizioni, e al contorno del campo D di variabilità di (x, y) la $f(x, y)$ è costante, l'integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

esprimente l'area di S , ha un valore maggiore od uguale di quello relativo ad S' .

Similmente, se $z = f(x, y)$ è ancora l'equazione di una superficie aperta S , soddisfacente ad opportune condizioni, e al contorno del campo D di variabilità di (x, y) la $f(x, y)$ è costante, considerato l'integrale di Dirichlet

$$\iint_D \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy$$

e lo stesso integrale relativo alla superficie arrotondata, abbiamo, di nuovo, che il primo è maggiore od uguale al secondo.

Inoltre, il caso di uguaglianza si ha, nei due casi, solo quando S' può ottenersi da S per semplice traslazione.

I casi ora detti, furono considerati, sotto particolari ipotesi, da Schwarz⁽³⁾, Krahn⁽⁴⁾ e Faber⁽⁵⁾, e nella loro forma più generale, dal Prof. Tonelli. Questo Autore studiò il primo nella Memoria « Sulla proprietà di minimo della

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) H. A. SCHWARZ, *Beweis des Satzes die Kugel kleinen Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens*. « Gesammelte Abhandlungen », Berlin, Springer Bd. II, pp. 327-340 (1890).

(4) G. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*. « Math. Ann. », Bd. 94, p. 98 (1925).

(5) G. FABER, *Beweis, dass unter aller homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten gibt*. « Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften », p. 169 (1923).

sfera » ⁽¹⁾ ed il secondo nell'altra « Sur un problème de Lord Rayleigh » ⁽²⁾; in queste Memorie i procedimenti seguiti sono diversi. Ci proponiamo ora di ricercare un tipo generale di funzioni $\Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, dipendenti soltanto da $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, per le quali valga la stessa proprietà sopra indicata, e cioè per le quali l'integrale doppio

$$\iint_D \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy$$

sia maggiore od uguale dello stesso integrale relativo alla superficie arrotondata.

Per questa proprietà, in alcuni importanti problemi di minimo, la ricerca del minimo per l'integrale doppio dato si riduce alla ricerca del minimo per un integrale semplice.

Di questo s'è valso appunto il Prof. Tonelli nel suo lavoro « Sur un problème de Lord Rayleigh », il cui enunciato è il seguente:

Fra tutti i domini piani D , aventi la stessa area, e fra tutte le funzioni $f(x, y)$, date ciascuna su uno dei domini D , soddisfacenti a certe condizioni di continuità e di derivabilità, uguali a zero sulla frontiera del dominio D di definizione, e tali che l'integrale

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy$$

abbia un valore dato, sempre lo stesso, cercare il dominio D_0 e la funzione $f_0(x, y)$, definita su D_0 , in guisa da rendere minimo l'integrale

$$\iint_D \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy.$$

Estendendo opportunamente il metodo usato dal Tonelli nel secondo dei lavori ricordati, siamo pervenuti al Teorema generale seguente:

Sia $\Psi(\chi)$ una funzione di χ soddisfacente alle seguenti condizioni:

- 1°) la $\Psi(\chi)$ è, per $\chi \geq 0$, non negativa;
- 2°) è, insieme con la sua derivata prima, continua e non decrescente.

(1) L. TONELLI, Sulla proprietà di minimo della sfera. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXXIX (1915).

(2) L. TONELLI, Sur un Problème de Lord Rayleigh. « Monatshefte für Mathematik und Physik », Bd. XXXVII, pp. 253-280 (1930).

Sia poi $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio chiuso \bar{D} , corrispondente al dominio aperto e limitato D ⁽¹⁾, assolutamente continua in D , tale che sia

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{in } D$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{sulla frontiera di } D,$$

e tale inoltre che risulti finito l'integrale

$$I_D[f] \equiv \iint_D \Psi(\sqrt{p^2 + q^2}) dx dy,$$

con

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Allora è

$$(I) \quad I_C[\varphi] \equiv \iint_C \Psi(\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}) dx dy \leq I_D[f],$$

essendo $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ la funzione corrispondente per arrotondamento alla $f(x, y)$, C il cerchio su cui viene definita la φ e

$$\bar{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{q} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Nel caso in cui la $\Psi(\chi)$ sia sempre crescente, l'uguaglianza nella (I) ha luogo solamente quando il dominio D e la superficie $z = f(x, y)$ possono ottenersi per semplice traslazione dal dominio C e dalla superficie $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

La dimostrazione di questo teorema sarà data in uno dei prossimi fascicoli degli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) Il dominio chiuso \bar{D} corrispondente al dominio aperto e limitato D , è costituito da tutti i punti di D e della sua frontiera.

Matematica. — *Corrispondenza per piani tangenti paralleli.*
 Nota di M. HAIMOVICI e E. POPA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-
 CIVITA.

Studieremo la corrispondenza per piani tangenti paralleli che intercede fra due superficie in relazione alla congruenza delle rette che uniscono i punti corrispondenti.

Diremo che le superficie sono parallele lungo questa congruenza.

1. Sia la congruenza Γ , data dalle equazioni

$$(1) \quad \xi = x(u, v) + \rho X(u, v)^{(2)}$$

dove $x = x(u, v) \dots$ rappresenta la superficie di partenza, $X \dots$ sono i coseni direttori della generatrice e ρ l'ascissa sul raggio.

Se consideriamo la congruenza riferita alle sue sviluppabili, abbiamo:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha X - \beta \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \gamma X - \delta \frac{\partial X}{\partial v}; \end{cases}$$

β e δ sono le ascisse sul raggio dei fuochi. Se deriviamo la prima delle (2) rispetto a v e la seconda rispetto a u e teniamo presente l'equazione di Gauss per $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$ ed il fatto che il determinante $\left(X \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right) = \sqrt{EG - F^2} = 0$, segue:

$$(3) \quad \begin{cases} (\delta - \beta) F = \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \gamma}{\partial u} & , \quad (\delta - \beta) \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \beta}{\partial v} + \gamma \\ (\beta - \delta) \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \delta}{\partial u} + \alpha \end{cases}$$

dove E, F, G e i simboli $\begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$ sono quelli della prima forma di Kummer.

2. Ci proponiamo di determinare ρ in funzione di u, v in modo che (1) rappresenti una superficie Σ la quale ammetta una superficie $\bar{\Sigma}$ parallela ad essa lungo la congruenza.

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) Qui come pure in seguito scriviamo una sola equazione sottintendendo le due analoghe in $\eta, \zeta; \gamma, \alpha$ e γ, α .

Chiameremo la superficie Σ quasinormale della congruenza.

Siano

$$(4) \quad \bar{\xi} = x + (\rho + r) X$$

le equazioni della superficie $\bar{\Sigma}$.

Poichè la congruenza è riferita alle sue sviluppabili, le tangenti a $u = \text{cost}$ ($v = \text{cost}$) su Σ e $\bar{\Sigma}$ sono parallele.

Segue da questa proprietà, coll'aiuto delle equazioni (1), (2), (4):

$$(5) \quad \frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial u}} = \frac{r}{\rho - \beta} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{\partial r}{\partial v}}{\gamma + \frac{\partial \rho}{\partial v}} = \frac{r}{\rho - \delta}.$$

Eliminando r , troviamo:

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial u}}{\rho - \beta} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\gamma + \frac{\partial \rho}{\partial v}}{\rho - \delta}.$$

Se ρ soddisfa a quest'equazione, la superficie data da (1) è tagliata dalle sviluppabili della congruenza Γ secondo una rete coniugata e reciprocamente.

Eliminando ρ dalle equazioni (5) e ricordando (3), troviamo:

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{r} \right) - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r} \right) - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right) + F \frac{1}{r} = 0 \quad (1).$$

Se per un punto fisso « polo » facciamo passare dei segmenti OM paralleli alle generatrici della congruenza e uguali rispettivamente ai segmenti delle generatrici compresi fra due superficie Σ , $\bar{\Sigma}$, parallele lungo la congruenza, il punto M descrive una superficie, che chiamiamo quasisfera della congruenza in rapporto a quelle due superficie. Il piano tangente in M alla quasisfera è parallelo ai piani tangenti nei punti corrispondenti delle superficie Σ , $\bar{\Sigma}$, la rete base di questa corrispondenza è pur quella delle sviluppabili della congruenza. Se è data una superficie quasinormale Σ , la quasisfera si determina dalle (5) a meno di una omotetia.

Dalle (1) e (5) risulta che una superficie quasinormale è determinata dalla condizione che essa passi per due curve situate rispettivamente su due sviluppabili della congruenza, le quali si tagliano secondo una generatrice.

(1) Questi risultati si trovano dimostrati in altro modo, p. es. in EISENHART, *Transformations of surfaces*.

3. Il caso delle congruenze con superficie focali coincidenti si può trattare in modo analogo. Prendiamo come superficie di partenza dalla congruenza la superficie focale doppia, dato che le curve $v = \text{cost.}$ sono appunto le asintotiche tangenti alle rette della congruenza.

Abbiamo allora:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha X \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \gamma X + \delta \frac{\partial X}{\partial u} \end{cases}$$

donde risulta:

$$(9) \quad \begin{cases} \delta \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \frac{\partial \delta}{\partial u} - \gamma = 0 & \delta \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - \alpha = 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} - E \delta = 0. \end{cases}$$

Siano, come sopra, le superficie Σ e $\bar{\Sigma}$ date dalle equazioni (1) e (4).

Le tangenti alle curve $v = \text{cost.}$ su Σ e $\bar{\Sigma}$ sono parallele.

Se scriviamo questa proprietà abbiamo:

$$(10) \quad \frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial u}} = \frac{r}{\rho}.$$

Dal fatto che anche le tangenti alle curve $u = \text{cost.}$ su $\bar{\Sigma}$ sono parallele ai piani tangenti nei punti corrispondenti su $\bar{\Sigma}$, segue:

$$\left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) = 0,$$

ossia

$$(11) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial u}}{\rho^2} \delta - \frac{r + \frac{\partial \rho}{\partial v}}{\rho} = 0.$$

Eliminando r tra le (10) e (11), troviamo una relazione, la quale esprime la condizione affinchè le sviluppabili della congruenza taglino sulla superficie quasinormale una famiglia di asintotiche.

Eliminando ρ tra le medesime equazioni troviamo:

$$(12) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r} \right) - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right) + E \frac{1}{r} = 0.$$

4. Ci proponiamo di trovare la condizione affinchè tra le superficie quasinormali della congruenza Γ esista una famiglia la quale abbia le linee $v = \text{cost.}$ cilindriche (i piani tangenti lungo questa involuppano un cilindro).

Evidentemente, allora anche sulla quasisfera corrispondente le linee $v = \text{cost.}$ saranno cilindriche.

Dunque:

$$\frac{\partial^2(rX)}{\partial u \partial v} = \lambda \frac{\partial(rX)}{\partial v}.$$

Risulta di qui

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial v} + \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} r = 0 \\ \frac{\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} - rF}{\frac{\partial r}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} + r \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\}}{r} \end{array} \right.$$

la cui condizione d'integrabilità è l'annullarsi d'un invariante dell'equazione (7):

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 2 \end{array} \right\} + F = 0.$$

Se c'è una superficie quasinormale la quale soddisfa alla condizione domandata, ne esiste un'infinità e tutte queste superficie si possono ottenere con quadrature. Esse dipendono da una funzione arbitraria di una variabile, la quale permette di sceglierle in modo che contengano una curva arbitrariamente tracciata su una delle sviluppabili, che risulta per esse curva cilindrica.

In questo caso gli spigoli di regresso delle sviluppabili $v = \text{cost.}$ sono curve cilindriche sulla superficie focale corrispondente e le generatrici dei cilindri corrispondenti sono parallele a quelle dei cilindri circoscritti alle superficie quasinormali.

Affinchè esistano superficie quasinormali sulle quali le linee $u = \text{costante}$ e $v = \text{costante}$ sieno cilindriche (superficie di traslazione) è necessario e sufficiente che tutti e due gli invarianti dell'equazione sieno nulli.

5. Cerchiamo ora la condizione affinchè esistano superficie quasinormali sulle quali le linee $v = \text{cost.}$ sieno coniche.

Siano dalle (1) e (3):

$$(15) \quad \xi + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial v} = x + aX + b \frac{\partial X}{\partial v}$$

le coordinate del vertice del cono corrispondente alla linea v , dove abbiamo posto:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \rho + \lambda \left(\gamma + \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \\ b = \lambda (\rho - \delta). \end{array} \right.$$

Poichè il secondo membro dell'equazione non dipende da u , troviamo:

$$(17) \quad \alpha + \frac{\partial a}{\partial u} - bF = 0 \quad -\beta + a + b \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0 \quad \frac{\partial b}{\partial u} + b \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$$

donde risulta la condizione d'integrabilità:

$$(18) \quad \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial u} - b \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + F \right] = 0.$$

Se l'invariante $\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + F$ non è nullo, allora risulta per b un solo valore, che sostituito nella (17) dà due condizioni per l'esistenza della soluzione. a , b essendo note, le equazioni (16) daranno ρ e λ . Le superficie soluzioni del problema dipendono da una funzione arbitraria di u , che permette di sceglierle in modo che passino per una curva arbitraria su una sviluppabile $v = \text{cost.}$

Il vertice del cono circoscritto dipende solo da a , b e perciò è lo stesso per tutte le soluzioni.

Gli spigoli di regresso delle sviluppabili $v = \text{cost.}$ sono in questo caso delle curve coniche sulla superficie focale corrispondente.

Infatti si può trovare un valore μ tale che:

$$x' + \mu \frac{\partial x'}{\partial v} = x + \bar{a}X + \bar{b} \frac{\partial X}{\partial v},$$

ove

$$x' = x + \beta X \quad \bar{a} = \beta + \mu \left(\gamma + \frac{\partial \beta}{\partial v} \right) \quad \bar{b} = \mu (\beta - \delta),$$

non dipenda da u .

Per questo, \bar{a} , \bar{b} devono soddisfare al sistema (17) cioè $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$.

Dunque affinchè esistano delle superficie quasinormali sulle quali $v = \text{cost.}$ siano coniche è necessario e sufficiente che gli spigoli di regresso delle sviluppabili $v = \text{cost.}$ siano curve coniche sulla superficie focale corrispondente.

Allora i vertici dei coni circoscritti alle superficie quasinormali sono gli stessi dei vertici dei coni circoscritti alla superficie focale.

6. Perchè esistano superficie quasinormali sulle quali tutte e due le famiglie di sviluppabili taglino curve coniche è necessario che gli spigoli di regresso delle sviluppabili siano, sulle superficie focali rispettive, delle curve coniche. Questa condizione è anche sufficiente.

Infatti, ρ deve soddisfare le equazioni:

$$(19) \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = -\gamma - \frac{(\rho - \delta)(\rho - a)}{b} \quad \frac{\partial \rho}{\partial u} = -\alpha - \frac{(\rho - \beta)(\rho - a')}{b'}$$

dove la prima è dedotta dalle (16) e la seconda dalle equazioni analoghe che esprimono la condizione che $u = \text{cost.}$ siano delle curve coniche.

Derivando la prima di queste uguaglianze rispetto ad u e la seconda rispetto a v e usufruendo delle medesime e delle (3) e (17), le due espressioni della $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v}$ risultano identiche.

7. Se

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + F = 0$$

allora affinchè esistono superficie quasinormali sulle quali $v = \text{cost.}$ siano coniche bisogna che

$$(21) \quad \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0.$$

Del resto la (20) è una conseguenza della (21) e delle (3).

La (21) esprime che la superficie focale sulla quale le curve $v = \text{cost.}$ sono spigoli di regresso è degenerata in una curva.

In questo caso tutte le superficie quasinormali hanno le curve $v = \text{cost.}$ coniche.

Infatti la (6) si può scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log (\rho - \beta) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\gamma + \frac{\partial \rho}{\partial v}}{\rho - \delta}.$$

Integrando e tenendo presente la (3), viene

$$(22) \quad - \frac{\varphi(v)(\rho - \beta)}{\beta - \delta} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma + \frac{\partial \rho}{\partial v}}{\rho - \delta}.$$

Si vede così che, se scegliamo

$$(23) \quad b = \frac{\delta - \beta}{\varphi(v)} \quad \alpha = \beta - \frac{\beta - \delta}{\varphi(v)} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

le quali soddisfano le (17), l'equazione in ρ è proprio la prima delle (19). Questo dimostra la nostra affermazione.

Se tutte e due le superficie focali degenerano in curve, e solo in questo caso, le superficie quasinormali sono tutte delle superficie di Peterson.

Matematica. — *Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires.* Nota di B. HOSTINSKÝ presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

J'ai montré, dans deux Notes précédentes, ⁽²⁾ comment on peut résoudre l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u) \Phi(z, y, u, t) dz$$

où

$$a < x, < b, \quad a < y < b, \quad 0 < s < u < t.$$

Les problèmes qui se présentent dans le Calcul des probabilités et dans la Théorie de la diffusion conduisent au problème suivant: trouver des fonctions Φ qui satisfont à l'équation (1) ainsi qu'aux conditions supplémentaires

$$(2) \quad \Phi(x, y, s, t) > 0, \quad \int_a^b \Phi(x, y, s, t) dy = 1.$$

Dans la seconde Note je n'ai donné que des indications sommaires sur la méthode de résoudre ce problème. Je vais maintenant donner un résultat plus précis en renvoyant pour les détails du calcul à un travail plus étendu (*Sur une équation fonctionnelle de la Théorie des probabilités*; « Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk », n. 156) qui est actuellement sous presse.

La méthode de résoudre notre problème consiste à intégrer la transformation fonctionnelle linéaire

$$(3) \quad g(x) = \int_a^b [U_v(x, y, h) + V_v(x, y, h)] F(y) dy;$$

ici $F(x)$ est la fonction primitive, $g(x)$ la fonction transformée. Le noyau $U_v + V_v$ de la transformation est donné par les formules

$$U_v(x, y, h) = \frac{\Phi(x, y, f_v)}{\int_a^b [\Phi(x, z, f_v) + hA(x, z, s + vh)] dz}$$

$$V_v(x, y, h) = \frac{hA(x, y, s + vh)}{\int_a^b [\Phi(x, z, f_v) + hA(x, z, s + vh)] dz};$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) Voir ces « Rendiconti » (6) XIII, 1° sem. 1931, p. 921 et XIV, 2° sem. 1931, p. 326.

$A(x, y, u)$ est une fonction positive bornée et intégrable, $t - s = hn$ (n entier), $f(u)$ une fonction positive de u , $f_v = f(s + vh) \cdot h$ (avec $v = 1, 2, \dots, n$) et

$$\varphi(x, y, p) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4p}}}{2\sqrt{\pi p}}.$$

Or pour former l'intégrale de la transformation (3) il faut opérer successivement les transformations (3) qui correspondent respectivement à $v = n, n-1, \dots, 1$ et passer ensuite à la limite pour n infini.

Considérons d'abord l'expression

$$\xi_n(U) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b U_1(x, \zeta_1, h) U_2(\zeta_1, \zeta_2, h) \dots U_n(\zeta_{n-1}, y, h) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_{n-1}.$$

Développons $U_v(x, y, h)$ en série double de Fourier par rapport à x, y pour h infiniment petit et positif, et substituons ces séries dans l'expression précédente; il vient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(U) &= j(x, y, s, t) \\ &= \frac{A_0}{b-a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{b-a} e^{-\frac{4\pi^2 k^2 \int_s^t f(u) du}{(b-a)^2}} \left[A_k \cos \frac{2\pi k x}{b-a} \cos \frac{2\pi k y}{b-a} + \right. \\ &\quad \left. + B_k \sin \frac{2\pi k x}{b-a} \sin \frac{2\pi k y}{b-a} \right] \end{aligned} \right.$$

où

$$\log A_k = - \int_s^t \int_a^b \int_a^b \frac{2}{b-a} A(\xi, \eta, u) \cos^2 \frac{2\pi k \xi}{b-a} d\xi d\eta du, \quad k \geq 1$$

$$\log B_k = - \int_s^t \int_a^b \int_a^b \frac{2}{b-a} A(\xi, \eta, u) \sin^2 \frac{2\pi k \xi}{b-a} d\xi d\eta du, \quad k \geq 1$$

$$\log A_0 = - \int_s^t \int_a^b \int_a^b \frac{1}{b-a} A(\xi, \eta, u) d\xi d\eta du.$$

La fonction cherchée $\Phi(x, y, s, t)$ s'obtient comme la limite du noyau itéré:

$$\Phi(x, y, s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(U + V).$$

Les calculs qu'il faut effectuer pour obtenir le développement de Φ en série infinie sont analogues de ceux dont j'ai donné un résumé dans la Nota II. La formule (5) de la Nota II reste valable à condition d'y intro-

duire à la place de j la fonction (4) que nous venons de construire dans cette troisième Note. Voici le résultat:

La série

$$\Phi(x, y, s, t) = j(x, y, s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (A)_j^n,$$

où les quantités $(A)_j^n$ sont définies comme dans la Note précédente, ⁽¹⁾ satisfait à l'équation (1) ainsi qu'aux conditions (2) pourvu qu'on remplace j par la fonction (4) et elle a les propriétés suivantes

$$\lim_{t=s} \Phi(x, y, s, t) = 0 \quad \text{pour} \quad y \neq x$$

$$\lim_{t=s} \frac{\partial \Phi(x, y, s, t)}{\partial t} = A(x, y, s).$$

Matematica. — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* — I. *Sommazione delle funzioni puntiformi.* Nota di L. LABOCETTA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. A. CROCCO.

Valendomi della riduzione fatta delle ordinarie funzioni discontinue a poche forme fondamentali, mediante le quali tutte le altre possono essere facilmente espresse, mi propongo ora di far vedere in qual modo esse possano essere adoperate ad esprimere effettivamente gl'integrali delle funzioni discontinue, allo stesso come con le forme fondamentali algebriche e trascendenti si esprimono gl'integrali delle funzioni continue.

Premetterò perciò in questa prima Nota un cenno sulla sommazione delle funzioni puntiformi; in una seconda Nota dirò della riduzione delle funzioni discontinue a tipi normali, dei quali sarà dato in modo generale l'integrale, ed in una terza Nota infine dirò brevemente della integrazione delle funzioni periodiche o periodicamente variabili.

1. *La sommazione.* — In un precedente mio scritto ⁽³⁾ ho indicato dei metodi generali per la costruzione di espressioni analitiche rappresentanti le *funzioni puntiformi*, delle quali ho pure ⁽⁴⁾ indicato due diverse generazioni geometriche.

(1) Voir ces « Rendiconti » (6) XIV, 2^o sem. 1931, pp. 327-328.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) *Le funzioni puntiformi*, « Boll. dell'Un. Matem. Italiana », n. 5, dicembre 1929.

(4) *Una generazione geometrica delle costanti discontinue*, « Atti della XIX Riunione della Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze », 1930 e « R. C. », vol. XIII, serie 6^a, Nota 1^a, p. 822 e Nota 2^a, p. 912, giugno 1931.

Le funzioni puntiformi essendo diverse da zero solo in corrispondenza di un certo numero di punti isolati, costituenti al più un insieme numerabile, qualora s'intendano esistenti soltanto per quei valori della variabile per i quali non sono nulle, non sono suscettibili di integrazione propriamente detta.

Avviene però, in molte circostanze, di dover effettuare su di esse una operazione avente grandi analogie con quella dell'integrazione, ed alla quale si può dare il nome di « *sommazione* ». Ed io intenderò appunto qui appresso per « *sommazione di una funzione puntiforme* $p(x) = g(x) \text{ Punt } f(x)^{(1)}$, in un intervallo $a \dashv b$ quella operazione che ad ogni valore x_0 della variabile appartenente a detto intervallo fa corrispondere la « *somma* »

$$(1) \quad F(x_0) = S_{a+0}^{x_0} g(x) \text{ Punt } f(x)$$

di tutti i valori $h_i = g(x_i)$ non nulli che la funzione puntiforme $p(x)$ prende, a destra di a nell'intervallo $a \dashv x_0$. Nasce il tal modo come somma una funzione continua dappertutto a destra, che è costante in ogni intervallo compreso fra due valori non nulli della funzione puntiforme, e che presenta agli estremi di tali intervalli dei « *salto* » il cui valore è uguale al valore che la funzione puntiforme prende negli stessi punti.

La somma, così definita, di una funzione puntiforme gode evidentemente delle proprietà fondamentali espresse dalle seguenti relazioni:

$$(2) \quad S_{c-0}^c p(x) = g(c) \text{ Punt } f(c)$$

$$(3) \quad S_b^{a+0} p(x) = - S_{a+0}^b p(x)$$

$$(4) \quad S_{a+0}^c p(x) + S_{c+0}^b p(x) + S_b^{a+0} p(x) = 0$$

$$(5) \quad S_{a+0}^{x_2} p(x) - S_{a+0}^{x_1} p(x) = S_{x_1+0}^{x_2} p(x).$$

Queste relazioni sono analoghe a quelle ben note dell'integrale definito, salvo la (2) che è caratteristica delle funzioni discontinue essendo S_{c-0}^c diversa da zero per tutti i valori di c per i quali $p(x)$ non è nulla; ed è appunto a cagione di questa proprietà che gli intervalli sui quali si opera debbono essere aperti ad uno degli estremi, poichè se fossero chiusi ad entrambi gli estremi nella (4) ad es. potrebbe aversi il raddoppiamento del valore nell'estremo c comune ai due intervalli consecutivi (a, c) , (c, b) .

Se i punti nei quali $\text{Punt } f(x)$ è diversa da zero sono compresi tutti nell'intervallo $a \dashv b$, la somma è sempre nulla a sinistra di a ed ha a destra di b costantemente lo stesso valore che in b .

(1) È indicata in questo modo generalmente la funzione puntiforme diversa da zero nei punti nei quali $f(x)$ si annulla e che prende in essi i valori della funzione $g(x)$.

Si può in tal caso scrivere semplicemente $Sp(x)$ assumendo che l'estremo sinistro dell'intervallo sia $-\infty$ e che questa espressione rappresenti la funzione somma in tutto il campo della variabile, da $-\infty$ a $+\infty$.

2. *Sommazioni generalizzate o improprie.* — Partendo da un intervallo $a \text{---} b$ nel quale $Sp(x)$ è finita, se la funzione puntiforme ha dei valori non nulli anche fuori di questo intervallo, si sposti dapprima il suo estremo sinistro verso $-\infty$; se in questo spostamento esso raggiunge una posizione a_1 (potendo essere a_1 lo stesso $-\infty$) tale che $S_{a_1+0}^b p(x)$ diventi, col tendere di a verso a_1 maggiore di qualsiasi numero grande ad arbitrio, allora la (1) non può più servire a definire la sommazione nell'intervallo $a_1 \text{---} b$, ma si può invece costruire una funzione, somma generalizzata, che goda della proprietà espressa dalla relazione (5). È chiaro che se è $F(x)$ una tale funzione lo sarà anche ogni altra funzione $F(x) + C$ dove C è una costante arbitraria.

Una funzione $F(x)$ si costruisce facilmente; basta assegnare ad essa arbitrariamente il valore C in un punto c compreso fra a_1 e b , ed allora a destra ed a sinistra di c essa prende i valori

$$(6) \quad F(x_2) = C + S_{c+0}^{x_2} p(x) \quad , \quad C - S_{x_1+0}^c p(x) = F(x_1)$$

e quale che sia C si ha sempre

$$(7) \quad F(x_2) - F(x_1) = S_{x_1+0}^c p(x) + S_{c+0}^{x_2} p(x) .$$

Parimenti se spostando l'estremo destro verso $+\infty$ si raggiunge (a distanza finita) una posizione b_1 tale che per $b \rightarrow b_1$ diventi $\lim_{b \rightarrow b_1} S_{a+0}^b p(x) = \infty$, la sommazione deve essere arrestata al punto b_1 e non può essere più oltre proseguita.

Se si verificano insieme le due circostanze $a)$ e $b)$ innanzi accennate la sommazione, nella forma generalizzata, deve essere ristretta all'intervallo (a_1, b_1) . Al di fuori di esso si avranno altre espressioni per $F(x)$, tante quanti sono gli intervalli nei quali si verifica la circostanza $a)$, quella $b)$, o entrambe.

3. *Sommazione di funzioni periodiche.* — Resta da considerare il caso di quelle funzioni puntiformi periodiche la cui sommazione, estesa ad un periodo intero ha per valore zero.

Se, per queste funzioni, si vuol portare l'estremo sinistro dell'intervallo $a \text{---} b$ verso $-\infty$, $a_1 \rightarrow -\infty$, la somma, senza diventare infinita, se tale non è in un periodo, diventa indeterminata.

Anche in questo caso si può ottenere una somma generalizzata assegnando ad essa un valore arbitrario C in un punto qualsiasi $x = c$, ed

allora la funzione somma si annullerà in tutti i punti i cui valori sono della forma $x = c \pm kp$ dove k è un numero intiero e p il valore del periodo.

4. *Sommazioni comprendenti un numero finito di termini.* — La più semplice funzione puntiforme è quella fondamentale Punt x che prende il valore 1 nell'origine e si ha

$$(8) \quad \text{S Punt } x = \text{sem sgn } (x; 1) = \text{sgn sem sgn } x$$

e, più generalmente, se essa prende il valore A nel punto $x = a$

$$(9) \quad \text{S A Punt } (x - a) = A \text{ sem sgn } (x - a; 1).$$

Segue la funzione che prende il valore A in due punti simmetricamente situati rispetto all'origine alla distanza a da essa e per la quale si ha

$$(10) \quad \text{S A Punt } (x^2 - a^2) = A [\text{sem sgn } (a + x; 1) + \text{sem sgn } (a - x; 1)].$$

Se i valori che la funzione prende nei due punti di ascissa $x = a$, $x = -a$ sono rispettivamente A e $-A$, se si tratta cioè della funzione

$$(11) \quad A \text{ sgn } x \text{ Punt } (x^2 - a^2) = A \text{ Plg } [2 \text{ Dir } (x/a)]$$

si ha invece l'espressione più semplice ⁽¹⁾.

$$(12) \quad \text{S A sgn } x \text{ Punt } (x^2 - a^2) = A \text{ Dir } (x/a; i).$$

Aggiungiamo la funzione puntiforme che prende il valore $\frac{1}{2}A$ nei due punti $x = \pm a$, il valore $-A$ per $x = 0$.

$$(13) \quad A \left[-\text{Punt } x + \frac{1}{2} \text{Punt } (x^2 - a^2) \right]$$

e che dà per sommazione

$$(14) \quad -\frac{1}{2} A \text{ sgn } (x; 1) \text{ Dir } (x/a; i).$$

Consideriamo poi le due funzioni più generali

$$(15) \quad y_1 = I \frac{I \text{ Cm } x}{1 + \text{sgn } x \text{ I } x/n}, \quad y_2 = x I \frac{I \text{ Cm } x}{1 + \text{sgn } x \text{ I } x/n}$$

(1) Ricordo che, con le notazioni adottate $\text{Dir } (x/a; i)$ indica che nei punti di discontinuità la funzione $f(x)$ prende lo stesso valore di $f(i+0)$, quindi $\text{Dir } (x/a; i)$ prende il valore 1 per $x = -a$ ed il valore zero per $x = a$; gl'intervalli sono chiusi a sinistra.

entrambe diverse da zero nei punti $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$ nei quali la prima prende il valore $+1$ e la seconda i valori $1, 2, 3, \dots, n$. Si ha come sommazione

$$(16) \quad S y_1 = I(x+1) \operatorname{Dir}\left(\frac{2x-n}{n}; i\right), \quad S y_2 = I \frac{(x+1)^2 + x + 1}{2} \operatorname{Dir}\left(\frac{2x-n}{n}; i\right).$$

La coppia di punti (10) è un caso particolare della funzione puntiforme più generale

$$(17) \quad y = -\operatorname{sgn} x \operatorname{Punt} \operatorname{Fr}\left(x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Dir}[2x/(2n-1); 1]$$

con n valori positivi ($+1$) a sinistra dell'origine ed altrettanti valori negativi (-1) a destra. La sommazione dà

$$(18) \quad I\left(n - \frac{1}{2} - x \operatorname{sgn} x\right) \operatorname{Dir}[2x/(2n-1); 1].$$

5. *Funzioni periodiche.* — Assumendo che la funzione puntiforme sia diversa da zero pei valori interi della variabile, considereremo le forme elementari più semplici seguenti, corrispondenti al caso che, dove non è nulla la funzione: *a*) è dappertutto $= +1$; *b*) prende alternativamente i valori $+1, -1$ (serie di Grandi); *c*) prende alternativamente i valori $+2, -2$; *d*) prende alternativamente due volte il valore $+1$ e due volte il valore -1 ; *e*) prende alternativamente n volte il valore $+1$ e n volte il valore -1 .

Scegliendo le costanti (§ 3) in modo che per $x = 0$ la funzione somma abbia lo stesso valore della funzione puntiforme da sommare, la sommazione di queste funzioni dà:

$$(19) \quad a) \operatorname{S I Cm} x = 1 + Ix$$

$$(20) \quad b) \operatorname{S Fal}(x; i) \operatorname{I Cm} x = \operatorname{Fint}(x; i)$$

$$(21) \quad c) \operatorname{S 2 Fal}(x; i) \operatorname{I Cm} x = 1 + \operatorname{Fal}(x; i)$$

$$(22) \quad d) \operatorname{S Fal}(x/2; i) \operatorname{I Cm} x = 1 + \operatorname{Falint}(x; i)^{(1)}$$

$$(23) \quad e) \operatorname{S Fal}(x/n; i) \operatorname{I Cm} x = I\{(n+1)/2 + n/2 \operatorname{Plg}[(n-1)/2 + 2x/n]\}.$$

6. *Funzioni periodicamente variabili.* — Sempre assumendo che la funzione puntiforme sia diversa da zero per i valori interi della variabile, i quali si può pensare che rappresentino il numero d'ordine dei termini di una serie, considereremo le forme più semplici di tali funzioni puntiformi che

(1) Indico con $\operatorname{Falint} x = \operatorname{Plg} I x$ il fattore alternante intermittente che prende in ogni periodo i valori $0, 1, 0, -1$.

prendono i valori: *a*) della serie dei numeri naturali; *b*) della serie dei numeri dispari; *c*) dei termini di una progressione aritmetica avente per ragione *r*; *d*) dei termini di una progressione geometrica crescente avente per ragione *r*; *e*) della serie dei quadrati dei numeri naturali.

Supponendo tutte queste serie estese da $-\infty$ a $+\infty$ e le costanti delle sommazioni scelte in modo che la funzione somma abbia, nel punto $x = 0$, lo stesso valore della funzione puntiforme da sommare, se la somma in esso non è finita, la sommazione di queste funzioni dà:

$$(24) \quad a) \quad S x \text{ Punt Fr } x = 1/2 (I x + \text{sgn } x) I x \text{sgn } x$$

$$(25) \quad b) \quad S (2 x + 1) \text{ Punt Fr } x = [I \{x + \text{sem sgn } (x; 1)\}]^2 \text{sgn } x$$

$$(26) \quad c) \quad S r x \text{ Punt Fr } x = 1/2 (I x + \text{sgn } x) r I x \text{sgn } x$$

$$(27) \quad d) \quad S r^x \text{ Punt Fr } x = r^{Ix} (1 - r^{-1})^{-1}$$

$$(28) \quad e) \quad S x^2 \text{ Punt Fr } x = 1/6 I x (I x + \text{sgn } x) (2 I x + \text{sgn } x) \text{sgn } x.$$

7. *Reticolati cristallini.* — Fisicamente la sommazione si presenta già nel più semplice dei problemi; quello di determinare la quantità di materia in un corpo di forma e dimensioni note. Infatti l'insieme dei punti nodali del reticolato ortogonale dello spazio di lato uno, ossia l'insieme dei punti i valori delle cui coordinate sono espressi da numeri interi, essendo rappresentato da

$$(29) \quad \text{Punt} (\text{Fr } x, \text{Fr } y, \text{Fr } z) = I \text{Cm } x \text{Cm } y \text{Cm } z,$$

se si suppone in ogni nodo un atomo la cui massa sia α , la lunghezza del lato del reticolato λ , e se si considera il parallelepipedo di assi $2a$, $2b$, $2c$, la distribuzione nello spazio della massa costituente il corpo cristallino così limitato è rappresentata dalla equazione

$$(30) \quad m = \alpha I \text{Cm } \frac{x}{\lambda} \text{Cm } \frac{y}{\lambda} \text{Cm } \frac{z}{\lambda} \text{Dir} \left(\frac{x}{a}; 1 \right) \text{Dir} \left(\frac{y}{b}; 1 \right) \text{Dir} \left(\frac{z}{c}; 1 \right)$$

e la quantità di materia in esso contenuta si ottiene con la sommazione della funzione puntiforme triplamente periodica costituente il secondo membro della (30). In questo caso la sommazione è effettuabile immediatamente e si ha per la quantità di materia

$$(31) \quad Q = \alpha (a/\lambda + 1) (b/\lambda + 1) (c/\lambda + 1)$$

alla quale corrisponde la densità (media)

$$(32) \quad D = (\alpha/8 abc) (a/\lambda + 1) (b/\lambda + 1) (c/\lambda + 1).$$

La discontinuità essenziale, dell'una e dell'altra grandezza, mostra quanto inadeguato sia il procedimento col quale la quantità di materia si ottiene per integrazione del prodotto dell'elemento di volume per la densità locale.

Fisica. — *La struttura della riga 6708 del litio osservata in emissione*⁽¹⁾. Nota di L. ALLEGRETTI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. PUCCIANTI.

Lunghe discussioni ed interessanti lavori di ricerca sono stati eseguiti per decidere la struttura fine della riga rossa del Litio (λ 6708).

Schuler e Wurm⁽³⁾, Bogros⁽⁴⁾, e recentemente D. S. Hughes⁽⁵⁾ hanno mostrato, studiando questa riga in assorbimento, che essa si presenta costituita da due righe intense a lato delle quali, dalla parte delle lunghezze d'onda maggiori, e a una distanza quasi eguale a quella che intercede tra le componenti del doppietto, appare una terza riga di intensità molto minore.

Tale aspetto è interpretato nel modo seguente: i due isotopi del Litio sono capaci di emettere o di assorbire ciascuno un doppietto ($1S-2P_{1/2}$ e $1S-2P_{3/2}$) (corrispondente al doppietto D_1 e D_2 del Na) la cui separazione è di circa 0,15 Å. La differenza fra le lunghezze d'onda dovuta alla diversa massa nucleare dei due isotopi ha quasi lo stesso valore, perciò la componente di più breve lunghezza d'onda del Li_6 coincide quasi esattamente con la componente di maggior lunghezza d'onda del Li_7 , cosichè i mezzi di analisi spettroscopica ultrafine non hanno permesso finora di separare queste due righe.

Gli autori sopra citati hanno operato per assorbimento e con mezzi tecnici speciali al fine principalmente di evitare l'espansione dovuta per effetto Doppler ai moti disordinati. Ma nel presente lavoro mostro che con mezzi speciali, del resto assai agevoli, è possibile osservare delle righe di emissione che appaiono sufficientemente sottili per poter essere misurate.

Tale risultato ho ottenuto usando, come sorgente luminosa un arco nel vuoto alimentato con debole densità di corrente. Dopo molti tentativi giunsi alla seguente disposizione che facilmente chiunque può riprodurre.

La lampada è rappresentata schematicamente nella figura. Ad un tubo di vetro Pyrex, lungo circa 30 cm. e di diametro interno di 15 mm. è masticiato alla estremità inferiore un elettrodo di ferro, mentre all'estremità

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(3) SCHULER e E. WURM, «Naturwiss.», 15, 971 (1927).

(4) BOGROS, «C. R.», CXC, 1185 (1930).

(5) D. S. HUGHES, Phys. Rev., 38, 857 (1931).

superiore è unita, pure con mastice, la femmina di un giunto normale Gaede. Il maschio del giunto è chiuso da un tappo di gomma attraverso il quale può scorrere a forza l'altro elettrodo. Questa disposizione permette una rapida scomposizione della lampada utile per poter ripulire le pareti del tubo che dopo qualche tempo di funzionamento si anneriscono. La tubulatura laterale è in comunicazione con una pompa rotativa di Gaede che si mantiene in funzione durante l'esperienza.

Il catodo è costituito da un'amalgama di mercurio e di Litio metallico (oppure più semplicemente da mercurio a cui è aggiunto del carbonato di Litio) e l'anodo da un carboncino massiccio o da una bacchetta di tungsteno. Quest'ultima si dimostra più conveniente perchè così l'arco può rimanere acceso anche varie ore senza che le pareti del tubo si anneriscano come avviene dopo un certo tempo operando coll'elettrodo di carbone.

È opportuno che durante il funzionamento la masticiatura inferiore sia raffreddata tenendola immersa in un bagno d'acqua, e quella superiore sia pure raffreddata con un soffio d'aria.

La massima intensità luminosa delle righe del Litio si ottiene osservando la zona dell'arco più prossima all'anodo. La luce, precedentemente filtrata con un vetro rosso o con una soluzione colorata, è resa monocromatica da un buon monocromatore di Leiss, cosicchè nella gradinata di Michelson, viene analizzata sola la riga rossa del Litio. La gradinata usata, della casa Hilger, con 33 gradini ha per $\lambda = 6708$, una distanza fra due ordini successivi di $0,746 \text{ \AA}$ e un limite di risoluzione di $0,02 \text{ \AA}$.

Per innescare l'arco è sufficiente una tensione di 100 Volta: con una corrente di un Ampere, o poco meno, appaiono nette e sottili due righe rosse, le quali aumentano di intensità con l'aumentare della corrente; quando questa raggiunge i 2 Ampere compare la terza riga molto debole e sottile dal lato delle maggiori lunghezze d'onda. Con corrente superiore ai 4 Ampere le righe del doppietto si espandono, mentre la terza riga diviene sempre più intensa, finché fra 10 e 12 Amp. le righe del doppietto appaiono autoinvertite e la terza componente di intensità paragonabile alle altre due.

Varie fotografie sono state eseguite nei vari ordini, sostituendo all'oculare un obiettivo da proiezione che formava una seconda immagine assai ingrandita sulle lastre fotografiche che erano Pancromatiche Cappelli normali ed estrarapide.

Le fotografie più adatte per le misure si sono mostrate quelle eseguite con l'arco alimentato da una corrente di 2,5 Amp. nelle quali, insieme con la terza componente, le righe del doppietto sono sufficientemente sottili.

La media di varie misure eseguite su varie lastre mi ha dato per risultato:



Separazione delle due componenti principali : 0,155 Å;

Separazione fra il satellite e la componente di maggior lunghezza d'onda: 0,149 Å.

Questi valori sono in accordo con quelli dati dagli sperimentatori sopracitati. In quanto alla teoria si può notare che il valore da me ottenuto è ancora sensibilmente maggiore del valore calcolato nella loro trattazione teorica da D. S. Hughes e Carl Eckart ⁽¹⁾. Cosicché le mie misure sono in maggior accordo con le prececenti esperienze che col valore teorico più recentemente calcolato.

Fisica (Fisica atomica). — *Su una serie perturbata dello spettro dell'alluminio ionizzato.* Nota di L. PINCHERLE, presentata ⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

In un recente articolo Shenstone e Russel ⁽³⁾ hanno dato una interpretazione di alcune serie irregolari negli spettri di linee, serie cioè che si scostano assai dalla forma di Ritz. Tali irregolarità sono spiegate ammettendo che uno (o più) termini della serie siano estranei alla serie stessa, prodotti da una configurazione elettronica diversa da quella dei rimanenti. Il loro introdursi nella serie produce — per un fenomeno di risonanza — lo spostamento dei livelli vicini, di modo che la serie non è più rappresentata dalla formula di Ritz, ma da altre che tengano conto dei livelli perturbatori.

Nel caso di un solo termine estraneo alla serie vale con buona approssimazione la relazione (di Langer):

$$\nu_n = \frac{R}{\left(n + a + b\nu_n + \frac{c}{\nu_n - \nu_0} \right)^2}$$

(a, b, c costanti) dove ν_0 è il numero d'onde del termine perturbatore.

Interessanti sono le serie dell'Al II. Lo spettro dell'Al II è stato analizzato da Sawyer e Paschen; è uno spettro di due elettroni e contiene lunghe serie del tipo $3snx$. Le serie più lontane dalla forma di Ritz sono le serie $^3F^1D^1P$.

Di queste la 1D è la meglio rappresentata dalla formula di Langer.

(1) D. S. HUGHES e C. ECKART, « Phys. Rev. », 36, 694 (1930).

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) « Phys. Rev. », 39, 1932, p. 415.

Gli AA. ritengono che il termine perturbatore sia $3p3p^1D$: dall'analogia con altri spettri il suo valore può essere posto tra 51.000 e 56.000 numeri d'onda. Ora la serie 1D ha i due primi termini a 66.381 e 41.773: gli AA. ritengono che il livello estraneo sia il primo, respinto così in alto da una reazione di tutti i termini della serie; con tale ipotesi si possono determinare le costanti della formula di Langer in modo che tutta la serie sia rappresentata con assai buona approssimazione.

La differenza tra i valori calcolati con tale formula ossia tra i valori sperimentali e quelli calcolati con la formula di Ritz è notevole solo per il primo termine ed è già assolutamente trascurabile per il quarto.

Ho calcolato per mezzo della teoria della perturbazione tali scostamenti dalla formula di Ritz; il calcolo ha uno scopo puramente qualitativo, come quasi tutti i calcoli di questo genere, e perciò le autofunzioni per descrivere gli elettroni nei vari livelli sono state prese assai semplici. In ogni modo il calcolo conferma l'ipotesi di Shenstone e Russel e l'ordine di grandezza degli scostamenti trovati coincide con quello sperimentale per tutti i termini considerati.

Si tratta di calcolare la perturbazione esercitata da uno stato con due elettroni $3p_1$ su stati con un elettrone $3s$ e un elettrone nd_2 .

Mi sono limitato al caso di $n = 3, 4, 5$; perchè per gli altri termini la perturbazione è trascurabile.

Indico con $s(x)$, $p_1(x)$, $d_2(x)$ rispettivamente le autofunzioni rappresentanti l'elettrone s, p_1, d_2 . Allora lo stato perturbatore è rappresentato da

$$\psi_0 = p_1(x_1) p_1(x_2)$$

e uno degli altri stati è rappresentato dall'espressione simmetrizzata;

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [s(x_1) nd_2(x_2) + s(x_2) nd_2(x_1)]$$

dove n indica uno dei tre livelli considerati.

Calcolo la matrice dell'energia a 4 linee e 4 colonne

$$H = \begin{vmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix}.$$

Trovati i suoi autovalori H_0, H_1, H_2, H_3 , le differenze $H_{11} - H_1$, $H_{22} - H_2$, $H_{33} - H_3$ danno i desiderati scostamenti dalla formula di Ritz dei termini della serie; la differenza $H_{00} - H_0$ dà lo spostamento del termine perturbatore.

In questo caso

$$H_{00} = 2E_p + \int \psi_0 \psi_0^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau$$

$$H_{11} = E_s + E_{3d} + \int \psi_1 \psi_1^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau, \quad H_{22} = E_s + E_{4d} + \int \psi_2 \psi_2^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau,$$

$$H_{33} = E_s + E_{5d} + \int \psi_3 \psi_3^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau$$

$$H_{01} = H_{10} = \int \psi_0 \psi_1^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau = \int \psi_1 \psi_0^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau$$

$$H_{02} = H_{20} = \int \psi_0 \psi_2^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau = \int \psi_2 \psi_0^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau$$

$$H_{03} = H_{30} = \int \psi_0 \psi_3^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau = \int \psi_3 \psi_0^* \frac{\varrho^2}{r_{12}} d\tau$$

$$H_{12} = H_{21} = H_{13} = H_{31} = H_{23} = H_{32} = 0$$

dove E_s , E_p , E_{nd} indicano gli autovalori rispettivamente dell'elettrone $3s$ $3p$ nd ; r_{12} è la distanza dei due elettroni.

Ho preso come autofunzioni per gli elettroni d quelle calcolate da Rasetti ⁽¹⁾ in base a un potenziale della forma $V_0 + \frac{\epsilon}{r} + \frac{\eta}{r^2}$ ho determinato ϵ e η giovandomi dei termini regolari della serie; ho trovato le autofunzioni:

$$3d_2 = N_{3d} r^{1.95} e^{-0.69 r/a} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$$

$$4d_2 = N_{4d} r^{2.95} e^{-0.51 r/a} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$$

$$5d_2 = N_{5d} r^{3.95} e^{-0.41 r/a} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$$

dove N è il coefficiente di normalizzazione, a il raggio della prima orbita dell'idrogeno. Dato lo scopo del calcolo, ho potuto porre per comodità gli esponenti di r uguali rispettivamente a 2, 3, 4.

Analogamente

$$3s = N_s r^2 e^{-1.44 r/a}$$

$$3p_1 = N_p r^2 e^{-1.26 r/a} \sin \vartheta e^{i\varphi}.$$

In queste ultime autofunzioni vengono trascurati i nodi, cioè il polinomio in r è ridotto ad un monomio. Come è noto però ⁽²⁾ l'errore che si commette è piccolo.

(1) « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », VII, 1928, p. 915.

(2) ZENER, « Phys. Rev. », 36, 1930, p. 51.

Ho poi ricavato gli autovalori dei vari elettroni dallo spettro dell'al-alluminio doppiamente ionizzato.

I calcoli degli integrali che compaiono nella matrice si semplificano per la simmetria tra i due elettroni. Così per esempio:

$$\iint s(x_1) d_2(x_2) s^*(x_1) d_2^*(x_2) \frac{1}{r_{12}} dq_1 dq_2 = \iint s(x_2) d_2(x_1) s^*(x_2) d_2^*(x_1) \frac{1}{r_{12}} dq_1 dq_2$$

e quindi i quattro integrati provenienti da $\int \psi_1 \psi_1^* \frac{1}{r_{12}} d\tau$ sono a due a due uguali.

L'integrale che compare in H_{00} è:

$$\begin{aligned} e^2 \int \psi_0 \psi_0^* \frac{1}{r_{12}} d\tau &= e^2 \iint (p(x_1))^2 (p(x_2))^2 \frac{1}{r_{12}} dq_1 dq_2 = \\ &= N_p^4 e^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^4 e^{-2.52 r_1/a} \sin^2 \vartheta_1 r_2^4 e^{-2.52 r_2/a} \sin^2 \vartheta_2}{r_{12}} \cdot \\ &\quad \cdot r_1^2 r_2^2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 dr_1 dr_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 = \\ &= 4\pi^2 N_p^4 e^2 \int_0^\infty \int_0^\pi r_1^6 e^{-2.52 r_1/a} \sin^3 \vartheta_1 dr_1 d\vartheta_1 \int_0^\infty \int_0^\pi r_2^6 e^{-2.52 r_2/a} \sin^3 \vartheta_2 dr_2 d\vartheta_2 \frac{1}{r_{12}} \end{aligned}$$

Integro prima rispetto a ϑ ; si ha:

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{|r|} \sum_{\alpha=0}^{\infty} x^\alpha P_\alpha(\cos \theta)$$

dove $|r|$ è il più grande tra r_1 e r_2 , x è il rapporto del più piccolo al più grande e

$$P_\alpha(\cos \theta) = \sum_{\beta=-\alpha}^{+\alpha} \frac{(\alpha - |\beta|)!}{(\alpha + |\beta|)!} P_\alpha^{\beta_1}(\cos \vartheta_1) P_\alpha^{\beta_2}(\cos \vartheta_2) e^{i\beta(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

P_α^β è la β^{ma} funzione sferica associata di ordine α .

In questo caso, poichè φ non compare nell'integrale, se vogliamo che esso non sia zero dobbiamo prendere $\beta = 0$ e quindi:

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{|r|} \sum_{\alpha=0}^{\infty} x^\alpha P_\alpha(\cos \vartheta_1) P_\alpha(\cos \vartheta_2).$$

L'integrale rispetto a q_2 diventa:

$$I_2 = \int_0^\infty r_2^6 e^{-2.52 r_2/a} dr_2 \frac{1}{|r|} \sum_{\alpha=0}^{\infty} x^\alpha P_\alpha(\cos \vartheta_1) \int_0^\pi P_\alpha(\cos \vartheta_2) \sin^2 \vartheta_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2.$$

Ora

$$\sin^2 \vartheta_2 = \frac{2}{3} P_0 (\cos \vartheta_2) - \frac{2}{3} P_2 (\cos \vartheta_2)$$

e quindi per l'ortogonalità delle funzioni sferiche e per la proprietà:

$$\int_0^\pi [P_\alpha^\beta (\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2\alpha + 1} \frac{(\alpha + \beta)!}{(\alpha - \beta)!}$$

si ha:

$$I_2 = \int_0^\infty \left[\frac{4}{3} P_0 (\cos \vartheta_1) - \frac{4}{15} x^2 P_2 (\cos \vartheta_1) \right] \cdot r_2^6 e^{-2.52 r_2/a} \frac{1}{r_{12}} dr_2.$$

Integrando poi rispetto a ϑ_1 si trova:

$$I = 4\pi^2 N_p^4 e^2 \frac{16}{9} \left[\int_0^\infty r_1^6 e^{-2.52 r_1/a} dr_1 \int_0^\infty \frac{r_2^6}{|r|} e^{-2.52 r_2/a} dr_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \int_0^\infty r_1^6 e^{-2.52 r_1/a} dr_1 \int_0^\infty \frac{x^2}{|r|} r_2^6 e^{-2.52 r_2/a} dr_2 \right].$$

Il primo è:

$$\int_0^\infty r_1^6 e^{-2.52 r_1/a} dr_1 \left[\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} r_2^6 e^{-2.52 r_2/a} dr_2 + \int_{r_1}^\infty r_2^5 e^{-2.52 r_2/a} dr_2 \right] = 66.909 \frac{a^{13}}{(2.52)^{13}}.$$

$$\text{Il secondo è } 1413 \frac{\alpha^{13}}{(2.52)^{13}}.$$

Sostituendo poi ai coefficienti i loro valori e dividendo per hc per avere il risultato in numeri d'onda si trova $1 = 73.318$.

Gli altri integrali si calcolano in modo perfettamente analogo.

In definitiva si trova la matrice:

$$\begin{vmatrix} -278.230 & 11.055 & 3.045 & 580 \\ 11.055 & -270.750 & 0 & 0 \\ 3.045 & 0 & -250.633 & 0 \\ 580 & 0 & 0 & -243.104 \end{vmatrix}$$

i cui autovalori sono:

$$-286.332 \quad -263.073 \quad -250.214 \quad -243.092.$$

Gli scostamenti dalla formula di Ritz sono riportati nella seguente tabella accanto ai corrispondenti valori sperimentali:

Termine	Scostamenti	
	Calcolato	Sperimentale
$3s3d$	7677	3470
$3s4d$	429	340
$3s5d$	12	20

Come ho già detto il calcolo non poteva dare che un risultato qualitativo e quindi solo l'ordine di grandezza della perturbazione.

In ogni modo si può concludere che è esatta l'ipotesi di Shenstone e Russel sulla configurazione e la posizione del termine perturbatore. La differenza di energia tra questo e il primo termine della serie risulta dal calcolo precedente di 23.259 numeri d'onda. La sperimentale è di 24.608.

Porgo i più sentiti ringraziamenti al prof. Fermi che mi ha consigliato questo lavoro e mi è stato largo di consiglio e di aiuto.

Fisica. — *Nuovo dispositivo per ricerche sulla struttura della regione di Heaviside*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di I. RANZI presentata dal Socio Q. MAJORANA.

1. È noto come il più importante mezzo di indagine sperimentale delle condizioni dell'alta atmosfera ionizzata sia costituito dalle cosiddette misure di *altezza apparente* di riflessione delle radio-onde.

Ricorderò che si definisce come *altezza apparente* (o virtuale) di riflessione (o anche dello strato di Kennelly-Heaviside) la quota più elevata apparentemente raggiunta dalla traiettoria dell'onda, ammettendo che la velocità di propagazione rimanga costantemente uguale a quella nel vuoto, e che la riflessione avvenga su di una superficie orizzontale ben definita; si chiama invece *altezza reale* di riflessione il più alto livello raggiunto effettivamente dalla traiettoria dell'onda: ammettendo infatti che, a partire da una certa altezza, la densità ionica vada gradatamente aumentando, dando così origine a una diminuzione graduale dell'indice di rifrazione del mezzo rispetto all'onda, la traiettoria di quest'ultima sarà in generale curva e potrà,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico dell'Università di Camerino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1932.

in opportune condizioni, divenire orizzontale per poi ritornare al suolo. L'indagine sperimentale consente di determinare soltanto l'altezza apparente di riflessione. I metodi impiegati appartengono a due tipi principali.

Il metodo realizzato da Appleton e Barnett⁽¹⁾ consiste nel fare interferire i raggi diretti con quelli riflessi. Se d è la differenza di cammino tra le due specie di raggi, facendo variare la frequenza dell'onda emessa di Δf , alla ricevente si osservano degli indebolimenti e rinforzi successivi della intensità di ricezione; il numero n dei massimi (o dei minimi) è dato da

$$n = \frac{d}{c} \Delta f$$

dove c è la velocità di propagazione della luce nel vuoto. Secondo il metodo realizzato da Breit e Tuve⁽²⁾, viene emesso un segnale di brevissima durata e alla ricevente, mediante osservazioni oscillografiche si determina il ritardo che subisce il segnale che segue il cammino dell'onda riflessa (eco): in base a ciò e ammettendo che l'onda riflessa si propaghi sempre con la velocità della luce nel vuoto, si determina l'altezza apparente di riflessione.

Vedremo in altra Nota in qual modo, dai dati ottenuti con tali mezzi sperimentali, si possa giungere alla conoscenza di alcune proprietà della ionosfera.

2. Il dispositivo sperimentale da me realizzato è basato sul metodo di Breit e Tuve (metodo della eco).

Esso comprende un trasmettitore, con circuito Hartley, ad una sola valvola oscillatrice da 100 Watt di dissipazione anodica (Zenith W 100 A) alimentata con corrente alternata stradale a 50 periodi. La griglia della valvola è fortemente polarizzata negativamente in modo che normalmente non si abbiano oscillazioni; in serie colla batteria di polarizzazione è disposto il secondario (di circa 400 spire) di un piccolo trasformatore a nucleo di ferro laminato, della sezione di cm². 5, nel cui primario (di circa 80 spire) viene inviata, attraverso a un reostato di circa 100 ohm la corrente alternata stradale a 50 periodi con una intensità di due amp. circa: in tali condizioni, essendo molto forte la resistenza ohmica rispetto a quella induttiva, la corrente conserva il suo andamento sinusoidale e la tensione ai capi del primario (e quindi anche del secondario) presenta dei guizzi in corrispondenza delle singole semialternanze; gli impulsi di tensione di senso tale da compensare la tensione di polarizzazione negativa provocano la generazione di treni di oscillazioni di breve durata (che si può rendere di circa un millesimo di secondo), con periodo e fase imposti dalla corrente alternata stradale.

(1) «Proc. Roy. Soc.», A 113 (1926).

(2) «Phys Rev.», 28, p. 554 (1926).

La compensazione è regolata in modo da avvenire in corrispondenza dei massimi di tensione positiva alla placca della valvola. La potenza dell'alimentazione di placca della valvola durante l'emissione di tali treni d'onde è di soli 10 Watt. L'aereo è del tipo a dipolo orizzontale. Il trasmettitore può funzionare su onde comprese tra m. 40 e m. 150.

L'apparecchio ricevente è situato nello stesso laboratorio in cui è posto il trasmettitore. Esso comprende due stadi di amplificazione in alta frequenza, uno stadio con valvola rivelatrice in reazione, utilizzando la curvatura della caratteristica di placca, e un ultimo stadio con una valvola amplificatrice a corrente continua (ossia con resistenza e contro-batteria); come antenna viene usata la linea luce. Nel circuito di placca dell'ultima valvola amplificatrice è inserita una resistenza variabile di circa 80.000 ohm. massimi,

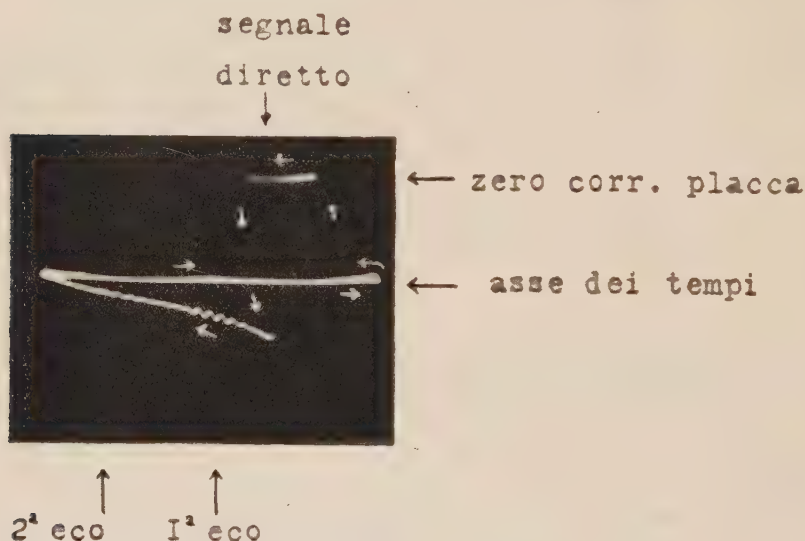


Fig. 1.

ai cui capi sono derivate le due placche deviatrici di un oscillografo a catodo incandescente (tipo Ardenne, della casa Leybold, modello piccolo, con 1000 volt di tensione anodica e della sensibilità di 1 mm. per volt). Il fascio catodico viene deviato perpendicolarmente alla direzione del campo elettrico delle due placche mediante il campo magnetico creato da una bobina percorsa dalla stessa corrente sinusoidale a 50 periodi usata per la modulazione del trasmettitore. L'oscillogramma che si osserva in tali condizioni è dato dalla fig. 1 (ottenuta per fotografia): sono state aggiunte delle piccole frecce ad indicare il senso di spostamento della macchia catodica; alla fine dell'impulso diretto (in corrispondenza del quale, data la sua forte intensità, la corrente di placca dell'ultima valvola si annulla), si nota un abbassamento nel tracciato oscillografico, dovuto all'autoinduzione della

rèistenza inserita nel circuito di placca della rivelatrice. Per la osservazione di eventuali echi (dovuti in tal caso a riflessioni pressochè verticali sullo strato) si è trovato conveniente fare oscillare la rivelatrice: si osservano così, con un lieve disaccordo, dei battimenti nettissimi, sull'oscillogramma, tra le oscillazioni locali e quelle dei treni d'onde riflessi: tali battimenti consentono appunto una determinazione esatta della posizione degli echi sulla curva oscillografica. La misura dell'altezza apparente di riflessione viene eseguita determinando il ritardo tra la fine del segnale riflesso e la fine di quello diretto: basta proiettare questi due punti sull'asse dei tempi e determinare la distanza e la posizione dei punti proiezione; da cui, nota la frequenza del moto sinusoidale, è facile dedurre il ritardo dell'eco. Non è conveniente eseguire tale misura tra l'inizio del segnale diretto e quello del segnale riflesso, poichè quest'ultimo spesso è vicinissimo o si sovrappone in parte a quello diretto. Durante le misure viene controllata la frequenza della corrente alternativa; inoltre rilievi oscillografici eseguiti in varie epoche mi hanno permesso di stabilire che la forma della corrente alternativa usata poteva ritenersi perfettamente sinusoidale.

Una particolarità importante del dispositivo suddetto è la seguente: la curva dei battimenti appare generalmente assai stabile; si osservano talvolta degli spostamenti regolari in un determinato senso, ma allora la velocità di spostamento di tutta la curva dei battimenti aumenta passando dalla prima eco (cioè quella dovuta a una sola riflessione nello strato ionizzato) alla seconda eco (cioè quella dovuta a due riflessioni nello strato ionizzato, con una riflessione intermedia sul suolo e che perciò presenta un ritardo doppio della prima), alla terza, ecc. Si può quindi affermare che tali spostamenti avvengono quando varia la fase delle onde riflesse, per variazione del loro cammino ottico. Spesso la curva dei battimenti non presenta uno spostamento apprezzabile durante alcuni minuti, ossia per varie centinaia di segnali emessi. Ciò dimostra che le oscillazioni del trasmettitore (e quindi anche quelle degli echi quando l'altezza di riflessione non varia) si iniziano sempre con la stessa fase rispetto alle oscillazioni della rivelatrice in reazione.

Ho potuto osservare che, ponendo il ricevitore a una distanza superiore ai 500 m. dalla trasmittente, la curva dei battimenti diviene instabilissima. L'interpretazione di tali fenomeni, che sono ovviamente di importanza fondamentale nel funzionamento del dispositivo, mi è stata suggerita dal prof. Quirino Majorana, al quale mi è grato esprimere qui i miei più vivi ringraziamenti. Secondo tale interpretazione si ammette che le oscillazioni della trasmittente, all'inizio del segnale, quando cioè esse sono di piccola ampiezza, subiscano una vera e propria sincronizzazione da parte delle oscillazioni della rivelatrice; in seguito, con l'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni generate, queste acquistino la frequenza imposta dal circuito oscillante, con una fase però dipendente da quella delle prime oscillazioni, le quali furono sincronizzate dalla valvola rivelatrice: tale fase

si manterrà praticamente invariata per tutta la durata del segnale (circa un millesimo di secondo). Ho ottenuto la conferma sperimentale della giustezza di tale ipotesi, variando l'azione delle oscillazioni generate dalla valvola rivelatrice sul circuito oscillante del trasmettitore; se tale azione è debole scompare la stabilità della curva dei battimenti.

In conclusione il dispositivo realizzato funziona come un sensibile *interferometro* e presenta rispetto a quelli fin qui impiegati i seguenti notevoli vantaggi: la semplicità di montaggio che consente, anche per la vicinanza estrema tra la stazione trasmittente e la stazione ricevente, di eseguire con tutta rapidità misure pressochè contemporanee su varie lunghezze d'onda, — la possibilità di eseguire misure dirette e continuative, sullo schermo fluorescente non solo di altezze di riflessione, ma anche di variazioni di fase, senza dover ricorrere a complessi sistemi di registrazione fotografica, — la mancanza di disturbo da parte degli atmosferici alla lettura degli oscillogrammi, data la aperiodicità degli atmosferici stessi, — la possibilità di eseguire determinazioni del limite superiore di frequenza delle onde che vengono riflesse, nei vari momenti della giornata, dallo strato ionizzato (aumentando gradualmente la frequenza del trasmettitore sino a che gli echi scompaiano): l'artificio dei battimenti rende il ricevitore assai sensibile, cosicchè la determinazione dell'onda limite si può fare con buonissima precisione.

Chimica. — *Preparazione elettrolitica di alcuni sali complessi dell'argento bivalente*⁽¹⁾. Nota di G. A. BARBIERI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. M. BETTI.

L'attitudine dell'argento bivalente a formare complessi con basi organiche, constatata la prima volta da G. A. Barbieri⁽³⁾ con la preparazione del persolfato di argenti-piridina $[\text{Ag}(\text{C}_5\text{H}_5\text{N})_4]_2\text{S}_2\text{O}_8$, venne confermata recentemente da W. Hieber e F. Mühlbauer⁽⁴⁾ con la preparazione del persolfato di argenti-o-fenantrolina $[\text{Ag}(\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2)_2]_2\text{S}_2\text{O}_8$ e da G. T. Morgan e F. H. Burstall⁽⁵⁾ con la preparazione del persolfato di argenti- $\alpha\alpha$ -dipiridile $[\text{Ag}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2]_2\text{S}_2\text{O}_8$.

In questi composti il numero di coordinazione dell'argento bivalente è quattro.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

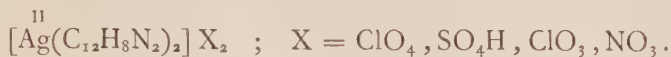
(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 42, II, 1 (1912).

(4) « Ber. », 61, 2149 (1928).

(5) « J. Chem. Soc. », 2594 (1930).

W. Hieber e F. Muhlbauer approfittando della singolare stabilità, anche di fronte agli acidi, del complesso $\overset{\text{II}}{\text{Ag}}(\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2)_2$ riuscirono a sostituire nel persolfato di argenti-fenantrolina il radicale persolforico con altri radicali acidi mediante reazioni di doppio scambio. Il persolfato di argenti-fenantrolina, che è insolubile in acqua, venne sciolto a freddo in acido nitrico concentrato (64 %) e la soluzione nitrica venne addizionata con un eccesso di sali di sodio degli acidi: perclorico, solforico, clorico e nitrico. Si formarono dei precipitati cristallini la cui composizione corrispose alla formula generale:



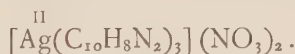
Nei doppi scambi in soluzione nitrica il complesso $\overset{\text{II}}{\text{Ag}}(\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2)_2$ passa dunque inalterato dal persolfato nei nuovi sali.

Secondo G. T. Morgan e F. H. Burstall le cose non procederebbero nella stessa maniera col persolfato di argenti-dipiridile $[\overset{\text{II}}{\text{Ag}}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2] \text{S}_2\text{O}_8$, giacchè essi avrebbero osservato che se questo composto viene macinato a freddo con acido nitrico al 60 % e la parte indisciolta, separata dal liquido acido, viene portata in soluzione con acqua e poi addizionata con un eccesso di nitrato di ammonio, cristallizza in aghetti bruni un composto al quale spetterebbe la formula $[\overset{\text{II}}{\text{Ag}}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3] (\text{NO}_3)_2$.

Dunque il complesso $[\overset{\text{II}}{\text{Ag}}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2]$ esistente nel persolfato si trasformerebbe nel complesso $[\overset{\text{II}}{\text{Ag}}(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_3]$: e ciò non avverrebbe per aggiunta di dipiridile, ma per semplice trattamento con acido nitrico e nitrato di ammonio.

Questa reazione, certamente di difficile interpretazione, riesce tanto più strana se si pensa alla perfetta analogia di comportamento finora constatata, dell' $\alpha\alpha$ dipiridile con l'o-fenantrolina nei composti metallamminici.

Ciò mi ha indotto a ripetere la preparazione del composto

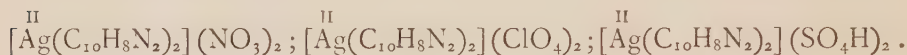


Operando nelle condizioni indicate dagli Autori inglesi vennero ottenuti soltanto dei prodotti che, per ogni atomo di argento, non contenevano mai più di due molecole di dipiridile.

Nel corso di tali esperienze ho avuto anche campo di constatare che il persolfato di argenti-dipiridile non è il punto di partenza più opportuno per la preparazione di altri composti di argenti-dipiridile. L'acido persolforico, che viene liberato dall'acido nitrico concentrato, si trasforma parzialmente in acido monopersolforico che dà origine ad acqua ossigenata, e questa riduce l'argento bivalente anche se fa parte di complessi. Inoltre nelle reazioni di doppio scambio in soluzione nitrica con perclorati, clorati, solfati, si ottengono spesso, almeno come primi prodotti, dei sali a radicali acidi misti.

Siccome da mie ricerche precedenti⁽¹⁾ era risultato che la forma bivalente dell'argento nei sali complessi può essere raggiunta, oltre che per azione dei persolfati, anche per via elettrolitica, parve interessante ricercare se i sali di argenti-dipiridile potessero venir ottenuti per ossidazione anodica dei rispettivi sali complessi dell'argento monovalente. Questi ultimi sono però praticamente insolubili in acqua. Tale difficoltà venne superata sottoponendo all'ossidazione anodica la loro soluzione negli acidi. Era probabile che anche in soluzione acida si sarebbe potuto formare il complesso dell'argento bivalente con l' $\alpha\alpha$ -dipiridile, giacchè è noto che l'affinità di quest'ultimo per alcuni joni metallici bivalenti (ad esempio Fe e Cu) è maggiore che non per l'ione idrogeno, cioè il dipiridile ha maggior tendenza a formare certi composti metallamminici che non sali ammoniacali.

I sali di argento che, in presenza di dipiridile, vennero sottoposti all'ossidazione anodica furono: il nitrato, il perclorato, il solfato, rispettivamente in soluzione nitrica, perclorica, solforica; vennero ottenuti allo stato cristallino i seguenti composti complessi dell'argento bivalente:



Le elettrolisi vennero eseguite con una corrente di circa 8 volta e 2-4 ampère, regolata da una resistenza metallica a slitta. Il liquido anodico era contenuto in una capsula di platino di circa 250 cc. che fungeva da anodo. Il liquido catodico era contenuto in un vasetto poroso immerso nel liquido anodico; il catodo era un filo di platino avvolto a spirale.

Per la preparazione del nitrato di argenti-dipiridile si impiegò come liquido anodico una soluzione che conteneva in 100 cc. gr. 1,6 di nitrato di argento, gr. 3,2 di $\alpha\alpha$ -dipiridile e gr. 9 di acido nitrico; come liquido catodico una soluzione N/5 di AgNO_3 . All'inizio del passaggio della corrente il liquido anodico a contatto del platino si colorò intensamente in rosso-bruno, e dopo alcuni minuti la parete interna della capsula cominciò a ricoprirsi di una patina cristallina rosso-bruna molto aderente, che, esaminata al microscopio, risultò costituita di aghetti bruni omogenei.

Si constatò, in seguito, che, impiegando correnti più deboli e aggiungendo al liquido anodico molto nitrato di ammonio (circa il 40%), si ottenevano depositi cristallini non aderenti all'anodo, e costituiti da prismi rosso-bruni ben formati, a faccie lucenti, che presentano un fortissimo pleocroismo dall'arancione cupo al viola e al nero. Il prodotto cristallino, separato dal liquido anodico alla pompa, venne lavato con soluzione concentrata di nitrato di ammonio, poi con alcool e infine seccato nel vuoto. Esso è solubile in acqua alla quale impartisce una intensa colorazione rosso-bruna, quasi insolubile nelle soluzioni concentrate di nitrati alcalini, del tutto

(1) G. A. BARBIERI, « Ber. », 60, 2424 (1927).

insolubile in alcool e negli altri solventi organici. La sua soluzione acquosa per aggiunta di acido cloridrico si scolora istantaneamente con formazione di cloruro di argento e sviluppo di cloro. Si scolora pure per aggiunta di ammoniacca o di acqua ossigenata acida per acido nitrico o solforico.

Nell'analisi quantitativa del composto l'ossigeno attivo venne dosato per via jodometrica, l'azoto nitrico come NO, l'azoto totale secondo Dumas.

Trovato % Ag 19.61 ; N totale 15.20 ; N nitrico 5.02 ; O att. 1.40
calcolato per

^{II}
[Ag(C₁₀H₈N₂)₂](NO₃)₂ Ag 19.83 ; N totale 15.45 ; N nitrico 5.15 ; O att. 1.47.

In una soluzione acquosa di AgClO₄ l'aggiunta di dipiridile sciolto in acqua calda o in alcool, determina la formazione di un abbondante precipitato giallo che al microscopio si mostra costituito da aghi lunghi sottilissimi: questo composto seccato a 110° diede all'analisi risultati concordanti con la formula: AgClO₄ · 2C₁₀H₈N₂.

Trovato % Ag 20.59 ; N 10.65
calcolato % Ag 20.76 ; N 10.79.

Un grammo di questo prodotto sospeso in 100 cc. di acqua venne addizionato a goccia a goccia con soluzione concentrata di acido perclorico finchè si ottenne una soluzione limpida. Questa venne sottoposta all'ossidazione anodica nelle condizioni indicate per il composto precedente; si formò all'anodo un deposito cristallino rosso-mattone costituito da prismi microscopici omogenei, poco solubili nell'acqua, quasi insolubili in presenza di perclorati alcalini. Piccole porzioni riscaldate fortemente allo stato secco esplosero con violenza. All'analisi diede i seguenti risultati:

trovato % Ag 17.36 ; N 9.13 ; O attivo 1.26
calcolato per

^{II}
[Ag(C₁₀H₈N₂)₂](ClO₄)₂ Ag 17.43 ; N 9.05 ; O attivo 1.30.

Per la preparazione del bisolfato di argenti-dipiridile, gr. 0.5 di solfato di argento, previa aggiunta di poca acqua, vennero macinati in mortaio con grammi uno di dipiridile, e poi addizionati con soluzione di acido solforico al 20% fino ad ottenere la soluzione completa del composto giallo prima formatosi. La soluzione solforica sottoposta all'ossidazione anodica nelle condizioni su descritte si trasformò prima in un liquido rosso, dal quale si formò poi un abbondante precipitato cristallino rosso-bruno che aumentò per aggiunta di solfato di ammonio in sostanza.

Trovato % Ag 17.65 ; N 9.30 ; S 10.58
calcolato per

^{II}
[Ag(C₁₀H₈N₂)₂](SO₄H)₂ Ag 17.57 ; N 9.12 ; S 10.44.

Chimica (Chimica-fisica). — *Sopra una costante strutturale relativa ai passaggi di stato.* Nota di R. BIGAZZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

È nota l'importanza che ha assunto in questi ultimi tempi il *paracoro* di Sugden, mediante il quale si legano la tensione superficiale (γ), il peso molecolare (M) e la differenza di densità ($d - d'$) nella vaporizzazione. Essendo d' piccolo per rapporto a d , il paracoro (P) è dato in generale da:

$$P = \frac{M}{d} \gamma^{\frac{1}{2}}$$

e per $\gamma = 1$, il paracoro non è che il volume molecolare.

Vien fatto allora di pensare che il volume molecolare possa essere una grandezza caratteristica per le molecole a struttura simile, quando si consideri la temperatura assoluta che definisce il punto di passaggio di stato (vaporizzazione, fusione, solidificazione, liquefazione).

Una formula che ho ricavata empiricamente, e che interpreta bene questo legame è data dal rapporto

$$(1) \quad \frac{TP}{p^2} = \text{costante} = K$$

in cui:

T = temperatura assoluta di passaggio di stato;

P = peso molecolare;

p = peso specifico a 15°C riferito a H_2O a 4°C

e da cui:

$$T = \frac{Kp^2}{P}.$$

Questa espressione (con la premessa che si abbiano sostanze pure, e che non vi siano errori sperimentali di T e p) vale per composti con simile formula strutturale in tutti e quattro i passaggi di stato.

Perchè la (1) sia valida, la molecola non deve subire in prossimità e durante detti passaggi, alterazioni di sorta (polimerizzazioni, dissociazioni ecc.).

Essendo il volume molecolare dato da $V = \frac{P}{p}$ la (1) si può scrivere pure:

$$\frac{TV}{P} = K, \text{ od, } \frac{TV^2}{P} = K, \text{ od ancora } \frac{TV}{p} = K.$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

Per poter riunire in un'unica costante approssimata di passaggio di stato (che chiamerò K') tutte le molecole a struttura diversa mi sono valso di un fattore (che chiamerò c) di complessità, che è in dipendenza della complessità strutturale delle molecole stesse. Si ha cioè:

$$(2) \quad \frac{TP}{p^2 c} = K'$$

da cui:

$$T = \frac{K' p^2 c}{P}.$$

Questo fattore c ho ottenuto graficizzando le formule di struttura dei composti. Ho adottato cioè un'unità grafica di valenza strutturale (per es. 1 cm.).

Si ricerca allora il segmento che rappresenta la *maggior larghezza presentata dalla molecola graficizzata*; e questo segmento è il fattore c che rappresenta, per così dire, il vettore caratteristico, che definisce lo stato di equilibrio a cui tende l'insieme degli atomi che costituisce la molecola.

Il fattore c varia da 1 a 13, passando, per esempio, dal bromo al dodecano (prendendo per unità un cm.)

La verifica delle espressioni (1) e (2), è stata fatta in parecchie centinaia di casi ed i dati saranno riportati, dettagliatamente, in tabelle che verranno pubblicate altrove per esteso, insieme all'esame delle eccezioni riscontrate.

L'espressione $\frac{TP}{p^2} = K$ si presta, sotto molti aspetti, meglio del paracoro, poichè non contiene che grandezze note, per un numero grandissimo di molecole, e facilmente determinabili.

D'altra parte essa non riguarda solo il passaggio di stato liquido-vapore, ma altresì il passaggio liquido-solido, solido-liquido, gassoso-liquido. Per di più vale sia per sostanze organiche che inorganiche.

1. *Passaggio liquido-gassoso - Temperatura di ebollizione.*

Si hanno nella serie che segue, i valori di K , notevolmente concordanti per ogni classe strutturale di composti (ogni classe strutturale ha valore pressochè uguale di c). I valori di K riportati sono stati esaminati, come si vede, per sostanze a simile struttura, ma a composizione svariaticissima.

Il valore di K' è invece stato riferito al composto caratteristico enunciato fuori parentesi per ogni classe.

Per mercurio, bromo ed acqua i valori di $\frac{TP}{p^2 1000} = K$ sono rispettivamente: 0.68 - 5.32 - 6.85.

Classe e composti	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$	ϵ in cm.	$K' = \frac{TP}{p^2 1000 \epsilon}$	Classe e composti	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$	ϵ in cm.	$K' = \frac{TP}{p^2 1000 \epsilon}$
I. Cloroformio (CH ₃ ·OH bromoformio, silicocloroformio, PCl ₃ , S ₂ Cl ₂ , COCl ₂ , Ac. clorosolforico, cloruro solforile, CSeCl ₂ , AsCl ₃ , SiBr ₄ , acido solforico)	17.66 (17.50-13.62 15.43-17.30 19.67-13.84 15.78-16.78 17.42-15.35 18.30-16.32)	2	8.83	VIII. Toluene (Cloruro di benzoile, aldeide benzica, cloruro di benzale, alcool benzilico)	47.68 (45.16-47.11 48.00-46.09)	5	9.53
II. Cloruro etile (Acido acetico, cloralio, aldeide etilica, tetracloroetilene, cloruroetilene, dicloroetilene, tricloroetilene)	22.87 (21.32-23.91 22.41-24.40 21.62-20.20 21.71)	3	7.62	IX. Paranitrotoluene (M-nitrotoluene, O-nitrotoluene, metilanilina, O-toluidina, M-toluidina)	51.37 (50.66-49.46 50.98-50.50 51.97)	5.7	9.01
III. Tiofene (pirrolo)	26.77 (28.79)	3.5	7.64	X. Pentano normale	58.92	6	9.82
IV. Alcool etilico (etilmercaptano)	26.91 (28.07)	3.1	8.68	XI. Etilbenzene (O-xilene, M-xilene, dimetanilina, O-nitroxilene, metanitroxilene-paranitroxilene)	59.38 (60.26-61.94 61.15-59.83 61.70-61.97)	6	9.89
V. Acetone (dicloro-acetone)	30.87 (32.62)	4	7.71	XII. Monocloronafalina	60.67	5.8	10.46
VI. Benzolo (C ₆ H ₅ Br, C ₆ H ₅ Cl, O-dibromobenzolo, M-dibromobenzolo, O-diclorobenzolo, C ₆ H ₅ I)	35.75 (31.99-37.48 30.86-32.22 37.92-32.78)	4	8.93	XIII. Esano	68.0	7	9.71
VII. Anilina (Nitrobenzolo, O-cloruanilina, M-cloruanilina)	40.77 (40.26-41.75 42.30)	4.5	9.06	XIV. Eptano	78.15	8	9.76
				XV. Ottano	90.02	9	10.00
				XVI. Nonano	101.5	10	10.15
				XVII. Decano	115.7	11	10.51
				XVIII. Undecano	126.8	12	10.56
				XIX. Dodecano	140.13	13	10.57

2. Passaggio liquido-solido — Temperatura solidificazione.

Si sono ottenuti i seguenti risultati. I valori sono riportati allo stesso modo che per il passaggio liquido-gassoso.

Classe e composti	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$	c in cm.	$K' = \frac{TP}{p^2 1000 c}$
I. Cloroformio (bromoformio)	10.73 (8.69)	2	5.36
II. Aldeide etilica (cloralio)	13.27 (13.92)	2.7	4.91
III. Acido acetico (alcool etilico)	15.76 (12.02)	3.5	4.50
IV. Monocloro benzene (moniodobenzene — monobromobenzene — ortodibromobenzene — metadibromobenzene)	21.10 (17.39) (18.09) (16.89) (17.91)	4	5.27
V. Anilina (nitrobenzolo)	23.78 (23.25)	4.5	5.28
VI. Cloruro di benzale (aldeide benzoica)	25.60 (25.12)	5	5.12
VII. Nonano	53.61	10	5.36
VIII. Decano	62.56	11	5.68
IX. Undecano	65.30	12	5.44
X. Dodecano	75.20	13	5.78

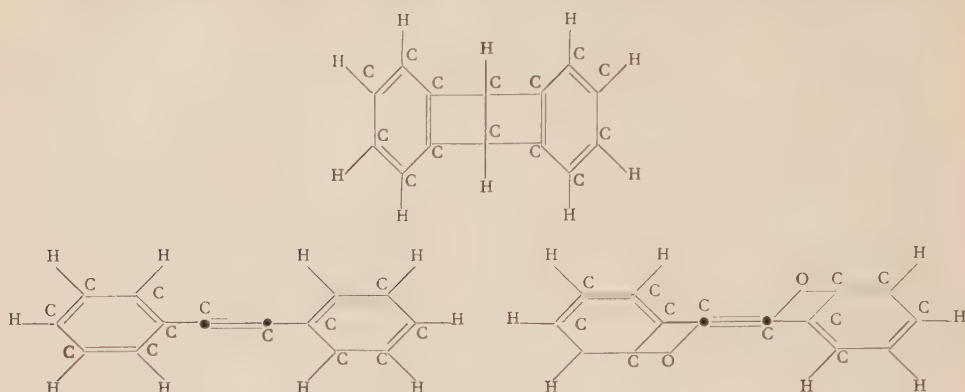
3. Passaggio solido-liquido — Temperatura fusione.

Abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

a) Composti organici — Segue la serie esaminata:

Classe e composti	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$	c in cm.	$K' = \frac{TP}{p^2 1000 c}$
I. Acido ossalico	15.28	3.6	4.24
II. Acido tartarico	21.50	5	4.21
» succinico	22.09	5	4.41
III. Fenolo	25.51	5	5.10
pirocatechina	23.22	5	4.64
IV. Resorcina	26.16	5.4	4.84
idrochinone	27.94	6	4.65
acido benzoico	27.31	5.5	4.96
acido salicilico	27.03	5.5	4.91
V. Acido picrico	29.27	5.7	5.13
VI. Naftalina	34.13	5.8	5.88
α-nitronaftalina	32.83	5.8	5.66
α-naftolo	35.90	5.8	6.18
VII. β-naftolo	38.95	6.8	5.72
VIII. Fenantrene	47.76	—	—
IX. Antracene	56.89	—	—
antrachinone	57.84	—	—

Per fenantrene, antracene, antrachinone, si hanno valori abbastanza soddisfacenti di K' , solo graficizzando rispettivamente le seguenti strutture:



con cui i fattori c risultano rispettivamente di 7.6 cm. - 9 cm. - 9 cm. e le K' risultano rispettivamente 6.28 - 6.32 - 6.42.

b) *Composti inorganici salini* - Li tralascerò perchè alterabili al punto di fusione, nonostante che talune classi strutturali mi abbiano dati risultati di K soddisfacenti come per es. quella dei clorati e quella dei solfati.

c) *Metalloidi* - Tralascio i metalloidi a T di fusione altissime come silicio, boro, carbonio. Esaminerò invece solfo e fosforo bianco. Formule molecolari: solfo = S_8 , e fosforo = P_4 . Per struttura ciclica solfo $c = 2.6$ cm., fosforo $c = 1.4$ cm.

$S_8, K = 23.36$; $P_4 K = 11.76$. $S_8 K' = 8.98$; $P_4 K' = 8.40$.

Con strutture lineari $S_8 c = 7$ cm.; $P_4 c = 3$ cm.; $S_8 K' = 3.33$, $P_4 K' = 3.92$.

d) *Metalli* - Sono risultati per $K = \frac{TP}{p^2 1000}$ i dati seguenti riportati nella tabella seguente:

Classi e metalli	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$	Classi e metalli	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$	Classi e metalli	$K = \frac{TP}{p^2 1000}$
I. Gallio . . .	0.61	Stagno . . .	1.17	X. Vanadio . .	3.24
Tallio . . .	0.84	V. Cobalto . .	1.43	Molibdeno . .	3.22
Indio . . .	0.89	Nichel . . .	1.30	XI. Berillio . .	4.03
Piombo . . .	0.95	VI. Rodio . . .	1.54	Alluminio . .	4.12
II. Zinco . . .	0.88	Palladio . . .	1.47	XII. Magnesio .	7.42
Cadmio . . .	0.88	Rutenio . . .	1.50	XIII. Litio . . .	9.10
III. Platino . .	0.86	VII. Ferro . . .	1.65	Sodio . . .	9.05
Oro . . .	0.74	Manganese . .	1.58	XIV. Cesio . . .	11.26
Osmio . . .	1.04	Tungsteno . . .	1.60	Rubidio . . .	11.44
Iridio . . .	0.99	VIII. Cromo . .	2.08	XV. Bario . . .	11.23
Uranio . . .	1.07	IX. Cerio . . .	2.75	Stronzio . . .	14.47
IV. Rame . . .	1.10	Germanio . . .	2.84	Calcio . . .	12.61
Argento . . .	1.21			XVI. Potassio .	17.93

4. *Passaggio gassoso-liquido - Temperatura di liquefazione.*

Nei gas essendo $V = \text{costante}$, la $\frac{TP}{p^2} = \frac{TV^2}{P} = K$ si semplifica a $\frac{T}{p} = K$; oppure a $\frac{T}{P} = K$, e per gas a formula di struttura diversa si ha pure $\frac{T}{P \cdot c} = K'$.

Sono risultati i dati seguenti:

Classi e gas	$K = \frac{T}{P}$	c in cm.	$K' = \frac{T}{P \cdot c}$	Classi e gas	$K = \frac{T}{P}$	c in cm.	$K' = \frac{T}{P \cdot c}$
I. Elio	1.05	—	—	VIII. $N_2 O$	4.22	2	2.11
II. Kripto	1.46	—	—	SO ₂	4.10	2	2.05
III. Argo	2.20	—	—	H ₂ S	5.35	2	2.67
IV. Fluoro	2.26	—	—	Cloruro di nitro- sile	4.10	2	2.05
V. Azoto	2.82	1	2.82	CO ₂	4.43	2	2.21
Cloro	3.28	1	3.28	IX. Metano	6.81	2	3.40
Ossigeno	2.84	1	2.84	Cloruro di me- tile	5.02	2	2.51
HBr	2.60	1	2.60	X. Etano	6.30	3	2.10
CO	2.96	1	2.96	Acetilene	7.15	3	2.38
VI. Ozono	3.20	1	3.20	Etilene	6.10	2.6	2.34
VII. PH ₃	5.52	1.7	3.24				

Chimica. — *Il fosfato trifenilico come solvente crioscopico*⁽¹⁾.
Nota di F. GARELLI e G. RACCIU, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PAR-
RAVANO.

Al fine di mettere in rilievo qualcuna delle applicazioni che può ricevere il trifenilfosfato come solvente crioscopico, lo abbiamo impiegato per determinare il peso molecolare di due metallodi, lo zolfo e lo iodio e di due sostanze organiche insolubili o quasi nei comuni solventi, ma importanti nella tecnica e cioè l'indaco e l'esplosivo T₄ o trimetilen- trinitro-
tetrammina.

ZOLFO.

Esistono numerose determinazioni crioscopiche del peso molecolare dello zolfo sciolto in diversi composti organici e cioè in naftalina, benzolo, difenile, bromoformio, antrachinone e i risultati ottenuti portano alla conclusione che lo zolfo si scioglie con molecole S₈. Sciolto in fosforo la grandezza molecolare risulterebbe da S₈ a S₁₀ ed in ortonitrotoluolo da S₁₀ a S₁₁. Anche col metodo ebullioscopico le determinazioni eseguite in solventi organici che bollono a temperatura molto elevata, quali la naftalina (218°), il nitrobenzene (207°), il difenile (255°), dimostrano pure che lo zolfo anche a queste temperature è sciolto in molecole costituite da 8 atomi.

Nel trifenilfosfato fuso lo zolfo ottaedrico, alla temperatura di 50° C, si scioglie in proporzione di poco superiore al 2 % e le determinazioni crioscopiche diedero i risultati seguenti:

gr. solvente	zolfo %	abbassamento Δ	M (per K = 120)
20.74	0.6785	0.25	321.8
»	1.3450	0.52	314.7
»	2.2370	0.86	312.1
20.28	1.1080	0.42	316.4

Nella soluzione di trifenilfosfato intorno alla temperatura di 50° C. lo zolfo adunque ha una grandezza molecolare che corrisponde a S₁₀.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

IODIO.

Il iodo si discioglie nel trifenilfosfato fuso con soluzione rosso bruna e fornisce abbassamenti del punto di congelamento che corrispondono all'incirca alla molecola I_2 :

$$\text{Iodio } I_2 - P. m. = 254.$$

gr. solvente	iodio %	abbassamento Δ	K
21.3662	0.4985	0.22	112
»	0.9113	0.40	111.5
»	1.507	0.69	116

Si conferma ancora una volta quanto Beckmann aveva dimostrato, che cioè non esiste una differenza della grandezza molecolare del iodio sciolto nelle soluzioni diversamente colorate, e che nei più diversi solventi I è sciolto come I_2 .

T_4 (trimetilentrinitrotetrammina).

Il nitrocomposto ottenuto dall'esametilentetrammina, la trimetilentrinitrotetrammina di Henning⁽¹⁾ venne solo recentemente introdotto nella tecnica degli esplosivi ed è preparato sotto il nome di T_4 ad Avigliana dalla Soc. Dinamite Nobel. È quasi insolubile a freddo nei comuni solventi organici e i tentativi fatti per trovare il peso molecolare col metodo crioscopico in soluzione benzolica e di acido acetico fallirono. Avendoci il prof. Michele Giua cortesemente favorito alcuni grammi dell'interessante composto abbiamo constatato che esso è abbastanza solubile nel trifenilfosfato fuso e due determinazioni crioscopiche ci fornirono i numeri seguenti:

gr. solvente	T_4 %		M (per $K = 120$)
21.0108	0.8111	0.45	272.4
»	1.77	0.87	244

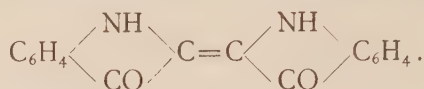
Continuando ad aggiungere sostanza il punto di congelamento non si abbassa ulteriormente: al 2% si è perciò raggiunta la massima concentrazione.

Il peso molecolare corrisponderebbe dunque alla formola trimera $(CH_2N \cdot NO_2)_3 = 222$ ed analogo risultato è stato ottenuto col metodo ebullioscopico in soluzione di acetone.

(1) HENNING, D. R. P. 104.280, (1899).

Indaco $C_{16}H_{10}O_2N_2$ - $P. m. = 262$.

Il peso molecolare dell'indaco, determinato con la densità di vapore, pressione ridotta di 60-80 mm. di mercurio, in vapore di zolfo bollente ⁽¹⁾ aveva dato numeri corrispondenti, presso a poco, alla formola semplice:



Il Vaubel ⁽²⁾ tentò di applicare il metodo crioscopico impiegando come solventi l'anilina, il fenolo, la p-toluidina, nei quali però l'indaco si scioglie assai poco a freddo, e gli abbassamenti del punto di congelamento ottenuti non superano i cinque centesimi di grado. Dai risultati forniti al Vaubel con il fenolo e la p-toluidina, questi attribuì all'indaco la formola doppia. Con il metodo ebullioscopico e con gli stessi solventi Vaubel non ottenne risultati attendibili ed egli li attribuì all'azione decomponente dell'anilina e del fenolo all'alta temperatura dell'ebollizione.

Berlinger e Scholl ⁽³⁾ impiegando il metodo ebullioscopico in soluzione di chinolina trovarono la formola semplice $C_{16}H_{10}O_2N_2$.

Data l'importanza storica dell'indaco, Beckmann e Gabel vollero controllare i risultati e dalle misure degli innalzamenti dei punti di ebollizione in anilina, p-toluidina e fenolo, ottennero risultati corrispondenti alla formola semplice. Lo stesso con il metodo crioscopico in soluzione di anilina e fenolo, mentre in p-toluidina risulterebbe confermata la formola doppia di Vaubel (peso molecolare da 500 a 550).

Si noti però che la solubilità dell'indaco in tale solvente è assai piccola, le concentrazioni delle soluzioni essendo tra 0.2 e 0.3 %, gli abbassamenti del punto di congelamento variano tra 0.018 e 0.031. Abbassamenti crioscopici così esigui non possono a meno di lasciare perplessi e impediscono di trarre delle conclusioni sicure.

Alla temperatura di fusione del trifenilfosfato l'indaco vi si discioglie fino a concentrazioni del 0.8 % e l'abbassamento crioscopico si avvicina a 40 centesimi di grado:

gr. solvente	indaco %	Δ	K (per $m = 262$)
20.7976	0.3255	0.18	144.8
»	0.7025	0.38	141.7

La grandezza molecolare dell'indaco sciolto in trifenilfosfato corrisponde dunque alla formola semplice $C_{16}H_{10}O_2N_2$.

(1) SOMMARUGA, A. 195, 302 (1879).

(2) VAUBEL, « Chem. Zeitschr. », 25, II, p. 725, (1901).

(3) BERLINGER e SCHOLL, « Ber. », 36, 3430, (1903).

Chimica (Chimica Fisiologica). — *Raffronti tra il valore alimentare ricostruttivo di alcuni legumi e quello del grano* ⁽¹⁾. Nota di V. FAMIANI e V. ZAGAMI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Abbiamo avuto occasione di esporre in precedenza altrove ⁽³⁾ i risultati di numerose ricerche dirette ad indagare l'effettivo valore alimentare dei semi di alcune leguminose (*Lathyrus sativus* L., *Cicer arietinum* L., *Ervum lens* L.) e di alcune graminacee (*Triticum vulgare* Vill., *Hordeum vulgare* L., *Zea mais* L., *Oryza sativa* L.).

Sperimentando infatti su ratti in via di accrescimento, e perciò tenendo in particolare considerazione i processi costruttivi, abbiamo potuto notare che tutti gli animali, alimentati esclusivamente con uno dei semi suddetti, hanno presentato un netto rallentamento dell'accrescimento rispetto ai controlli tenuti ad alimentazione normale (mista e variata); ed abbiamo messo in rilievo che questo fenomeno appare, senza dubbio, in modo sensibilmente più marcato e più netto negli animali alimentati con cereali che in quelli alimentati con legumi.

Indagini tendenti a svelare le cause del ritardato o ostacolato accrescimento ci hanno dato la possibilità di identificare e precisare già per alcuni dei semi studiati le deficienze qualitative che valgono a rendere conto dei risultati accennati e che riflettono costituenti e fattori notoriamente necessari per il normale svolgersi dei processi costruttivi dell'organismo. Tali deficienze si sono rilevate di natura assai più complessa nel caso dei semi di graminacee, che nel caso dei semi di leguminose, sì da giustificare le differenze osservate tra ratti alimentati con soli cereali e ratti alimentati con soli legumi.

Mentre sono in corso ricerche dirette ad estendere e completare per tutti i semi presi in considerazione questi risultati relativi ai fenomeni costruttivi, abbiamo stimato utile accertare, se — oltre che per questi ultimi — anche per fenomeni ricostruttivi, cioè per la reintegrazione del peso corporeo perduto per effetto di un digiuno più o meno spinto, i vari semi — legumi o cereali — dimostrassero ugualmente un valore diverso.

In altri termini: *a)* La ripresa del peso corporeo dopo il digiuno sarebbe avvenuta più prontamente con alimentazione a base esclusiva di legumi o con alimentazione a base esclusiva di cereali? *b)* La quantità totale di alimento necessario per riparare una determinata perdita di peso del corpo sarebbe stata uguale o differente con l'uno o con l'altro tipo di alimento? *c)* Per una determinata quantità di legumi, ovvero di cereali, elaborata si

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) V. ZAGAMI e FAMIANI, *Raffronti tra il valore alimentare di alcuni legumi e quello di alcuni cereali*. «Rendic. R. Acc. dei Lincei» 1932, vol. XV, p. 229.

sarebbe avuto un guadagno in peso corporeo uguale o differente, a parità di altre condizioni?

Finora abbiamo potuto eseguire un sufficiente numero di esperienze, confrontando il valore alimentare ricostruttivo dei semi di varie leguminose con quello del grano.

Come animale d'esperienza per queste ricerche abbiamo adoperato il Colombo, prestandosi questo animale assai bene per stabilire l'esatta quantità di alimento consumato.

Si è sperimentato su 6 Colombi, 2 giovani e 4 adulti, i quali, dopo digiuni presso a poco della stessa entità, in quanto spinti per ogni animale fino a perdita di peso corporeo quasi identica nelle diverse prove successive, sono stati rialimentati unicamente con semi di leguminose (*Lathyrus sativus* L., *Lathyrus cicera* L., *Ervum lens* L.) o con semi di *Triticum vulgare*. Generalmente sullo stesso animale sono state eseguite non meno di tre prove, in qualche caso anche cinque e sei prove successive, alternando di regola o variando i vari tipi di rialimentazione nel modo ritenuto più adatto per ottenere risultati comparabili e tali da permetterci una fondata convinzione al riguardo.

L'alimento è stato somministrato sempre per imbeccamento, regolando volta a volta la quantità in base alla capacità di consumo che ogni animale dimostrava e che veniva desunto dal maggiore o minore residuo nell'ingluvie dell'alimento precedentemente somministrato.

Si teneva esatto conto della quantità giornaliera di alimento somministrato, del numero dei giorni impiegati e della quantità totale di alimento consumato perchè l'animale ricuperasse completamente il peso perduto per effetto del digiuno. Si poteva così calcolare anche il peso medio giornalmente riacquistato dall'animale, nonchè il guadagno in peso corrispondente ad una determinata quantità di alimento. Per comodità abbiamo riferito a 100 di alimento questo ultimo valore ricavandolo dal rapporto $\frac{P. 100}{A}$, in cui P rappresenta il peso recuperato dall'animale e A la quantità di alimento consumato.

È risultato dalle nostre ricerche, come è ben dimostrato dai dati raccolti nell'annessa tabella, che in ogni caso gli animali hanno riacquistato il peso perduto per effetto del digiuno assai più prontamente quando la rialimentazione si è compiuta a base di semi di leguminose, che non quando si è compiuta a base di grano.

Gli animali n. 1 e 2, ad es., mentre nelle prove in cui la rialimentazione è stata effettuata con grano hanno impiegato in media 11 giorni per riacquistare un peso medio corrispondente rispettivamente al 17 % e al 16 % del peso iniziale precedente al digiuno, hanno impiegato invece solamente 7 giorni per recuperare un peso corrispondente al 18 % e al 19 % nelle prove in cui la rialimentazione si è effettuata a base di semi di *Ervum lens*.

N. progressivo animale	N. esperienza	Peso all'inizio del digiuno		Durata del digiuno in giorni		Peso alla fine del digiuno		Peso perduto	Peso percentuale perduto	Alimento	Durata della rialimentazione in giorni		Quantità totale alimento		Peso medio giornalmente riacquisito		Quantità media di alimento giornalmente consumata		$\frac{P \times 100}{A}$
		gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	gr.				gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	gr.	
1	1	490	7	405	85	17				Triticum vulgare Vill.	9	360	9.4	40.0	23				
	2	527	6	442	85	16				» » »	16	588	5.3	36.2	14				
	3	430	8	350	80	18				Ervum lens L.	7	280	11.4	40.0	28				
	4	460	8	375	85	18				Triticum vulgare Vill.	9	335	9.4	37.2	25				
	5	440	8	360	80	18				» » »	9	290	8.8	32.2	27				
2	1	480	6	405	75	15				Triticum vulgare Vill.	13	440	5.7	33.8	17				
	2	485	5	408	77	15				» » »	11	380	7.0	34.5	20				
	3	468	6	394	74	15				» » »	15	445	5.7	34.2	16				
	4	420	8	340	80	19				Ervum lens L.	7	220	11.4	31.1	36				
	5	435	9	356	79	18				Triticum vulgare Vill.	10	335	7.9	33.5	23				
	6	420	8	340	80	19				» » »	9	245	8.8	27.2	32				
3	1	415	8	300	115	27				Lathyrus cicera L.	9	390	12.8	43.3	29				
	2	420	9	302	118	28				» sativus L.	9	355	13.1	39.4	33				
	3	400	5	300	100	25				Triticum vulgare Vill.	15	675	6.6	45.0	14				
4	1	395	8	300	95	24				Lathyrus cicera L.	9	410	10.5	45.5	23				
	2	390	9	297	93	23				» sativus L.	8	325	11.6	40.6	28				
	3	400	6	315	85	21				Triticum vulgare Vill.	13	510	6.0	39.2	16				
5	1	525	9	425	100	19				Lathyrus sativus L.	8	410	12.5	51.2	24				
	2	505	9	412	93	18				» cicera L.	12	530	7.7	44.1	17				
	3	500	10	400	100	20				Triticum vulgare Vill.	13	555	7.6	42.7	18				
6	1	485	9	415	70	14				Lathyrus sativus L.	7	340	10.0	48.5	20				
	2	475	7	395	80	16				» cicera L.	7	333	11.4	47.5	27				
	3	450	9	370	80	17				Triticum vulgare Vill.	10	420	8.0	42.0	19				

Gli animali nn. 3, 4, 5 e 6 mentre hanno impiegato rispettivamente 15, 13, 13 e 10 giorni per ricuperare un peso corrispondente al 25 %, 21 %, 20 % e 17 % di quello iniziale precedente al digiuno, quando la rialimentazione si è effettuata esclusivamente con grano, hanno impiegato invece solamente 9, 9, 12 e 7 giorni per ricuperare un peso corrispondente al 27 %, 24 %, 18 % e 16 % quando la rialimentazione si è effettuata esclusivamente con semi di *Lathyrus cicera*, ed hanno impiegato 9, 8, 8 e 7 giorni per ricuperare un peso corrispondente al 28 %, 23 %, 19 % e 14 % quando la rialimentazione si è effettuata esclusivamente con semi di *Lathyrus sativus*.

Differente essendo stato il numero dei giorni impiegati da ogni singolo animale nelle diverse prove successive, per ricuperare pressochè la stessa percentuale di peso, a seconda che la rialimentazione si compiva con legumi o con grano, risultò di conseguenza un differente guadagno giornaliero medio del peso del corpo, e precisamente maggiore con i semi di *Lathyrus sativus*, o di *Lathyrus cicera* o di *Ervum lens* ed inferiore con il grano.

Così, ad es., mentre si è avuto un guadagno giornaliero medio nel peso del corpo di gr. 11.4 nell'animale n. 1 e n. 2 durante la rialimentazione con semi di *Ervum lens*, si è avuto di contro solamente un guadagno medio di gr. 8.2 nel colombo n. 1 e di gr. 7.1 nel colombo n. 2 quando la rialimentazione venne effettuata con grano; similmente, mentre si è avuto un guadagno giornaliero di gr. 12.8, 10.5, 7.7, 11.4 rispettivamente nell'animale n. 3, 4, 5 e 6 durante la rialimentazione con semi di *Lathyrus cicera*, e un guadagno giornaliero di gr. 13.1, 11.6, 12.5, 10.0 durante la rialimentazione con semi di *Lathyrus sativus*, si è avuto di contro negli stessi animali solamente un guadagno di gr. 6.6, 6.0, 7.6, 8.0 durante la rialimentazione con grano.

La quantità totale di alimento consumato per riacquistare un determinato identico peso corporeo è stata sensibilmente maggiore quando la rialimentazione si è compiuta esclusivamente a base di grano, che non quando si è compiuta esclusivamente a base di semi di leguminose.

Per ricuperare una media di gr. 84 e di gr. 77 di peso corporeo negli animali nn. 1 e 2 si sono dovuti impiegare in media rispettivamente gr. 393 e gr. 369 di grano, mentre per ricuperare gr. 80 di peso corporeo negli stessi animali si sono mostrati sufficienti gr. 280 nell'animale n. 1 e gr. 220 nell'animale n. 2 di semi di *Ervum lens*. Similmente, per ricuperare gr. 100 di peso corporeo nell'animale n. 3 sono occorsi gr. 675 di grano, mentre nello stesso animale sono stati sufficienti gr. 390 di *Lathyrus cicera* per ricuperare gr. 115 di peso e gr. 355 di *Lathyrus sativus* per ricuperare gr. 118 di peso; nell'animale n. 4 per ricuperare gr. 85 di peso sono occorsi gr. 510 di grano, mentre nello stesso animale sono stati sufficienti gr. 410 di *Lathyrus cicera* per ricuperare gr. 95 di peso e

gr. 325 di *Lathyrus sativus* per recuperare gr. 93 di peso. Identici raffronti possono farsi per gli animali nn. 5 e 6.

Ne risulta di conseguenza che il valore del rapporto $\frac{P. 100}{A}$, ossia il guadagno in peso del corpo dell'animale per 100 grammi di alimento assunto o consumato, è molto più alto quando l'alimento è rappresentato da semi di *Ervum lens*, *Lathyrus cicera* e *Lathyrus sativus* che non quando è rappresentato da semi di *Triticum vulgare*; esso è in media uguale a 32 per i semi di *Ervum lens* negli animali n. 1 e n. 2, mentre è in media uguale a 22 negli stessi animali per i semi di *Triticum vulgare*; è uguale a 29, 23, 17, 27 per i semi di *Lathyrus cicera*, e uguale a 33, 28, 24, 20 per i semi di *Lathyrus sativus* rispettivamente negli animali nn. 3, 4, 5 e 6, mentre è semplicemente uguale a 14, 16, 18, 19 negli stessi animali per i semi di *Triticum vulgare*.

In conclusione dai risultati esposti risultano i fatti seguenti:

1. La ripresa del peso corporeo dopo un digiuno più o meno spinto nei colombi è avvenuta più prontamente quando la rialimentazione si è compiuta a base esclusiva di semi di *Ervum lens*, *Lathyrus sativus* e *Lathyrus cicera*, che non quando si è compiuta a base esclusiva di semi di *Triticum vulgare*.

2. Per recuperare una determinata perdita percentuale di peso la quantità totale di alimento richiesta o necessaria è stata sensibilmente più elevata quando la rialimentazione si è effettuata con grano, che non quando si è effettuata con i semi delle leguminose suddette.

3. Per pari quantità (in peso) elaborate, i legumi si sono mostrati capaci di favorire i fenomeni ricostruttivi, nella rialimentazione dopo il digiuno, in grado sensibilmente maggiore del grano.

Dai dati su esposti risulta adunque, che — come avevamo avuto agio di osservare e fare rilevare pei fenomeni costruttivi — anche pei fenomeni ricostruttivi, cioè per la reintegrazione del peso corporeo dopo un digiuno più o meno spinto, i legumi esplicano un'azione più favorevole in confronto del grano. È probabile che ciò possa essere legato alle stesse deficienze qualitative o di composizione chimica, che già ci sono risultate di natura assai più complessa pei cereali, che pei legumi, come abbiamo avuto modo di rilevare altrove; ma senza addentrarci per ora in giudizi o apprezzamenti, che potrebbero essere prematuri, abbiamo voluto semplicemente qui limitarci all'esposizione obbiettiva dei nuovi fatti osservati, riservandoci di discuterli quando il nostro programma di lavoro si potrà considerare sufficientemente integrato dai risultati di altre ricerche in corso.

Mineralogia. — *Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica*⁽¹⁾. Nota di C. ANDREATTA, presentata⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

In un precedente lavoro che fu accolto nei « Rendiconti » di questa R. Accademia⁽³⁾, ho descritto un nuovo composto naturale raccolto negli scavi antichi (e ora abbandonati) della miniera Cave del Predil (Raibl) presso Tarvisio, e precisamente fra i prodotti superficiali di alterazione, in quella zona del giacimento chiamata Vitriolwand, assieme ad altri analoghi minerali secondari quali: *melanterite*, *goslarite*⁽⁴⁾, *gesso*, *idrozinclite*, ecc.

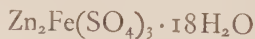
Ho dimostrato in quella Nota che il minerale, da me distinto col nome di *Bianchite*, costituisce una nuova specie ben definita sia per la costituzione chimica, sia per le proprietà ottiche, sia per il comportamento a diverse temperature. In base a varie analisi, è risultato per la bianchite una composizione prossima a:



con piccole variazioni nel rapporto $\text{ZnO} : \text{FeO}$.

Per quanto riguarda le proprietà ottiche, ho stabilito che il minerale ha birifrangenza negativa notevole, angolo degli A. O. molto piccolo, debole dispersione $\rho > v$; caratteri analoghi ai termini monoclini della famiglia dei solfati esaidrati di: Zn, Mg, Ni, Co, già noti come composti sintetici. Di questi solo l' $\text{MgSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ è noto pure come raro prodotto naturale, distinto col nome di *esaidrite*⁽⁵⁾.

Poichè del corrispondente sale di Fe non si conoscono ancora le proprietà, e dubbio è pure che lo si sia ottenuto, nè mai furono preparati composti o miscele di solfati esaidrati di Fe e Zn, non mi fu possibile stabilire se la bianchite fosse da interpretare come un sale doppio:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(3) C. ANDREATTA, *Bianchite, nuovo minerale*, « Rendic. R. Accademia dei Lincei », aprile 1930.

(4) S. MORGANTE, *Sulla goslarite della miniera di Raibl (Cave del Predil)*, « Atti dell'Accademia Sc. Veneto-Trentino-Istria », vol. XXII (1931).

(5) C. DOELTER e H. LEITMEIER, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. IV, parte II, pp. 21-22. L'esaidrite proviene da Bonaparte River, Lilloe Dis. nel Canada, dove si trova come prodotto secondario d'alterazione del giacimento. Fu studiata da vari autori (MARIGNAC, DANA, THORPE, WATTS).

secondo il risultato delle analisi, oppure come una miscela isomorfa:



con rapporto $\text{ZnO} : \text{FeO}$ molto prossimo a 2 : 1.

Per risolvere questo problema, per completare la conoscenza morfologica del nuovo minerale e anche per stabilirne le condizioni genetiche, mi riservai appunto, come è detto nella Nota sopracitata, di riprendere la questione dopo i risultati di una serie di ricerche sintetiche già intraprese.

Di questi risultati, che integrano la conoscenza del minerale bianchite, riferisco nella presente Nota.

La *sintesi della bianchite* mi riuscì, dopo molti tentativi, partendo da una soluzione contenente:

70 gr. di $\text{ZnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$

20 » » $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$

20 » » H_2SO_4 (d. = 1.84)

e facendo cristallizzare in termostato a pressione ordinaria e a temperatura di 30° C. I primi piccoli cristalli così ottenuti mi risultarono della composizione di un solfato esaidrato di Zn e Fe, con un rapporto:

$$\text{ZnO} : \text{FeO} = 1,92 : 1$$

prossimo all'analogo rapporto già dato per la bianchite naturale.

Dall'analisi chimica e ottico-cristallografica di questi cristalli e degli altri ottenuti nelle stesse condizioni di ambiente, variando gradatamente il contenuto in sali delle soluzioni di partenza, ho potuto dedurre che si tratta di una serie continua di cristalli misti, con rapporto $\text{ZnO} : \text{FeO}$ superiore a quello delle relative soluzioni sature. Nelle cristallizzazioni fin'ora eseguite, ho ottenuto, con progressione continua, termini compresi entro i limiti:

$$\text{ZnO} : \text{FeO} = 3,4 : 1$$

$$\text{ZnO} : \text{FeO} = 1,9 : 1.$$

Questi due rapporti non segnano i limiti estremi di miscibilità dei due solfati esaidrati. Con nuove ricerche tenderò poi allo scopo di raggiungere la conoscenza completa della serie, ciò che esorbita dallo scopo specifico di questa Nota.

Ho potuto altresì stabilire che diminuendo la quantità di H_2SO_4 contenuto nella soluzione di partenza, occorre aumentare la temperatura per ottenere i cristalli misti della serie esaidrata, e inversamente. Diminuendo

invece il contenuto di H_2SO_4 e mantenendo la stessa temperatura, o abbassandola, cristallizzano dalla soluzione miscele degli analoghi solfati eptaidrati.

Date le condizioni genetiche della bianchite artificiale, per avere cristalli adatti allo studio chimico, fisico e morfologico del termine più prossimo alla composizione del prodotto naturale, mi sono trovato di fronte a varie difficoltà.

Anzitutto i cristalli sono fortemente zonati e perciò hanno composizione variabilissima da zona a zona. Ho cercato di limitare questa variazione raccogliendo sempre i primi piccoli cristalli separati dalla soluzione satura. Inoltre i cristalli, ottenuti come ho detto dalla soluzione acida per H_2SO_4 alla temperatura di circa 30° , appena estratti dalla soluzione si coprono di minutissimi cristallini di miscela dei sali eptaidrati. Per questo fatto e per il potere igroscopico determinato da un velo superficiale di H_2SO_4 diluito, che non si può togliere del tutto pur asciugando i cristalli rapidamente, essi perdono quasi subito la lucentezza delle facce. Ho ridotto al minimo questo inconveniente, immergendo rapidamente e solo per un istante i cristalli estratti dalla soluzione satura, in una soluzione acquosa non acida e non satura di composizione analoga alla prima; asciugandoli poi subito con carta da filtro; conservandoli in piccoli tubetti chiusi e limitando il più possibile il tempo di esposizione all'aria, soprattutto durante le osservazioni goniometriche.

Le proprietà della miscela isomorfa $(\text{Zn}, \text{Fe})\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ di composizione prossima a quella della bianchite naturale sono le seguenti.

I cristalli hanno *colore* verdognolo chiarissimo, trasparenza e lucentezza vitrea.

Peso specifico, determinato con una soluzione di ioduro di metilene in benzolo:

$$d = 2.031$$

con variazioni di ± 0.005 dovute alla zonatura dei piccoli cristalli.

Durezza, fra 2 e 3, avvicinandosi maggiormente al 2.

Sistema di cristallizzazione: monoclinico, classe dell'ortoclasio.

Abito tabulare, secondo la base, come è mostrato dalla fig. 1.

Forme più comuni sono:

$$c\{001\}, a\{100\}, m\{110\}, o\{111\}, \sigma\{20\bar{1}\}, \gamma\{11\bar{2}\}$$

elencate in ordine di frequenza. Meno frequenti:

$$\xi\{22\bar{1}\}, \zeta\{22\bar{3}\}, \omega\{11\bar{1}\}, k\{10 \cdot 0 \cdot 9\};$$

rare:

$$r\{101\}, f\{774\}, g\{11\bar{5}\}, h\{77 \cdot 10\}.$$

Di queste forme le seguenti:

$$g\{11\bar{5}\}, f\{774\}, h\{77\cdot10\}, k\{10\cdot0\cdot9\}$$

sono nuove non solo per le miscele del tipo della bianchite, ma anche per tutto il gruppo dei solfati esaidrati di Zn, Ni, Co, Mg. La forma $r\{101\}$ è stata osservata solo nel sale di Ni e la $\zeta\{22\bar{3}\}$ è nota solo per questo sale e per il corrispondente di Co. Le altre sono forme già osservate anche nel puro solfato esaidrato di zinco.

Nella tabella seguente sono raccolte tutte le misure eseguite su numerosi cristalli.

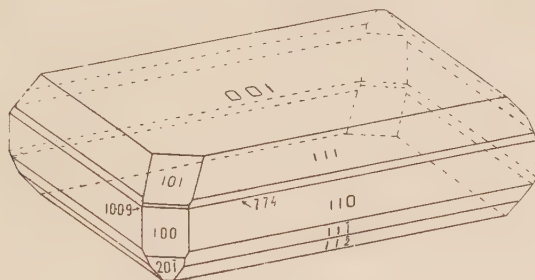


Fig. 1.

Dai valori ottenuti per gli angoli $(100)\widehat{(001)}$, $(100)\widehat{(110)}$ e $(001)\widehat{(111)}$ ho calcolato le *costanti cristallografiche* della bianchite sintetica che sono:

$$a:b:c = 1.3788:1:1.6662$$

$$\beta = 98^{\circ} 30'$$

e in base a queste ho ricalcolato i valori angolari per il confronto con le misure riportate nella tabella.

Geminati sono abbastanza comuni secondo $\{100\}$, meno frequenti secondo $\{110\}$. Più spesso però i cristalli sono riuniti in *associazioni parallele*, a contatto per la base; così formano delle pile di tavolette, che spesso vanno diminuendo di numero e di grandezza nei vari piani successivi, sì da dare l'aspetto di una piramide a gradinata all'associazione stessa.

	Angoli misurati			Angoli calcolati
	Limiti misure	N.	Media	
$a(100) c(001)$	$81^{\circ} 2' - 81^{\circ} 43'$	15	$81^{\circ} 30'$	*
$a(100) m(110)$	$53^{\circ} 34' - 53^{\circ} 52'$	16	$53^{\circ} 43' 1/2$	* *
$a(100) \sigma(20\bar{1})$	$23^{\circ} 39' - 23^{\circ} 49'$	4	$23^{\circ} 42'$	$23^{\circ} 32'$
$c(001) m(110)$	$88^{\circ} 44' - 85^{\circ} 8'$	22	$84^{\circ} 59'$	$84^{\circ} 59'$
$c(001) \sigma(201)$	$74^{\circ} 54' - 75^{\circ} 44'$	7	$75^{\circ} 7'$	$74^{\circ} 58'$
$c(001) o(111)$	$59^{\circ} 40' - 60^{\circ} 7'$	14	$59^{\circ} 55'$	*
$c(001) y(\bar{1}12)$	$48^{\circ} 11' - 48^{\circ} 30'$	10	$48^{\circ} 21'$	$48^{\circ} 11'$
$c(001) \omega(\bar{1}\bar{1}1)$	$68^{\circ} 4' - 68^{\circ} 34'$	4	$68^{\circ} 17'$	$68^{\circ} 2'$
$c(001) \xi(\bar{2}21)$	$80^{\circ} 55' - 81^{\circ} 27'$	5	$80^{\circ} 59'$	$81^{\circ} 2'$
$c(001) k(10 \cdot 0 \cdot 9)$	$47^{\circ} 46' - 48^{\circ} 22'$	4	$48^{\circ} 1'$	$47^{\circ} 57'$
$c(001) f(774)$	$69^{\circ} 58'$	1	$69^{\circ} 58'$	$70^{\circ} 15'$
$c(001) g(\bar{1}15)$	$22^{\circ} 44'$	1	$22^{\circ} 44'$	$22^{\circ} 54'$
$c(001) \zeta(\bar{2}23)$	$57^{\circ} 2' - 57^{\circ} 14'$	4	$57^{\circ} 8'$	$57^{\circ} 2'$
$m(110) m(\bar{1}10)$	$72^{\circ} 21' - 72^{\circ} 43'$	8	$72^{\circ} 28'$	$72^{\circ} 32'$
$m(110) y(\bar{1}12)$	$73^{\circ} 1'$	1	$73^{\circ} 1'$	$73^{\circ} 36'$
$y(11\bar{2}) y(1\bar{1}2)$	$74^{\circ} 25'$	1	$74^{\circ} 25'$	$74^{\circ} 10'$
$c(001) h(7 \cdot 7 \cdot 10)$	$51^{\circ} 43'$	1	$51^{\circ} 43'$	$51^{\circ} 43'$
$c(001) r(101)$	$45^{\circ} 30'$	1	$45^{\circ} 30'$	$45^{\circ} 25'$

Proprietà ottiche: indici di rifrazione per la luce gialla del Na, determinati col metodo della linea di Becke:

$$\alpha = 1.462$$

$$1.489 < \beta < 1.490$$

$$\gamma = 1.490.$$

Angolo degli assi ottici alquanto variabile, per la zonatura, con un massimo osservato di $2E = 20^{\circ}$. Al tavolino U. ho eseguito diverse misure di $2V$ usando cristalli molto tabulari, sottili, immersi in essenza d eucalipto: ottenni un massimo

$$2V = 15^{\circ} - 16^{\circ}.$$

Dispersione debole $\rho > \nu$.

Segno ottico negativo.

Per quanto riguarda l'orientazione ottica del minerale, al microscopio si notano estinzioni secondo le diagonali della base e piano degli A. O. parallelo al piano di simmetria. Un asse ottico emerge al limite del campo, verso la $(\bar{2}01)$. Al tavolino U. ho determinato che la bisettrice acuta α forma con la normale alla base un angolo di $36^\circ-37^\circ$. Si deduce quindi, ricordando che l'angolo $(001)(100) = 81^\circ 30'$, che l'asse z forma con la bisettrice acuta negativa un angolo medio di

$$z : \alpha = 26^\circ$$

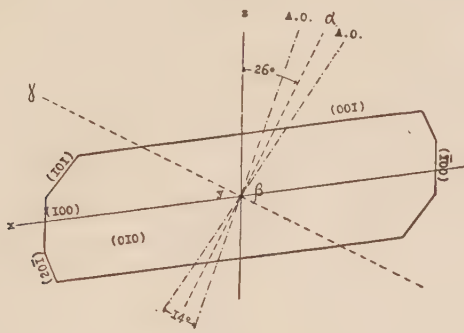


Fig. 2.

la bisettrice acuta cioè (v. fig. 2), esce quasi perpendicolarmente da una faccia di simbolo $(\bar{1}02)$, poichè questa farebbe con la base un angolo calcolato con le costanti da me date, di

$$(001)(\bar{1}02) = 33^\circ 18'.$$

Nella tabella seguente ho raccolto i valori delle costanti morfologiche e fisiche delle bianchite sintetica e naturale accanto a quelle dei solfati esaidrati monoclini di Zn, Ni, Co e Mg, già noti ⁽¹⁾. Da tutto quanto ho esposto e da quanto risulta sinteticamente dalla tabella stessa, si può quindi concludere: *il minerale bianchite appartiene alla famiglia dei solfati esaidrati monoclini di metalli bivalenti*, e più precisamente fa parte della serie isomorfa $\text{ZnSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, $\text{FeSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, della quale il secondo termine puro non si è ancora ottenuto in modo sicuro. La formola quindi della bianchite è:



con un rapporto fra ZnO e FeO molto prossimo a 2:1.

Per analogia con le condizioni in cui si è realizzata la sintesi del minerale, anche la bianchite naturale dovrebbe essersi formata da soluzioni di

(1) Tutti questi dati furono presi da P. GROTH, *Chemische Kristallographie*, parte II, pp. 422 e segg., e da A. N. WINCHELL, *The microscopic characters of artificial inorganic solid substances or artificial minerals*, New York, 1931.

	Bianchite naturale	Bianchite sintetica	ZnSO ₄ ·6H ₂ O	NiSO ₄ ·6H ₂ O	CoSO ₄ ·6H ₂ O	MgSO ₄ ·6H ₂ O
Peso specifico. . .	—	2.031	2.056-72	2.036	2.000	1.734
Abito	—	tabulare	tabulare	tabulare	tabulare	tabulare
Angolo β	—	98° 30'	98° 12'	98° 17'	98° 43'	98° 34'
a/b	—	1.3788	1.3847	1.3723	1.3959	1.4039
c/b	—	1.6662	1.6758	1.6763	1.6903	1.6683
Orientazione ottica	—	$b = \beta$ α quasi \perp ($\bar{1}02$) $c : \alpha = 26^\circ$	$b = \beta$ α quasi \perp ($\bar{1}02$)	$b = \beta$ α quasi \perp ($\bar{1}02$)	$b = \beta$ α quasi \perp ($\bar{1}02$)	$b = \beta$ α quasi \perp ($\bar{1}02$) $c : \alpha = 25^\circ$
Indice rifrazione α	1.465	1.462	—	—	—	1.438
» β	fra 1.494 e 1.495	fra 1.489 e 1.490	—	—	—	1.463
» γ	1.495	1.490	—	—	—	1.465
Angolo Assi Ottici	$2V \approx 10^\circ-13^\circ 26'$	$2V \approx 15^\circ-16^\circ$	$2H$ circa 3°	$2H = 19^\circ 25'$	$2H = 8^\circ$	$2H = 28^\circ$
Segno ottico . . .	negativo	negativo	negativo	negativo	negativo	negativo
Dispersione	$\rho > v$	$\rho > v$	$\rho > v$	$\rho > v$	$\rho > v$	$\rho > v$

solfato di Zn e Fe acide per acido solforico, alla temperatura di almeno 30° C. Volendo pensare ad una acidità delle soluzioni inferiore a quella da me usata per la sintesi, per avvicinarci a condizioni naturali più probabili, si deve ammettere una temperatura un po' più alta dei 30°. È facile immaginare che queste varie condizioni di genesi si siano realizzate nella località della miniera zincifera di Raibl, dove fu raccolta la bianchite. Infatti è noto che il processo di alterazione della pirite nel cappello dei giacimenti, origina solfato ferroso, ferrico e acido solforico, e che l'azione ossidante del solfato ferrico trasforma la blenda in solfato di zinco. D'altra parte la soglia della grotta dove la bianchite fu raccolta, è esposta a mezzogiorno e battuta in pieno dal sole.

Mi riservo di completare queste ricerche sintetiche sulla serie isomorfa monoclina dei solfati esaidrati di Zn e Fe per studiare la variazione delle proprietà al variare della composizione nei diversi termini; stabilire i limiti di miscibilità e le condizioni estreme di genesi delle miscele esaidrate; raggiungere eventualmente la sintesi dell' $\text{FeSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ o determinarne indirettamente le proprietà fisico-cristallografiche.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1932 (Anno X).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Meccanica. — *La stabilità nel volo strumentale.* Nota⁽¹⁾ del
Corrisp. G. A. CROCCO.

Intenderemo con l'espressione *volo strumentale* il volo di un motovelivolo condotto dal pilota col solo ausilio degli strumenti di bordo e senza riferimento all'orizzonte.

Tale volo fu già chiamato *cieco* o *nella nebbia*⁽²⁾; ma l'apposizione *strumentale* è più opportuna perchè precisa il metodo di pilotaggio, senza limitarlo a speciali condizioni esterne. In particolare quindi può anche aver luogo con la previa visibilità dell'orizzonte.

Svolgeremo in questa Nota un concetto nuovo (per lo meno a nostra conoscenza) riguardante la *stabilità* in tal genere di volo.

Un accenno a questa stabilità fu già svolto in questi « Rendiconti »⁽³⁾ ma con argomentazioni non soddisfacenti. Esse vanno ora sostituite con quelle che formano argomento della presente esposizione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1932.

(2) CROCCO, *Considerazioni sulla guida dell'aeroplano nella nebbia*, questi « Rendiconti », vol. IX, gennaio 1929.

(3) N. cit., p. 27: in nota.

*
* *

La *stabilità* del moto di un aeromobile è stata sinora esaminata supponendo i comandi fermi nella posizione corrispondente ad un particolare moto uniforme (sia rettilineo che curvilineo) e ricercando matematicamente l'andamento di una *perturbazione* introdotta nei parametri di un tal moto uniforme, senza che intervenga il pilota a correggerla.

Se la perturbazione tende ad annullarsi spontaneamente l'aeromobile si suol dire *intrinsecamente stabile*.

Questo metodo di esame perde invece ogni significato quando il pilota intervenga continuamente a correggere la perturbazione; come generalmente ha luogo nel volo ordinario nel quale un abile pilota può condurre moto-velivoli, anche intrinsecamente instabili. Se non che non è possibile tenere conto in modo matematico di questo intervento poichè esso rimane guidato dai riflessi psicologici del pilota.

La questione si presenta sotto diverso aspetto nel *volo strumentale*. In tale genere di volo, quale innanzi definito, i riflessi del pilota sono provocati da strumenti le cui indicazioni sono precisabili matematicamente. Queste indicazioni sono legate per ciascun strumento alle variazioni di uno o più parametri del volo: ed il pilota, seguendole ed operando su determinati comandi, modifica o mantiene costante quel parametro, se trattasi di uno solo, o una precisabile relazione tra quei parametri, se trattasi di più.

Se pertanto con elegante artificio si considera il risultato dell'intervento del pilota come una condizione implicita nello strumento stesso, si può ricavare per ogni strumento di volo, adoperato nel modo su descritto, una particolare *equazione strumentale*, precisabile in modo matematico, della quale occorrè tener conto nell'esame della stabilità.

*
* *

Così ad esempio se nel volo strumentale il pilota, basandosi su un *indicatore di velocità* [1], mantiene comunque *costante la velocità propria*, V_0 , del velivolo rispetto all'aria, (anemometro a coppa o a mulinello) l'equazione strumentale corrispondente sarà $V_0 = \text{costante}$; mentre se mantiene costante la *velocità indicata* (anemometro a tubo di Pitot o tubo di Venturi, o meglio *pneumometro* [2]) l'equazione strumentale nel moto uniforme sarà $\delta V_0^2 = \text{costante}$; ove δ indichi la densità relativa dell'aria alla quota di navigazione.

Così l'equazione strumentale del *tachimetro* [3] che regola i giri del propulsore sarà $n_0 = \text{costante}$ (non esiste ancora un pratico strumento che dia i *giri indicati*).

In modo analogo si potranno scrivere le equazioni, nel moto uniforme, degli strumenti che regolano i tre assetti del velivolo: longitudinale, laterale

direzionale. Per riguardo agli *assi di rotazione* cui questi tre assetti si riferiscono, e cioè y, x, z , chiameremo i tre gruppi di strumenti corrispondenti B, A, C.

L'*assetto longitudinale* del velivolo può venir regolato dai seguenti strumenti (Gruppo B).

[2] *Pneumometro* o indicatore di velocità, quale già accennato, basato sulla velocità propria.

[4] *Altimetro*, basato sulla coordinata verticale del baricentro del mobile. Ammettendo la costanza della situazione barometrica ambiente, e chiamando con β_0 l'angolo della tangente alla traiettoria con l'orizzonte, l'equazione strumentale dell'altimetro potrà scriversi $\beta_0 = \text{costante}$.

[5] *Indicatore di salita* o variometro, basato sulla derivata della quota rispetto al tempo, cioè sulla componente verticale della velocità. Equazione: $V_0 \beta_0 = \text{costante}$.

[6] *Accelerometro*, basato sulla componente dell'accelerazione del moto lungo l'asse z . La sua equazione strumentale potrà esprimere, nelle variabili scelte a rappresentare il moto, la costanza di questa accelerazione.

[7] *Inclinometro longitudinale* (a pendolo, a bolla, a pallina pesante, a liquido), basato sulla componente dell'accelerazione totale lungo l'asse x . Esso risente pertanto non solo la componente dell'accelerazione del moto, ma anche quella della gravità.

Detta g quest'ultima accelerazione, ϑ_0 e β_0 gli angoli dell'asse x e della tangente alla traiettoria con l'orizzonte, l'equazione dell'inclinometro, se si mantiene costante una sua indicazione, sarà, con molta approssimazione

$$g \sin \vartheta_0 + \frac{dV_0}{dt} \cos (\vartheta_0 - \beta_0) = \text{costante}$$

ed interesserà tre parametri del moto.

[8] *Indicatore di assetto longitudinale*, o indicatore di zenith, a giroscopio libero pendolare basato sull'inerzia giroscopica. La sua equazione ideale sarà $\vartheta_0 = \text{costante}$; ma la sua equazione reale risulterà più complessa, giacchè l'asse non si mantiene verticale, ma precessiona ad ogni disturbo.

Sono in preparazione strumenti composti di [7] e [8].

[9] *Indicatore di volta*, così chiamando uno strumento capace di indicare la velocità di rotazione attorno all'asse laterale y . È a *giroscopio vincolato*, come l'indicatore di virata [18] e la sua equazione strumentale può scriversi, se la rotazione del giroscopio è indipendente da altre variabili: $q_0 = \text{costante}$.

[10] *Indicatore di incidenza*, basato sulla direzione del flusso d'aria relativo in un punto opportunamente scelto del velivolo. La sua equazione sarà, idealmente, $\varphi_0 = \vartheta_0 - \beta_0 = \text{costante}$.

Non esistono oggi strumenti basati sulle accelerazioni angolari.

L'*assetto laterale* del velivolo può venir disciplinato dai seguenti strumenti (gruppo A).

[11] *Indicatore di deriva* (relativa) o indicatore di *dissimetria*, basato sulla componente della velocità relativa lungo l'asse y . Detto α_0 l'angolo della velocità col piano di simmetria, si ricaverà l'equazione $\alpha_0 = \text{costante}$.

[12] *Indicatore di sbandamento*, o inclinometro trasversale, basato sulla componente dell'accelerazione totale lungo l'asse y . Risente pertanto quella della gravità e quella del moto. Chiamando con Ω_0 la velocità angolare di una virata del velivolo, e detto γ_0 l'angolo di rollio corrispondente, si avrà l'equazione strumentale, particolare:

$$\Omega_0 V_0 \cos \gamma_0 - g \sin \gamma_0 = 0,$$

interessante tre parametri e che dà la cosiddetta *virata corretta*.

[13] *Indicatore di orizzonte* (laterale), strumento a giroscopio libero pendolare, come [8], che dovrebbe rispondere alla equazione ideale $\gamma_0 = \text{costante}$; ma in realtà, essendo un pendolo a grande inerzia, ha una equazione più complessa, a causa della precessione.

Sono in preparazione strumenti composti di [12] e [13].

[14] *Indicatore di rollio*, strumento a giroscopio vincolato, del tipo dell'indicatore di virata [18], che risente e indica la velocità angolare della rotazione attorno all'asse x . Equazione: $p_0 = \text{costante}$; o meglio $p_0 = \text{zero}$.

Non esistono strumenti basati sull'accelerazione angolare.

L'*assetto direzionale* può venire disciplinato dai seguenti strumenti (gruppo C).

[15] *Indicatore di deriva* (assoluta), basato sul moto laterale rispetto al suolo o rispetto al campo magnetico terrestre. Non ancora di uso corrente.

[16] *Bussola*, classico strumento, che chiamando con ζ_0 l'azimut del velivolo, ossia l'angolo del suo asse x con una direzione orizzontale, dovrebbe rispondere alla equazione strumentale *ideale* $\zeta_0 = \text{costante}$. In realtà le indicazioni della bussola sono più complesse, giacchè l'ago risente l'inclinazione magnetica; ed in virata e con angolo di rollio, perdono ogni regolarità⁽¹⁾.

[17] *Indicatore di azimut*, a giroscopio libero non pendolare, che entro i limiti di libertà, risponde assai bene alla equazione $\zeta_0 = \text{costante}$.

[18] *Indicatore di virata*, a giroscopio vincolato; che indica la velocità di rotazione attorno all'asse z . Se il giroscopio è mosso indipendentemente da altre variabili, l'equazione strumentale è $r_0 = \text{costante}$; se la velocità di rotazione è comunque proporzionale a V_0 , l'equazione sarà invece $V_0 r_0 = \text{costante}$ ⁽²⁾.

(1) Le irregolarità della bussola in virata sono state da me recentemente precisate alla Sezione Strumenti del Min. dell'Aeronautica, che ne ha tracciato le curve in data 6 agosto 1932.

(2) Vedi Nota cit., p. 29.

Passando dal moto uniforme, che si suppone comunque preesistente e definito da *sei* dei parametri suaccennati, per esempio $V_0, \varphi_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_0, r_0^{(1)}$; al moto *perturbato*, definito da *sei* perturbazioni assai piccole $u, \varphi, \beta, \gamma, \alpha, r$; supporremo che il pilota operi istante per istante sui comandi soddisfacendo in modo continuo alle equazioni degli strumenti scelti per il volo strumentale.

Egli modificherà così facendo le perturbazioni stesse mantenendole tra loro in determinate relazioni, per cui dalle equazioni innanzi elencate nascerà per ciascun strumento la sua *equazione strumentale nel moto perturbato*, che avrà l'espressione generica

$$f(u, \varphi, \beta, \gamma, \alpha, r) = \text{zero};$$

e nella quale le variabili potranno anche ridursi ad una sola per ciascun strumento.

Ci riserviamo in una prossima Memoria la precisazione di queste equazioni e la loro particolare introduzione nello studio della stabilità.

*
* *

Qui, conservando alle equazioni strumentali la loro espressione generica, supporremo ora di avere scelto l'insieme degli strumenti di volo *in modo che a ciascun strumento corrisponda un determinato comando*.

In tale ipotesi, poichè i comandi in un motovelivolo, sono fondamentalmente quattro, e cioè *motore, equilibratore, alettoni, timone*; così quattro saranno gli istrumenti necessari al volo strumentale. Uno di essi tuttavia, e cioè quello relativo al motore, si supporrà osservato solo in modo *discontinuo*, e quindi non avrà parte nello studio della stabilità. In altri termini durante il volo strumentale si supporrà che il pilota tenga fissa l'ammisione del gas al motore secondo le esigenze del volo o della manovra che sta compiendo, e operi soltanto sui tre comandi, che regolano i tre assetti.

Dovremo perciò tener conto soltanto di tre equazioni strumentali, corrispondenti ai tre strumenti scelti, uno per ciascun comando: tenendo presente che, nella fatta ipotesi, gli istrumenti elencati in ciascuno dei tre gruppi A, B, C sono tra loro generalmente *incompatibili*, dal punto di vista matematico, non potendosi con un sol comando soddisfare a due condizioni. Per altro l'insieme dei *tre* strumenti occorrenti al volo strumentale potrà venir formato con *uno qualsiasi di ciascun gruppo*.

Dalle precedenti considerazioni scaturisce il compito che assumono le equazioni strumentali nello studio della stabilità.

Si suppone infatti che i tre assetti del velivolo siano regolati, individualmente, dai tre strumenti scelti; ossia che il pilota, attraverso le indi-

(1) Adottiamo qui gli stessi simboli dei nostri lavori precedenti. (*Problemi aeronautici*: Note XI e XIV).

cazioni di ciascuno di questi tre strumenti vincoli e disciplini, in modo *univoco* e *continuo*, il conseguente movimento angolare del velivolo attorno all'asse cui si riferisce il comando: asse y per l'equilibratore (gruppo B); asse x per gli alettoni (gruppo A); asse z per il timone (gruppo C).

Così operando i movimenti angolari attorno ai tre assi rimangono vincolati ed obbligati dal pilota, *istante per istante*, a quei valori che permettono di soddisfare alla corrispondente equazione strumentale; e perdono quindi ogni significato le tre equazioni di Eulero che nello studio della stabilità intrinseca disciplinano i detti movimenti angolari.

Ne segue che nello studio della stabilità nel volo strumentale *a ciascuna equazione di Eulero va ora sostituita la corrispondente equazione strumentale del moto perturbato*.

Questo criterio, che consente un fecondo e semplice esame del problema, poichè la sua trattazione matematica diviene rudimentale, appariva nebulosamente fin dalla nostra Nota del 1929 ⁽¹⁾ là ove si considera l'incompatibilità delle equazioni di Eulero con quelle derivanti dalla virata corretta.

Qui il criterio viene precisato e reso metodico. Non si tratta di incompatibilità, ma di *sostituzione* di una equazione ad un'altra.

Secondo tale criterio, che deriva dalla ipotesi dianzi enunciata, *il problema della stabilità nel volo strumentale viene ad essere definito dalle tre equazioni concernenti il moto perturbato del baricentro; e dalle tre equazioni strumentali che regolano il moto perturbato attorno al baricentro*.

*
* *

Poichè in definitiva la sostituzione delle equazioni strumentali alle equazioni di Eulero risulta complessiva, senza che vi rimanga traccia del comando particolare cui ciascuna equazione si riferisce, ne segue che se le indicazioni di un dato strumento possono venire osservate con comandi diversi da quelli scelti, la trattazione della stabilità non ne rimane variata.

Ora nel fatto mentre gli strumenti del gruppo B sono legati unicamente all'equilibratore, gli strumenti dei gruppi A e C possono venire connessi indifferente cogli alettoni o col timone.

Ne segue che, quali che siano gli strumenti scelti, alettoni e timone sono *invertibili* nel volo strumentale, senza nocimento della stabilità.

Ciò consente, dal punto di vista matematico, di allargare il principio della *determinazione* dei comandi che ci ha condotto a questi risultati. Non occorre cioè che le indicazioni di un dato strumento siano osservate mediante un dato comando ed uno solo: ma basta che attraverso tali indicazioni, quali che siano i comandi adoperati, anche promiscuamente, *siano* in modo continuo *vincolati i tre assetti* del velivolo sì che essi non dipendano

(1) N. cit., p. 28, rigo 28.

più dalle equazioni di Eulero. Se invece si lascia libero anche ad intervalli uno di questi assetti, in tal caso interviene la corrispondente equazione di Eulero nella trattazione della stabilità. E si dimostra che entro certi limiti ciò è possibile cioè che la stabilità può venire assicurata, idealmente anche da due soli strumenti.

L'indeterminazione dei comandi nel pratico volo strumentale è tuttavia pericolosa poichè manca al pilota un criterio *sintetico* qualsiasi per eseguirla correttamente, come avviene invece nel volo ordinario. Il volo strumentale è di sua natura *analitico* e quindi, dal punto di vista esecutivo, il solo principio di determinazione può costituire base didattica precisa e sicura.

Esso è stato infatti seguito con ottimi risultati nella Scuola Italiana di allenamento da noi impostata sin dal 1929 ⁽¹⁾.

Riserbiamo alla prossima Memoria l'applicazione concreta delle considerazioni esposte e l'esame teorico della stabilità nel volo strumentale per ciascun possibile insieme di strumenti indicatori. Escludendo [1], [3], [6], [15], [16] e adottando il principio di determinazione, risultano da esaminare *cinquantasei* combinazioni.

Astronomia (Meccanica celeste). — Alcuni teoremi sul problema dei due corpi di masse decrescenti. Nota ⁽²⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. La nostra ultima Nota sopra l'incremento dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse decrescenti ⁽³⁾, ha destato un interesse di cui siamo veramente lieti. Come è noto, altissime autorità scientifiche come Poincaré ⁽⁴⁾ e Jeans ⁽⁵⁾ avevano creduto che l'eccentricità dell'orbita restasse, presso a poco, inalterata quando la massa dei due astri, che compongono un sistema binario, varia in modo lento: p. es. per trasformazione della materia in energia. E le stesse conclusioni sembravano suggerite dal metodo degli « invarianti adiabatici ».

Al contrario di tutto ciò, nella ultima Nota, noi abbiamo rigorosamente dimostrato che l'eccentricità non solo può crescere, ma può anche tendere all'infinito, anche in casi in cui la massa del sistema varia in modo lento a piacere.

Il risultato si spiega notando che le dimostrazioni del Poincaré e del Jeans sono soltanto approssimate e quindi valevoli solo quando il tempo non su-

(1) A. CROCCO, *La sicurezza del volo nella nebbia*, « Rivista Aeronautica », anno V, ottobre 1929.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1932.

(3) Cfr. « Rend. Lincei », 1932, sem. 1^o, fasc. 9.

(4) Cfr. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, 2^a ed., Paris, Hermann, pp. 78 e ss.

(5) Cfr. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge, University Press, p. 291.

pera certi limiti, mentre il metodo degli « invarianti adiabatici », come ci ha comunicato ora il prof. Levi-Civita in una Nota che sarà inserita su questi « Rendiconti », è applicabile solo con alcune limitazioni che non sempre si verificano nel problema dei due corpi di masse variabili.

Vogliamo ora andare innanzi e dare nuovi teoremi in proposito, fondandoci sempre su dimostrazioni assolutamente rigorose.

2. Per non costringere il lettore a ricorrere continuamente alla nostra precedente Nota, ricordiamo che indicando con m la massa del sistema — che supporremo funzione decrescente del tempo e tendente a zero per t tendente ad ∞ — e scegliendo le unità di misura in modo da rendere eguali ad 1 il coefficiente attrattivo f e la costante delle aree c , le equazioni del moto relativo di uno dei due corpi rispetto all'altro (p. es. del satellite intorno all'astro principale), sono:

$$(1) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1$$

$$(2) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r^3} - \frac{m}{r^2}$$

dove r e ϑ indicano, al solito, il raggio vettore e l'angolo di posizione e t il tempo.

Vedemmo pure che il parametro della conica istantanea descritta da uno dei due corpi intorno all'altro — p. es. dal satellite intorno all'astro principale — è eguale all'inverso della massa, onde l'equazione della detta conica istantanea può scriversi sotto la forma:

$$(3) \quad \frac{1}{r} = m [1 + e \cos (\vartheta - \omega)]$$

dove però l'eccentricità e e la posizione del periastro ω variano col tempo.

Inoltre, per facilitare le ricerche, diamo anzitutto il seguente lemma, benchè esso possa sembrare quasi evidente.

LEMMA: *Se in un istante qualsiasi t_1 , l'eccentricità dell'orbita istantanea raggiunge un valore E maggiore od eguale ad 1, allora ϑ tende ad un limite finito Θ , mentre r tende ad ∞ , per t tendente ad ∞ .*

Dimostrazione. — Secondo l'ipotesi, l'orbita istantanea nel tempo t_1 sarà un'iperbole con eccentricità E . Ora — essendo la massa funzione decrescente del tempo — per un teorema da noi dimostrato ⁽¹⁾, da t_1 in poi il satellite si muoverà all'esterno di questa iperbole rispetto al fuoco e non potrà quindi più compiere nessuna ulteriore rivoluzione intorno all'astro principale. Ne segue che essendo l'angolo ϑ , per la (1), funzione sempre crescente del

(1) Cfr. ARMELLINI, « Rend. Lincei », 1925, sem. 1°, fasc. 11.

tempo e non potendo aumentare indefinitamente, esso tenderà ad un limite finito Θ , mentre la derivata $\frac{d\vartheta}{dt}$ — che deve conservarsi sempre positiva per la (1) — tenderà necessariamente a zero. La (1) mostra allora che r tende ad ∞ .

Ciò posto, dimostriamo i seguenti teoremi:

3. TEOREMA I: *Se la massa m del sistema tende a zero per t tendente ad ∞ , il raggio vettore r tende sempre ad ∞ per t tendente ad ∞ .*

Dimostrazione. — Per dimostrare il teorema, osserviamo che sopra l'eccentricità e possono farsi le seguenti ipotesi:

1) L'eccentricità e si mantiene sempre inferiore ad 1, per qualunque valore finito del tempo;

2) oppure l'eccentricità e in un certo istante t_1 raggiunge un valore E eguale, o maggiore, di 1.

Ora:

1) Nella prima ipotesi, la quantità tra parentesi nella (3) si mantiene sempre finita ed anzi compresa tra 0 e 2, mentre il fattore esterno m tende a zero; dunque $\frac{1}{r}$ tenderà a zero e quindi r ad ∞ .

2) Nella seconda ipotesi il teorema risulta evidente, per il lemma ora dimostrato.

4. TEOREMA II: *Se, tendendo t ad ∞ , m tende a zero di ordine superiore ad un mezzo, allora qualunque siano le condizioni iniziali, il satellite non può compiere infinite rivoluzioni intorno all'astro principale. In altre parole, quando t tende ad ∞ , l'angolo di posizione ϑ tenderà ad un limite finito Θ .*

Dimostrazione. — Possiamo anche qui procedere come nel teorema precedente e cioè:

1) Se l'eccentricità si mantiene sempre inferiore ad 1, le due equazioni (1) e (3) ci danno:

$$(4) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \frac{dt}{r^2} = \vartheta_0 + \int_0^t m^2 [1 + e \cos(\vartheta - \omega)]^2 dt$$

dove l'integrale è certamente convergente perchè, tendendo t ad ∞ , il fattore m^2 tende a zero di ordine superiore al primo mentre la quantità tra parentesi è sempre compresa tra 0 e 4.

2) Se l'eccentricità in un dato istante t_2 raggiunge un valore E eguale, o superiore ad 1, il teorema è evidente⁽¹⁾ per il lemma ora dimostrato.

(1) In altra Nota studieremo il caso limite in cui m tenda a zero di ordine $\frac{1}{2}$.

5. **TEOREMA III:** *Se, tendendo t ad ∞ , m tende a zero di ordine superiore al primo, allora, qualunque siano le condizioni iniziali, l'eccentricità e tende necessariamente ad ∞ .*

Dimostrazione. — Calcoliamoci ⁽¹⁾ anzitutto l'incremento che subisce r quando l'angolo di posizione ϑ aumenta di una quantità infinitesima $d\vartheta$. A tale scopo, poichè la (3) rappresenta l'equazione dell'orbita istantanea ⁽²⁾, per noti lemmi di Meccanica Celeste, basterà derivare r rispetto ϑ considerando come costanti i parametri m , e , ω . Avremo dunque, invertendo e derivando la (3),

$$(5) \quad \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{e \sin(\vartheta - \omega)}{m[1 + e \cos(\vartheta - \omega)]^2} = mr^2 e \sin(\vartheta - \omega)$$

e quindi, tenendo presente la (1):

$$(6) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = me \sin(\vartheta - \omega).$$

In conseguenza, integrando, risulta

$$(7) \quad r = r_0 + \int_0^t \frac{dr}{dt} dt = r_0 + \int_0^t me \sin(\vartheta - \omega) dt$$

dove m , e , ϑ , ω sono tutte funzioni del tempo t .

Ora supponiamo, se è possibile, che l'eccentricità si conservi sempre finita e minore di un numero positivo qualsiasi k . Avremo allora:

$$(8) \quad \left| \int_0^t me \sin(\vartheta - \omega) dt \right| < k \int_0^t m dt.$$

(1) In altra Nota studieremo il caso limite in cui m tenda a zero di primo ordine.

(2) Per dimostrare che la (3) rappresenta l'equazione dell'orbita istantanea, basta tener presente che nella precedente Nota (ARMELLINI, « Rend. Lincei », XV, sem. 1°, fasc. 9 (1932)) abbiamo posto

$$(1) \quad u = \frac{1}{r} = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta$$

dove A e B indicavano funzioni di ϑ soddisfacenti alla relazione (cfr. equazioni (5) e (6) della citata Nota):

$$\frac{dA}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{dB}{d\vartheta} \sin \vartheta = 0.$$

Ne segue che si ha:

$$(3) \quad \frac{du}{d\vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}$$

indicando col simbolo $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ le derivate rispetto a ϑ eseguite considerando A e B come costanti.

Ma, poichè m si annulla di ordine superiore al primo quando t tende ad ∞ , l'integrale al secondo membro della (8) tenderà ad un limite finito e positivo (essendo m sempre positiva) quando t tende ad ∞ ; in conseguenza la (7) ci mostra che r non può tendere ad ∞ quando t tende ad ∞ , ciò che è contrario all'enunciato del teorema I.

Dobbiamo dunque concludere che l'ipotesi fatta è assurda e cioè che l'eccentricità non può rimanere sempre inferiore ad un numero qualsiasi; in altre parole, dobbiamo concludere che esiste un istante t_1 in cui essa assume effettivamente il valore k . Ora, nella precedente Nota, abbiamo dimostrato che se l'eccentricità, in un dato istante, raggiunge un valore eguale o superiore ad 1, essa cresce continuamente da quell'istante in poi e tende ad ∞ per t tendente ad ∞ . Il nostro teorema risulta dunque completamente dimostrato.

6. *Applicazione ai sistemi stellari binari.* — Come è noto, l'Astronomia Siderale moderna, con argomenti molto probativi, ritiene che la massa delle stelle vada lentamente diminuendo per trasformazione della materia in energia. Non sappiamo con quale legge avvenga questa trasformazione, ma è logico supporre che, in ogni istante, la quantità di materia che si trasforma sia proporzionale alla massa dell'astro. Avremo dunque:

$$(9) \quad \frac{dm}{dt} = -\lambda m$$

dove λ indica un fattore positivo che, approssimativamente, riterremo costante sebbene in realtà possa dipendere dalla temperatura, dalla pressione, dalla natura chimica dell'elemento ecc.

Avremo allora integrando:

$$(10) \quad m = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

la quale ci dice che, quando t tende ad ∞ , la massa m tende a zero di ordine infinito.

In conseguenza per i sistemi stellari binari sono validi tutti e tre i teoremi ora dimostrati e possiamo quindi affermare che:

« Quando un sistema binario invecchia l'orbita relativa si trasforma sempre in iperbolica con eccentricità crescente all'infinito ».

Questa conclusione, contraria a quanto si credeva fino ad oggi sull'autorità di Jeans, Poincaré, ecc. modifica le idee correnti sopra la genesi dei sistemi binari e s'accorda completamente con le osservazioni, le quali mostrano che i sistemi invecchiati hanno generalmente massa minore ed eccentricità maggiore. Ben inteso, ciò non toglie che anche altre cause possano concorrere ad aumentare l'eccentricità dei sistemi binari invecchiati: p. es. perturbazioni provenienti da astri eventualmente passati in vicinanza ecc.

Fisica. — *Su di una nuova esperienza fotoelettrica.* Nota⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA.

Ricercando qualche nuovo aspetto del classico fenomeno fotoelettrico, della emissione, cioè, di elettroni da parte dei metalli sotto l'azione della luce, ho riscontrato un fatto la cui spiegazione non appare facile, qualora ci si voglia appoggiare esclusivamente ai fenomeni sinora conosciuti. Sottili lamine o pellicole metalliche, possibilmente semitrasparenti, sottoposte ad una intensa radiazione pulsante, accusano un aumento di resistenza elettrica. Ho potuto mettere in netta evidenza tale fatto, per quanto debolissimo, e mi sembra che esso, per ora, non possa esclusivamente interpretarsi come dovuto alla sospettabile azione termica della luce, sulla resistenza stessa; azione che, come è noto, ha nei metalli lo stesso segno.

Le pellicole metalliche con cui ho sperimentato sono di Ag , Au , Pt , Sn , Al , Zn , tutte ottenute o fissate su vetro o quarzo trasparente. Non ho per ora sperimentato con depositi ottenuti per proiezione catodica. In questa Nota dirò dei risultati ottenuti con l'argento. Questo metallo è stato depositato su vetro per via chimica; si è potuto così regolare a piacere lo spessore della pellicola, arrestando a tempo giusto il processo di argentatura. Lo spessore più adatto all'esperimento sembra quello per cui si ha una discreta trasparenza in bleu dello strato metallico; ciò corrisponde a qualche decina di $\mu\mu$. Strati completamente opachi danno scarso effetto; strati eccessivamente sottili si prestano male in causa della loro variabile resistenza elettrica. Ho cominciato a servirmi della luce di un arco a mercurio, in tubo di quarzo della potenza di circa 300 watt. Tale luce è concentrata mediante una lente di quarzo L_1 (fig. 1), di 4 cm. di distanza focale e 4 cm. di apertura, su di un disco girante D di 40 cm. di diametro, avente sul bordo 24 fori di 3 cm. di diametro (la figura non rispetta le proporzioni e sul disco sono segnati solo 12 fori). La luce è poi, mediante altre due lenti L_2 , L_3 , concentrata sulla lastrina di vetro argentato P . Il disco è messo in rotazione mediante una puleggia G da un motorino elettrico tenuto alquanto lontano, onde evitare perturbazioni induttive. La frequenza di interruzione della luce cadente su P è di circa 500 a 1". La lamina P , convenientemente fornita di elettrodi alle estremità della sua lunghezza, è inserita nel circuito primario di un piccolo trasformatore Burndey di modulazione T (rapporto di trasformazione 1 : 30), insieme ad una batteria di accumulatori B con tensione regolabile da 2 a 16 volt. Le altre particolarità di questo circuito indicate nella figura, si riferiscono ad esperienze ese-

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 agosto 1932.

guita in un secondo tempo, come sarà detto in seguito. Il secondario del trasformatore T è connesso con la griglia ed il filamento della prima lampada di un gruppo amplificatore termoionico a quattro stadii (coef. di amplif. circa 100.000).

In tali condizioni, facendo battere la luce direttamente sulla pellicola di argento, si ascolta al telefono dell'amplificatore il suono corrispondente alla velocità di rotazione del disco a fori D. Per vero, l'intensità di tale suono può essere debolissima od anche non rilevabile, perchè coperta dal fruscio dell'amplificatore. Ma regolando opportunamente le varie parti del dispositivo, e scegliendo bene i tipi delle quattro lampade termoioniche e

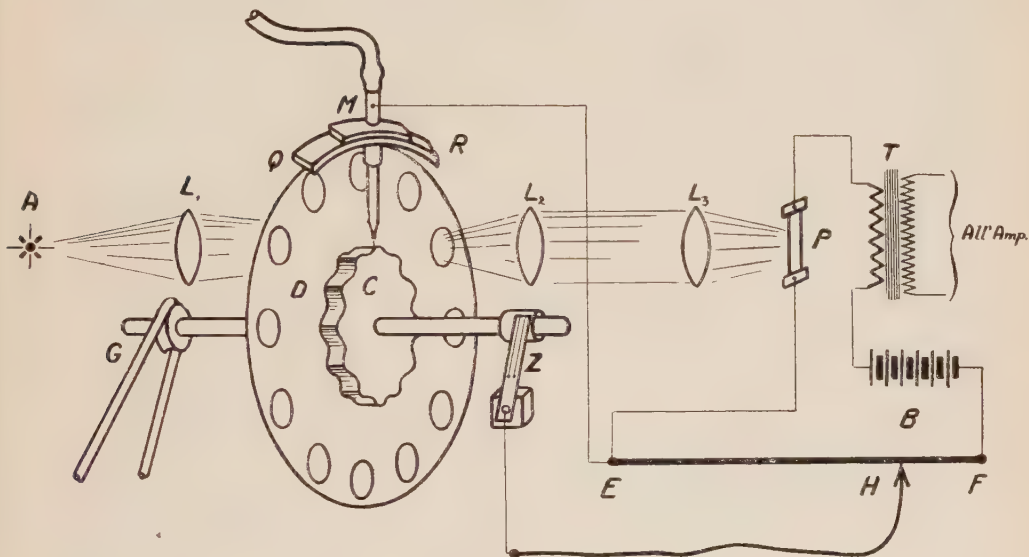


Fig. 1.

le loro tensioni di placca, il suono è nettamente percepibile alla doppia cuffia telefonica. Esso scompare per l'interposizione, sul percorso della luce, di una lastra di vetro comune, od anche rovesciando la lamina P, in guisa che la luce arrivi sul metallo attraverso il vetro di sostegno. Per contro, una lastra di quarzo non fa affievolire sensibilmente l'effetto. Inoltre, se la lastrina P su cui è deposto l'argento è di quarzo, l'effetto permane anche quando essa è rovesciata. Da tali constatazioni si deduce che l'effetto sull'argento è dovuto, in modo diretto od indiretto, alle radiazioni ultraviolette che possono essere assorbite dal vetro comune, e cioè con $\lambda < 3000 \text{ \AA}$. La manifestazione dell'effetto è necessariamente connessa con la presenza della batteria B, nel circuito della lamina. Al crescere della tensione di essa, si accresce man mano l'intensità del suono; viceversa, questo sparisce del tutto, qualora sia nulla tale tensione. La corrente massima che può fluire nella lamina è dell'ordine di 1 ampère. Così, si è al limite di fun-

zionamento del dispositivo, sia perchè la eccessiva densità di corrente nella lamina metallica produce in essa alterazioni o rotture a cui corrispondono crepitii molesti al telefono; sia anche perchè può avvenire, in seguito al riscaldamento della lamina, che il vetro si rompa.

Di fronte alle accennate constatazioni, in un primo orientamento, si può cercare di ricondurre il fenomeno in parola a quello classico fotoelettrico; in ciò si può essere guidati dal fatto che le radiazioni attive sono quelle u. v. Si potrebbe infatti pensare che un'emissione elettronica possa avvenire sotto l'azione di tali radiazioni, almeno da uno degli estremi della lamina. Infatti, lungo questa, per la corrente che la traversa, vi ha certamente caduta di tensione; per ciò, degli elettroni potrebbero sfuggire dalla parte di essa più negativa, per dar luogo, attraverso l'atmosfera esterna, ad un flusso di joni. Tale flusso, se sufficientemente intenso, potrebbe a sua volta generare un *aumento* della corrente circolante nel primario del trasformatore T; a ciò corrisponderebbe la formazione del suono al telefono, che sarebbe perciò dovuta ad un'apparente *diminuzione* della resistenza della lamina metallica, sotto l'azione della luce. Secondo tali vedute, la constatazione dell'effetto, anche quando la luce entra dalla parete di quarzo su cui è fissata la pellicola metallica, potrebbe spiegarsi pensando che esso possa esser dovuto alla luce emergente per trasparenza. Ma, pur non spingendosi a valutazioni di carattere quantitativo, di una ipotesi di tale genere, una semplice esperienza ne fa cadere la possibilità. Ponendo infatti, davanti alla pellicola una rete metallica vicinissima con potenziale fortemente negativo (120 volt), l'effetto rimane inalterato; questo inoltre, si manifesta ancora adoperando strati di argento depositati su quarzo e verniciati dalla parte opposta, colpiti dalla luce pulsante attraverso il quarzo. L'effetto non è dunque riportabile al fenomeno classico fotoelettrico, e per la sua manifestazione non interviene il gas ambiente. Con ogni probabilità, esso si deve manifestare egualmente e forse meglio, nel vuoto più spinto.

Da quanto si è detto, risulta chiaramente, come, sotto l'azione della luce pulsante, realmente si occasionino corrispondenti pulsazioni nella corrente che circola nella lamina metallica colpita, dovute probabilmente a variazioni di resistenza elettrica di questa. Ma non si hanno fin qui elementi per dire quale sia il *segno* di tali variazioni, in confronto di quelle della intensità della luce agente. Non sarebbe stato nè facile nè sicuro, mettere in raffronto la fase della corrente alternata, che nel telefono dà luogo al suono, con quella della luce pulsante; per cui, ho realizzato un dispositivo che provoca una seconda pulsazione di resistenza nel circuito della lamina, sincrona con quella della luce, esattamente regolabile nella sua intensità e fase, in guisa da annullare la prima; a ciò deve poter corrispondere l'annullamento del suono al telefono.

Tale dispositivo consiste in una ruota dentata di rame C coassiale e calettata solidalmente col disco D; essa porta 24 denti, cioè quanti sono i

denti di quello; tali denti hanno forma sinusoidale. Un getto di mercurio fluente da un tubo di acciaio M, con una bocca di efflusso di 0,3 mm. di diametro, è diretto contro i denti della ruota; una protezione di celluloido, non indicata in figura, serve a raccogliere il mercurio dopo che esso ha battuto sulla ruota C. La bocca di efflusso di M può essere portata vicina alle estremità dei denti di C (a circa 1 mm.); tali denti hanno una profondità (esagerata in figura) di 2 mm., e la loro superficie è ben amalgamata, per assicurarne il contatto col mercurio. La velocità di efflusso è di circa 7 metri al r'', giacchè il mercurio cade da un serbatoio posto a 3 metri di altezza. Al girare del disco, poichè la vena liquida in queste condizioni può uscire integra per circa un centimetro, vi ha certamente, in ogni istante, continuità metallica tra M e C. La lunghezza del getto pulsa così tra 1 e 3 mm.; corrispondentemente la resistenza elettrica di tale tratto pulsa di circa 0,03 ohm con legge sinusoidale. Tale resistenza, mediante una spazzola di rame Z ed un contatto sul tubo di acciaio M, è derivata su un tratto regolabile EH di un filo EF di rame di 1,5 mm. di diametro e di 1 m. di lunghezza, inserito nel circuito di P e del primario di T. Se, per es., EH ha la lunghezza di 10 cm., la sua resistenza combinata con quella del getto di mercurio, pulsa di $3/100.000$ di ohm. Il getto di mercurio è sostenuto da un'alidato scorrevole su di una guida QR; talchè si può regolare la sua posizione angolare rispetto al foro del disco traversato dal raggio luminoso.

Procedendo ad una accurata ricerca sia del punto H, che della posizione angolare più opportuna del getto, si può riuscire a far estinguere il suono al telefono, provocato dalla luce periodicamente interrotta dal disco. La misura del tratto EH stabilisce dunque l'ampiezza delle pulsazioni di resistenza occasionate dalla luce nella lamina P. Inoltre, si può procedere all'osservazione stroboscopica del getto, osservandolo con la stessa luce pulsante che emerge dal disco a fori. Con ciò, si viene a localizzare la posizione di questo in un punto Z (fig. 2), prossimo al culmine K di un dente. Il dispositivo permette di determinare con una certa approssimazione, per ora non troppo grande, il valore del tratto ZK espresso come una frazione del periodo della pulsazione luminosa. Essendo il punto Z più vicino al culmine K che all'incavo I, si può ammettere, con una certa probabilità, che l'effetto consista in un aumento periodico della resistenza, dato dalla misura del tratto EH della fig. 1. Inoltre, tenendo conto del senso di rotazione della ruota, tale pulsazione di resistenza è in ritardo di fase di un angolo φ corrispondente al tratto ZK della fig. 2. È infatti meno probabile che si tratti di una diminuzione di resistenza, con un anticipo corrispondente al tratto ZI, o, comunque, ad un valore assoluto di φ ancora maggiore.

Si conclude dunque, per ora, che sotto l'azione della luce pulsante, la resistenza della pellicola metallica pulsa anch'essa, e che, in media, diventa alquanto maggiore di quella che essa ha in assenza della luce.

Non è scopo di questa Nota di fornire precisi risultati quantitativi sul valore di φ ; mi riservo di procedere in seguito a ciò, dopo aver realizzato dispositivi più perfezionati. Ma sin d'ora, posso dire che, per gli strati di argento, l'effetto della luce u. v., di intensità corrispondente al descritto dispositivo, consiste in un aumento di resistenza dell'ordine di qualche centomillesimo del suo valore. Il ritardo di fase φ apparisce compreso fra 20° e 45° , ma tale misura merita conferma, mediante future esperienze.

Sostituendo all'arco a mercurio in quarzo, una lampada ad incandescenza intensiva (500 watt), il suono si sente ancora. L'esperienza riesce allora anche adoperando lenti di vetro comune, anzichè di quarzo. Si comprende come non debba esercitare sensibile affievolimento l'interposizione di una lastra di vetro, che faceva sparire l'effetto nel caso dell'arco a mer-

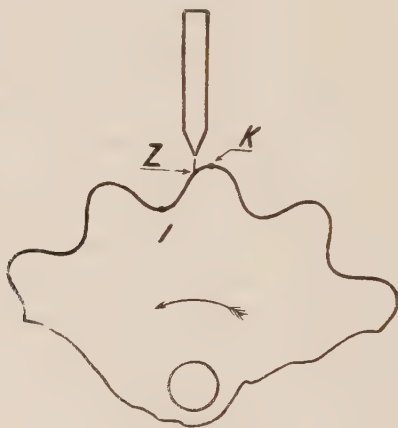


Fig. 2.

curio. Inoltre, un filtro di vetro all'ossido di manganese lascia ancora una traccia di effetto, mentre uno all'ossido di nichel fa cessare del tutto il suono.

Si deve perciò concludere che l'argento è sensibile ad una gamma estesa di radiazioni, che va dall'ultrarosso all'ultravioletto e che l'osservazione di particolari massimi è legata alla natura della sorgente.

Ricoprendo la lastra di argento di nerofumo e facendo battere su questo la luce, l'effetto aumenta notevolmente, tanto con la lampada a mercurio che con quella ad incandescenza. Con la prima, l'effetto si affievolisce ancora notevolmente per l'interposizione di una lastra di vetro; ma non sparisce del tutto. Si può dire perciò che anche in tali condizioni, la luce u. v. ha buona efficienza.

Le descritte esperienze sono state eseguite, come si è detto, servendosi di pellicole di argento. In una prossima Nota riferirò sui risultati ottenuti con altri metalli, e sarà fatta una prima discussione di quanto è stato osservato.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla curvatura delle linee delle varietà.* Nota ⁽¹⁾ di T. BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Se sopra una varietà riemanniana V_n è tracciata una curva C , si può considerare la curvatura (assoluta) di essa e la curvatura geodetica; e, analogamente a quanto avviene per le curve delle superficie ordinarie, si può dimostrare che la curvatura geodetica in un punto P_0 di C è eguale alla curvatura (ordinaria) della proiezione ortogonale della curva C sullo spazio euclideo tangente alla varietà V_n in P_0 .

Questa proprietà è stabilita dal prof. Gugino in una Nota recentissima ⁽²⁾, mediante il solito armamentario delle componenti covarianti, contravarianti, simboli di Christoffel di 1^a e 2^a specie, ecc.; con tali metodi la dimostrazione richiede tre pagine irte di calcoli complicati, con sommatorie quaduple, quintuple, ecc., i quali calcoli tuttavia, secondo il Gugino, hanno un « carattere di espressiva semplicità »!

Invece coi metodi vettoriali sviluppati nell'opera: Burgatti, Boggio, Burali-Forti, *Geometria differenziale* (Zanichelli, Bologna, 1930), che nel seguito verrà citata con *Geom. differ.*, la proprietà accennata può stabilirsi in modo assai rapido e con calcoli brevissimi ed elementari.

Ciò è esposto in questa Nota, ove stabilisco pure altre relazioni, qualcuna delle quali credo non sia ancora stata osservata, fra la curvatura e torsione di una geodetica e la curvatura di una sua proiezione piana.

*
* * *

1. Sia V_n una varietà riemanniana, con n dimensioni, immersa in uno spazio euclideo E_m con m dimensioni ($m > n$).

Diciamo poi C una curva qualunque di tale varietà, P un punto generico di essa, ed s l'arco compreso fra i punti P_0 e P della curva C .

Sia inoltre S_n lo spazio euclideo (ad n dimensioni) tangente in P_0 alla V_n , e diciamo C^* la proiezione (ortogonale) della curva C sullo spazio S_n ; essa risulterà descritta dal punto P^* proiezione di P sopra S_n , e le curve C e C^* saranno fra loro tangenti nel punto P_0 .

Ponendo: $u = P^* - P$, si ha identicamente:

$$P^* = P + u,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1932.

(2) GUGINO, *Sulla curvatura geodetica delle linee di uno spazio riemanniano*, questi « Rendiconti », vol. XV, serie 6^a, 1^o sem. 1932.

da cui, indicando con s^* l'arco della curva C^* compreso fra i punti P_0 e P^* :

$$(1) \quad \frac{d^2 P^*}{ds^{*2}} = \frac{d^2 P}{ds^2} + \frac{d^2 u}{ds^{*2}}.$$

Ciò premesso, si ha $dP = dP^* - du$, ed elevando a quadrato: $ds^2 = ds^{*2} + (du)^2$; considerando l'arco s come funzione di s^* , ne deduciamo:

$$(2) \quad \frac{ds}{ds^*} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{ds^*}\right)^2},$$

da cui:

$$(3) \quad \frac{d^2 s}{ds^{*2}} = \frac{du}{ds^*} \times \frac{d^2 u}{ds^{*2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{du}{ds^*}\right)^2}.$$

Supponendo, in particolare, che il punto P^* (e quindi P) venga a coincidere con P_0 , ed osservando che l'elemento d'arco ds^* della curva C^* (contato a partire da P_0) coincide coll'elemento d'arco ds della curva C (pure contato a partire da P_0), la (2) mostra che in P_0 si ha $(du/ds^*)_0 = 0$; di qui e dalla (3) risulta, nel punto P_0 :

$$(4) \quad (d^2 s/ds^{*2})_0 = 0.$$

Dopo ciò, dalla relazione

$$\frac{dP}{ds^*} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{ds^*},$$

si deduce:

$$\frac{d^2 P}{ds^{*2}} = \frac{d^2 P}{ds^2} \left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 + \frac{dP}{ds} \frac{d^2 s}{ds^{*2}},$$

quindi, nel punto P_0 si ha, badando alla (4):

$$\left(\frac{dP}{ds^*}\right)_0 = \left(\frac{dP}{ds}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2 P}{ds^{*2}}\right)_0 = \left(\frac{d^2 P}{ds^2}\right)_0,$$

perciò dalla (1) si deduce, nel punto P_0 :

$$(5) \quad \left(\frac{d^2 P^*}{ds^{*2}}\right)_0 = \left(\frac{d^2 P}{ds^2}\right)_0 + \left(\frac{d^2 u}{ds^{*2}}\right)_0.$$

Ora, come si sa (*Geom. differ.*, p. 218), il vettore $d^2 P/ds^2$ ha la direzione della normale principale assoluta della curva C nel punto P , perciò il vettore unitario

$$n = \frac{d^2 P}{ds^2} / \text{mod } \frac{d^2 P}{ds^2}$$

è parallelo a tale normale e ponendo

$$(6) \quad d^2 P/ds^2 = cn,$$

il numero (positivo) c è la *curvatura scalare* della curva C nel punto P , mentre il vettore $c\mathbf{n}$ può chiamarsi *curvatura vettoriale* di C in P .

Analogamente si ha, per la curvatura vettoriale della curva C^* in P^* :

$$(6^*) \quad d^2 P^* / ds^{*2} = c^* \mathbf{n}^*, \quad (\mathbf{n}^{*2} = 1).$$

La (5) pertanto può scriversi:

$$(7) \quad (c^* \mathbf{n}^*)_0 = (c\mathbf{n})_0 + (d^2 \mathbf{u} / ds^{*2})_0;$$

se ora si indica con $c_r \mathbf{n}_r$ la proiezione del vettore $c\mathbf{n}$ sullo spazio tangente S_n (intendendo che il vettore \mathbf{n}_r sia unitario) essa non è altro che la curvatura geodetica vettoriale di C in P (*Geom. differ.*, p. 219), perciò se proiettiamo i vettori che figurano nella (7), sullo spazio tangente S_n e osserviamo che il vettore $(d^2 \mathbf{u} / ds^{*2})_0$ ha proiezione nulla, perchè il vettore \mathbf{u} è costantemente normale allo spazio S_n , si ha senz'altro dalla (7):

$$(7') \quad (c^* \mathbf{n}^*)_0 = (c_r \mathbf{n}_r)_0,$$

la quale prova che la *curvatura vettoriale*, nel punto P_0 della curva C^* proiezione di C sullo spazio tangente S_n è eguale alla *curvatura geodetica vettoriale* della curva C in P_0 .

2. In particolare, supponiamo che la varietà V_n sia immersa in uno spazio euclideo E_{n+1} , con $n+1$ dimensioni, nel qual caso allora la V_n è una *ipersuperficie* di tale spazio.

Se si indica con E_n un iperpiano qualunque di E_{n+1} , consideriamo la proiezione ortogonale C^* della curva C di V_n sull'iperpiano E_n ; è chiaro, che indicando \mathbf{i} un vettore unitario normale a tal iperpiano, si può scrivere:

$$(8) \quad P = P^* + x\mathbf{i},$$

ove x è la distanza (con segno) del punto P dall'iperpiano E_n .

Supponiamo che le curve C e C^* abbiano un punto comune P_0 , situato quindi sull'iperpiano E_n , e diciamo, come prima, s^* la lunghezza dell'arco $P_0 P^*$ della curva C^* ed s quella dell'arco $P_0 P$ della curva C ; avremo:

$$\frac{dP}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \frac{dP^*}{ds^*} + \frac{dx}{ds^*} \mathbf{i},$$

e derivando ancora rispetto ad s^* :

$$\frac{d^2 P}{ds^2} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 + \frac{dP}{ds} \frac{d^2 s}{ds^{*2}} = \frac{d^2 P^*}{ds^{*2}} + \frac{d^2 x}{ds^{*2}} \mathbf{i},$$

ossia, per le (6), (6*):

$$(9) \quad c\mathbf{n} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 + \frac{dP}{ds} \frac{d^2 s}{ds^{*2}} = c^* \mathbf{n}^* + \frac{d^2 x}{ds^{*2}} \mathbf{i},$$

la quale stabilisce una relazione semplice fra le curvature vettoriali delle curve C e C^* nei punti corrispondenti P e P^* .

3. Diciamo Γ la superficie cilindrica di E_{n+1} che proietta la curva C parallelamente al vettore \mathbf{i} , e supponiamo che la curva C sia un'elica per tale cilindro, cioè che la distanza x varii proporzionalmente all'ascissa curvilinea s^* del punto P^* , cioè:

$$(10) \quad x = hs^*,$$

ove h è una costante; dalla (8) che porge, differenziando e poi elevando a quadrato:

$$ds^2 = ds^{*2} + dx^2, \quad \text{si conclude allora:} \quad ds = \sqrt{1 + h^2} ds^*,$$

onde:

$$(11) \quad s = \sqrt{1 + h^2} s^*;$$

dopo ciò la (9) diviene:

$$c\mathbf{n} \cdot (1 + h^2) = c^*\mathbf{n}^*,$$

la quale intanto mostra che i vettori \mathbf{n} ed \mathbf{n}^* sono paralleli, e quindi la normale principale in P alla curva C è normale al cilindro Γ , perciò la curva C è una *geodetica* di tale cilindro. Inoltre:

$$(12) \quad c(1 + h^2) = c^*,$$

che costituisce una generalizzazione di una nota proprietà dell'elica cilindrica dello spazio ordinario.

Viceversa, se la curva C è una geodetica per il cilindro Γ , i vettori \mathbf{n} ed \mathbf{n}^* devono esser paralleli, e allora la (9) può scriversi:

$$l\mathbf{n}^* + \frac{dP}{ds} \frac{d^2s}{ds^{*2}} - \frac{d^2x}{ds^{*2}} \mathbf{i} = 0,$$

con l numero reale, e poichè i vettori che qui figurano non sono complanari, deve essere

$$l = 0, \quad d^2s/ds^{*2} = 0, \quad d^2x/ds^{*2} = 0,$$

dalle quali si ricavano tosto le (10), (11), (12).

4. Come ultimo caso particolare, supponiamo $n = 2$, allora la V_2 è una superficie dello spazio ordinario, la C è una curva di tale superficie, e C^* ne è la proiezione sopra un piano qualunque E_2 .

Derivando la (9) rispetto ad s^* si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{ds} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^3 \mathbf{n} + c \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^3 \frac{d\mathbf{n}}{ds} + 3c\mathbf{n} \frac{ds}{ds^*} \frac{d^2s}{ds^{*2}} + \frac{dP}{ds} \frac{d^3s}{ds^{*3}} = \\ = \frac{dc^*}{ds^*} \mathbf{n}^* + c^* \frac{d\mathbf{n}^*}{ds^*} + \frac{d^3x}{ds^{*3}} \mathbf{i}; \end{aligned}$$

ma da una formula di Frenet si ha, indicando con τ la *torsione* e con \mathbf{b} un vettore unitario, parallelo alla binormale della curva C in P:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -c \frac{dP}{ds} - \tau \mathbf{b},$$

perciò sostituendo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dc}{ds} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^3 + 3c \frac{ds}{ds^*} \frac{d^2s}{ds^{*2}} \right] \mathbf{n} - c\tau \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^3 \mathbf{b} + \left[\frac{d^3s}{ds^{*3}} - c^2 \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^3 \right] \frac{dP}{ds} = \\ = \frac{dc^*}{ds^*} \mathbf{n}^* - c^{*2} \frac{dP^*}{ds^*} + \frac{d^3x}{ds^{*3}} \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che il piano E_2 sia tangente alla superficie V_2 nel punto P_0 , e che il punto generico P della curva C (e quindi anche P^*) venga a coincidere con P_0 ; allora questa relazione porge, ricordando la (4):

$$(13) \left(\frac{dc}{ds} \right)_0 \mathbf{n}_0 - c_0 \tau_0 \mathbf{b}_0 + \left[\left(\frac{d^3s}{ds^{*3}} \right)_0 - c_0^2 \right] \left(\frac{dP}{ds} \right)_0 = \left(\frac{dc^*}{ds^*} \right)_0 \mathbf{n}_0^* - c_0^{*2} \left(\frac{dP^*}{ds^*} \right)_0 + \left(\frac{d^3x}{ds^{*3}} \right)_0 \mathbf{i};$$

moltiplicando scalarmente per $(dP^*/ds^*)_0$ [che è eguale a $(dP/ds)_0$], si ha:

$$(14) \quad c_0^2 - c_0^{*2} = (d^3s/ds^{*3})_0,$$

relazione molto semplice fra le curvature, nel punto P_0 , delle curve C e C^* .

Dalla (3), tenuto conto che, nel caso attuale, si ha $\mathbf{u} = -x\mathbf{i}$, è facile ricavare:

$$(d^3s/ds^{*3})_0 = (d^2x/ds^{*2})_0,$$

che può essere sostituito nel secondo membro della (14).

Se si suppone inoltre che la curva C sia una *geodetica* della superficie V_2 , il vettore \mathbf{n}_0 risulta normale al piano tangente E_2 , e perciò si può ritenere eguale al vettore \mathbf{i} , mentre il vettore \mathbf{b}_0 (che ora sta sul piano E_2) si può ritenere eguale ad \mathbf{n}_0^* ; la (13) ci dà allora senz'altro le relazioni:

$$\begin{aligned} (dc/ds)_0 &= (d^3x/ds^{*3})_0, \\ c_0 \tau_0 &= - (dc^*/ds^*)_0, \end{aligned}$$

l'ultima delle quali serve per calcolare la torsione τ_0 della geodetica C nel punto P_0 .

Matematica. — *Sur la transplantation du transport parallèle.*
Nota ⁽¹⁾ di H. CHAPIRO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La théorie relative des surfaces, ces dernières années, fut l'objet des recherches de plusieurs géomètres ⁽²⁾. Pourtant, à ce qu'il paraît, pas un seul parmi eux n'a posé la question de la « transplantation » du transport parallèle d'une surface sur l'autre. C'est à cette question que la présente Note est consacrée.

Supposons qu'entre les points des deux surfaces S et S^0 en E_3 (espace euclidien affine à 3 dimensions) soit établie une correspondance de telle sorte qu'aux valeurs égales des paramètres u^1, u^2 correspondent des plans tangents parallèles. Soient

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}(u^1, u^2)$$

les équations de ces surfaces. En posant

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \mathbf{r}_i, \quad \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial u^i} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \quad (i = 1, 2)$$

nous aurons, par hypothèse,

$$(I) \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i = p_i^\mu \mathbf{r}_\mu, \quad \mathbf{r}_i = p_i^\lambda \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\lambda \\ p_i^\lambda p_{\lambda}^j = \delta_i^j \quad (\delta_i^i = 1).$$

Si $\mathbf{v} = v^\lambda \mathbf{r}_\lambda$ est un vecteur, placé dans le plan tangent à la surface S , on pourra transplanter ce vecteur dans un point correspondant de S^0 ; en se servant de (I), nous aurons

$$(2) \quad \mathbf{v} = v^\mu \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\mu, \quad v^\lambda = v^\mu p_\mu^\lambda.$$

Supposons que dans chaque point de la surface S est donné un vecteur arbitraire \mathbf{n} , placé hors du plan $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$; ce vecteur jouera le rôle de la « normale » pour S .

De la même manière chaque point de la surface S^0 aura son vecteur $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, pris pour la « normale ». Le choix de ce second vecteur ne dépend en aucune

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1932.

(2) E. MÜLLER, « Monath. f. Mathematik u. Physik », XXXI, 1921; A. DUSCHEK, « Sitzungsberichte d. Akad. Wien », 135 (1926); 136 (1927); W. SÜSS, « Jap. Journ. of Math. », 4, « Tôhoku Journ. », 29, 30; SOJI NAKAJIMA, « Jap. Journ. », t. VII, 1930.

façon de celui du premier. A l'aide de ces vecteurs on pourra établir sur S et S^0 la loi du transport parallèle

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^k} = \Gamma_{ik}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + b_{ik} \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^k} = \overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\alpha + \overset{\circ}{b}_{ik} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \quad (1).$$

Notre problème est donc le suivant: *transplanter sur S^0 le transport parallèle, fixé sur S .*

Dans ce but écrivons la différentielle absolue du vecteur \mathbf{v} sur la surface S :

$$D\mathbf{v} = (dv^\lambda + v^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda du^\beta) \mathbf{r}_\lambda.$$

Remplaçant ici v^λ à l'aide de (2) et \mathbf{r}_λ à l'aide de (1), nous avons

$$D\mathbf{v} = (dv^\sigma + v^\mu \overset{*}{\Gamma}_{\mu\beta}^\sigma du^\beta) \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\sigma,$$

où

$$(4) \quad \overset{*}{\Gamma}_{\mu\beta}^\sigma = \left(\frac{\partial p_\mu^\lambda}{\partial u^\beta} + p_\mu^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \right) \overset{\circ}{p}_\lambda^\sigma = p_{(\mu) |\beta}^\lambda \overset{\circ}{p}_\lambda^\sigma.$$

L'expression $p_{(\mu) |\beta}^\lambda$ représente la dérivée covariante « partielle » au sens de M.^{lle} Maria Pastori ⁽²⁾.

Quoique le transport parallèle sur la surface S a été donné indépendamment de celui sur S^0 , tout de même entre le « transport transplanté » ($\overset{*}{\Gamma}_{ik}^\lambda$) et celui qui avait été donné au début même sur S^0 on peut établir une simple relation. Nous profiterons pour cela du procédé suivant. Introduisons trois vecteurs covariants ⁽³⁾ $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{N}$, reciproques aux vecteurs $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1, \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2, \overset{\circ}{\mathbf{n}}$, posant

$$(5) \quad \mathbf{R}^1 = \frac{[\overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 \overset{\circ}{\mathbf{n}}]}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 \overset{\circ}{\mathbf{n}}} \quad , \quad \mathbf{R}^2 = \frac{[\overset{\circ}{\mathbf{n}} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_1]}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 \overset{\circ}{\mathbf{n}}} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{[\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2]}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2 \overset{\circ}{\mathbf{n}}},$$

où $[ab]$ signifie le produit vectoriel, compris dans le sens de la géométrie affine ⁽⁴⁾, et abc — le volume de parallélépipède construit sur $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. En comparant (5) avec (1), nous avons

$$(6) \quad \mathbf{r}_i \overset{\circ}{\mathbf{R}}^j = \overset{\circ}{p}_i^j \quad (\text{produit scalaire}).$$

(1) A. NORDEN, « Comptes Rendus », 192, p. 135.

(2) M. PASTORI, « Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei », XII, p. 17 (1930).

(3) I. SCHOUTEN, *Ricci-Kalkül*, I, § 4.

(4) W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie*, t. II, p. 71 (1923).

D'autre part, on a à cause de (3)

$$(7) \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j = \frac{\partial^2 \overset{\circ}{r}}{\partial u^i \partial u^k} \overset{\circ}{R}^j.$$

On peut représenter l'expression $\frac{\partial^2 \overset{\circ}{r}}{\partial u^i \partial u^k}$ à l'aide de (1) sous la forme

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \overset{\circ}{r}}{\partial u^i \partial u^k} = p_{(k)|i}^\lambda \overset{\circ}{r}_\lambda + f_{ik} \overset{\circ}{n},$$

où

$$f_{ik} = b_{i\alpha} p_k^\alpha.$$

On a donc en raison de (7) et (8)

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j = p_{(k)|i}^\lambda \overset{\circ}{p}_\lambda^j + f_{ik} \overset{\circ}{n} \overset{\circ}{R}^j,$$

où

$$(9) \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j = \overset{*}{\Gamma}_{ik}^j + f_{ik} \zeta^j, \quad \zeta^j = \overset{\circ}{n} \overset{\circ}{R}^j.$$

Le résultat obtenu indique le rapport de la question considérée avec le problème des espaces sous-projectifs ⁽¹⁾. Pourtant, nous ne précisons pas ici le caractère de ce rapport.

Si l'on pose dans les formules (3) $\overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$, nous aurons $\zeta^j = 0$, et le transport transplanté coïncide avec celui qui a été donné au début même sur la surface S° .

(1) B. KAGAN, « Comptes Rendus », 191, p. 548 (1930).

Matematica. — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* — II. *Riduzione a Tipi Normali e Integrali Fondamentali.*
Nota di L. LABOCETTA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. A. CROCCO.

Mi propongo in questa Nota di mostrare come le ordinarie funzioni discontinue possano essere tutte ricondotte, senza alterare il valore del loro integrale, ad alcuni tipi fondamentali dei quali è facile l'integrazione.

Mi giovo a tale scopo delle due proprietà seguenti ben note, ma delle quali non si era finora tratto tutto il profitto che son capaci di dare:

a) Due funzioni uguali in un intervallo dato, salvo al più in corrispondenza dei punti di un insieme di misura nulla, hanno, in quell'intervallo, lo stesso integrale ⁽²⁾,

b) Una funzione discontinua, senza punti isolati, si può risolvere nella somma di una funzione continua, il « nucleo » di essa, e di una costante discontinua, la corrispondente « funzione dei salti » ⁽²⁾.

Della proprietà a) mi servo per sostituire ad una funzione discontinua data una funzione ad essa equivalente, nei riguardi della integrazione, ma priva di punti isolati, continua o continua a destra. Della proprietà b) mi servo per sostituire ad una funzione discontinua da integrare, priva di punti isolati, una funzione continua ed una costante discontinua il cui integrale è immediatamente ottenibile da alcune poche forme fondamentali.

1. *Trasformazione delle singolarità.* — Si consideri dapprima, una funzione $f(x)$ che in certo intervallo (a, b) abbia una sola discontinuità, in corrispondenza del valore $x = c$. Possono presentarsi tre casi diversi:

a) Se è $f_i(c + 0) = f_i(c - 0) = k$ nel mentre è $f_i(c) = h \neq k$ diremo che per $x = c$ la funzione presenta un *taglio*. Questa discontinuità può essere eliminata facendo sparire il punto isolato e la funzione resa continua con l'aggiunta di una conveniente funzione puntiforme ⁽³⁾.

$$(1) \quad F_c(x) = f_i(x) + (k - h) \text{Punt}(x - c);$$

b) Se è $f_s(c + 0) \neq f_s(c - 0)$ nel mentre $f_s(c)$ è uguale all'uno o all'altro dei due valori, per es. a quello di sinistra, $f_s(c) = f_s(c - 0) = h$ ed è $f_s(c + 0) = k$ si ha un *salto* semplice $k - h$ e con l'aggiunta di una

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) V. p. 160 e 163 di H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 2^a Ed., 1928.

(3) Per l'espressione analitica delle *Funzioni Puntiformi*, v. il mio scritto nel « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », Anno VIII, n. 5, dic. 1929.

conveniente funzione puntiforme si può ottenere che nel punto $x = c$ la funzione prenda il valore $k = f_s(c + 0)$; basta porre

$$(2) \quad F_d(x) = f_s(x) + (k - h) \text{Punt}(x - c).$$

E reciprocamente se nel punto $x = c$ la funzione prende il valore k e si vuole invece che essa prenda quello $h = f_s(c - 0)$ basterà scrivere

$$(3) \quad F_s(x) = f_s(x) + (h - k) \text{Punt}(x - c);$$

c) Se infine è $h = f_p(c - 0) \neq f_p(c + 0) = k$ ed è $f_p(c) = j$, si ha un salto con punto isolato. Il punto isolato si può eliminare facendo, mediante l'aggiunta di una funzione puntiforme conveniente, che $f_p(x)$ prenda per $x = c$ o il valore h che essa ha per $x = c - 0$ o il valore k che essa ha per $x = c + 0$

$$(4) \quad F_s(x) = f_p(x) + (h - j) \text{Punt}(x - c)$$

$$(5) \quad F_d(x) = f_p(x) + (k - j) \text{Punt}(x - c).$$

Con la prima trasformazione risulta chiuso a destra l'intervallo a sinistra, con la seconda invece risulta chiuso a sinistra l'intervallo a destra.

2. *Equivalenza delle funzioni.* — Poichè, in un dato intervallo si può in uno o più punti, ed anzi in un insieme numerabile di punti, alterare il valore di una funzione restando ciò non di meno inalterato il suo integrale sullo stesso intervallo, segue che fra i limiti a e b hanno lo stesso integrale le due funzioni (1), $F_c(x)$ e $f_i(x)$, le due funzioni (2) e (3), $F_d(x)$ e $F_s(x)$ e le tre funzioni (4), (5) $f_p(x)$, $F_s(x)$, $F_d(x)$.

Diremo *equivalenti*, nei rispetti dell'integrazione, quelle funzioni che, in un dato intervallo sono generalmente continue ed uguali, eccetto che per un insieme di punti di misura nulla in corrispondenza dei quali presentano delle discontinuità di uno dei tipi $a)$, $b)$, $c)$ ed hanno valori diversi.

Procedendo in uno dei modi anzidetti si può, data che sia in un certo intervallo una funzione discontinua con tagli, salti semplici e salti con punti isolati, eliminare prima tutti i tagli, ripristinando in corrispondenza di essi la continuità; nei salti semplici e nei salti con punto isolato ridurre la funzione a prendere un valore uguale a quello del suo limite a destra $f(c_i + 0)$, e ciò senza alterare il valore dell'integrale.

Resta così una funzione equivalente a quella primitivamente data, ma che è in ogni punto continua a destra ed anche in ogni punto ha derivata destra.

3. *Separazione delle parti continue dalle discontinue.* — Ma oltre che la derivata importa per le funzioni discontinue senza punti isolati considerare

la *variazione*, e precisamente la variazione destra, la variazione sinistra e la variazione in un punto, ponendo rispettivamente

$$(6) \quad V_d f(x)_c = f(c + 0) - f(c)$$

$$(7) \quad V_s f(x)_c = f(c) - f(c - 0)$$

$$(8) \quad V f(x)_c = V_d f(x)_c + V_s f(x)_c = f(c + 0) - f(c - 0).$$

Ridotto così l'intervallo ad un solo punto V_d, V_s, V coincidono rispettivamente col salto della funzione a destra, a sinistra del punto e nel punto stesso.

Per le funzioni continue a destra innanzi costruite la variazione a destra è dappertutto nulla e i salti della funzione sono dati semplicemente dalle variazioni a sinistra nei punti di discontinuità.

Ciò premesso è chiaro che sottraendo dalla funzione data la funzione scalariforme ottenuta con la sommazione della funzione puntiforme ⁽¹⁾ che rappresenta i valori j_i dei salti nei punti di discontinuità, si ottiene una funzione continua

$$(9) \quad F_c(x) = f(x) - \sum j_i \text{Punt}(x - c_i)$$

e quindi

$$(10) \quad \int f(x) dx = \int F_c(x) dx + \int \sum j_i \text{Punt}(x - c_i)$$

cioè l'integrale della funzione discontinua è ricondotto alla somma dell'integrale di una funzione continua (che però può avere espressioni analitiche diverse nei tratti successivi dell'intervallo di integrazione) e di una funzione discontinua scalariforme ⁽²⁾.

Per effettuare l'integrazione bisogna perciò sapere:

- 1) integrare una funzione scalariforme;
- 2) integrare una funzione la cui espressione analitica varia nei successivi tratti dell'intervallo di integrazione.

Ci occuperemo successivamente di queste due questioni, e tenendo presente anzi che una funzione scalariforme qualsiasi è a sua volta ottenibile con una combinazione lineare delle forme fondamentali delle costanti discontinue, che hanno per valore $-1, 0, +1$, cominceremo da queste.

4. *Integrali fondamentali.* - Le forme fondamentali che qui prenderemo in considerazione sono: $\text{sem sgn}(x; 1)$, $\text{sgn}(x; 1)$, $\text{Dir}(x; i)$ e la sua complementare $1 - \text{Dir}(x; i) = \text{Punt Dir}(x; i)$ aggiungendo anche le altre due

(1) Per la sommazione delle funzioni puntiformi v. la precedente mia Nota I.

(2) Vale a dire si è scomposta la funzione nel suo *nucleo* e nella corrispondente *funzione dei salti* che è una combinazione lineare di *costanti discontinue*.

forme, che frequentemente presentano, $\operatorname{sgn} x \operatorname{Dir}(x)$ e $\operatorname{sgn} x \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; i)$ forme tutte continue a destra.

Essendo la derivata a destra dappertutto nulla, e quella a sinistra nulla anch'essa eccetto nei punti di discontinuità dove diventa infinita, daremo di ogni funzione la variazione locale $V_d + V_s$ che rappresenta il salto nei punti di discontinuità, cioè la variazione sinistra V_s , la sommazione di questa funzione, che riproduce la funzione originale e l'integrale di questa.

$$(11) \quad \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x; 1) \cdot -V_d + V_s = \operatorname{Punt} x$$

$$S \operatorname{Punt} x = \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x; 1) \quad , \quad \int \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x; 1) dx = x \operatorname{sem} \operatorname{sgn} x$$

$$(12) \quad \operatorname{sgn}(x; 1) \cdot -V_d + V_s = 2 \operatorname{Punt} x$$

$$-1 + S 2 \operatorname{Punt} x = \operatorname{sgn}(x; 1) \quad , \quad \int \operatorname{sgn}(x; 1) dx = x \operatorname{sgn} x$$

$$(13) \quad \operatorname{Dir}(x; i) \cdot -V_d + V_s = -\operatorname{sgn} x \operatorname{Punt}(x^2 - 1)$$

$$S \{-\operatorname{sgn} x \operatorname{Punt}(x^2 - 1)\} = \operatorname{Dir}(x; i)$$

$$\int \operatorname{Dir}(x; i) dx = (x + 1) \operatorname{Dir}(x; i) + 2 \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x - 1; 1)$$

$$(14) \quad \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; i) \cdot -V_d + V_s = \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt}(x^2 - 1)$$

$$1 + S \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt}(x^2 - 1) = \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; i)$$

$$\int \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; i) dx = (x - \operatorname{sgn} x) \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; i)$$

$$(15) \quad -\operatorname{sgn} x \operatorname{Dir} x \cdot -V_d + V_s = \operatorname{Punt}(x^2 - 1) - 2 \operatorname{Punt} x$$

$$S(\operatorname{Punt}(x^2 - 1) - 2 \operatorname{Punt} x) = \operatorname{sgn}(-x) \operatorname{Dir} x$$

$$\int \operatorname{sgn}(-x) \operatorname{Dir} x dx = (1 - x \operatorname{sgn} x) \operatorname{Dir} x$$

$$(16) \quad \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x, 1) \cdot -V_d + V_s = \operatorname{Punt}(x^2 - 1)$$

$$-1 + S \operatorname{Punt}(x^2 - 1) = \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; 1)$$

$$\int \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; 1) dx = (x \operatorname{sgn} x - 1) \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; 1).$$

5. *Generazione (struttura) delle funzioni discontinue.* — Indicati così gli integrali delle funzioni elementari, si può passare a quelli delle funzioni discontinue più generali che a loro volta possono essere ridotte ad essere comprese in una delle tre categorie seguenti:

1) Funzioni discontinue ottenute praticando dei tagli, in corrispondenza dei quali nascono punti isolati, in una funzione continua che ha un'unica espressione analitica;

2) Funzioni discontinue ottenute spostando variamente diversi tratti del diagramma di una funzione continua ad espressione analitica unica, in modo da avere dei salti;

3) Funzioni continue, o discontinue per salti semplici, aventi espressioni analitiche diverse nei successivi tratti, la diversità di espressione potendosi avere anche in un tratto in cui la funzione è continua.

6. *Funzioni rese discontinue da tagli e punti isolati.* — Una funzione continua $f(x)$ vien resa discontinua, con tagli e punti isolati, combinandola convenientemente con una funzione puntiforme $\text{Punt } \varphi(x)$, o con la corrispondente funzione complementare (funzione dei tagli) $\text{sgn}^2 \varphi(x)$ e si ha così

$$(17) \quad f(x) + \text{Punt } \varphi(x) \quad , \quad (18) \quad f(x) + \psi(x) \text{Punt } \varphi(x)$$

$$(19) \quad f(x) \text{sgn}^2 \varphi(x)$$

$$(20) \quad f(x) \text{sgn}^2 \varphi(x) \quad , \quad (21) \quad f(x) \text{Punt } \varphi(x) .$$

Poichè l'insieme dei punti corrispondenti ai tagli dà un contributo nullo al valore dell'integrale, questo risulta uguale all'integrale della parte continua, perciò

$$(22) \quad \int \{f(x) + \text{Punt } \varphi(x)\} dx = \int f(x) dx$$

$$(23) \quad \int f(x) \{1 + \psi(x) \text{Punt } \varphi(x)\} dx = \int f(x) dx$$

$$(24) \quad \int f(x) \text{sgn}^2 \varphi(x) dx = \int f(x) dx$$

$$(25) \quad \int f(x) \text{sgn}^2 \varphi(x) dx = \int f(x) dx$$

$$(26) \quad \int f(x) \text{Punt } \varphi(x) dx = \int dx .$$

Così se come funzione puntiforme si prende la funzione di Dirichlet (1),

$$(27) \quad \text{Punt } \varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(m! \pi x)^{2n} \right] = \chi(x)$$

che è totalmente discontinua (nulla per x irrazionale ed $= 1$ per x razionale), viene perciò

$$(28) \quad \int_0^1 x^{\chi(x)} dx = \int_0^1 dx = 1 .$$

7. *Funzioni rese discontinue da salti.* — Dopo eliminati i tagli ed i punti isolati corrispondenti ad essi, e ridotta la funzione ad essere dappertutto continua a destra, se aggiungendo in ogni tratto la costante richiesta per eliminare il salto a sinistra si ha come risultato che la funzione data $F(x)$

(1) V. p. 15 di H. LEBESGUE, Op. cit. e p. 131 di L. SCHLESINGER und A. PLESSNER, *Lebesguesche Integrale und Fourier Reihen*, Berlin 1926.

riesce composta da una funzione continua $f(x)$ avente espressione analitica unica in tutto l'intervallo considerato, e da una funzione scalariforme, funzione dei salti, che è la sommazione della funzione puntiforme rappresentante la variazione di $F(x)$ in (a, b)

$$(29) \quad F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{i=n} b_i \text{ sem sgn } (x - c_i)$$

si ha come integrale

$$(30) \quad \int F(x) dx = \int f(x) dx + \int \sum_{i=1}^n b_i \text{ sem sgn } (x - c_i) dx + C.$$

Cosicchè, quando sia noto l'integrale della parte continua, per integrare la funzione data basta conoscere l'integrale della funzione scalariforme che è

$$(31) \quad \int \sum_{i=1}^n b_i \text{ sem sgn } (x - c_i) dx = \sum_{i=1}^n b_i (x - c_i) \text{ sem sgn } (x - c_i) + C$$

ed apparisce così oltre la costante generale C , anche il polinomio delle *costanti interne* che ha tanti termini per quanti sono i salti. Si ha ad esempio

$$(32) \quad \int a \text{ Fr } x dx = \int x dx - \int \sum a \text{ sgn } x \text{ sem sgn } (x - ia) \quad \left(i = \text{sgn } x, \dots, I \frac{x+a}{a} \right) \\ = \frac{1}{2} x^2 - \sum a(x - ia) \text{ sgn } x \text{ sem sgn } (x - ia) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad .$$

(¹) Si noti che, mentre la costante generale esterna C è arbitraria, le costanti interne sono determinate dal valore dei salti.

8. *Funzioni aventi espressione analitica variabile.* — Se dopo avere eliminato i tagli ed i punti isolati corrispondenti ad essi ed ai salti, la funzione non può essere ridotta ad avere una espressione analitica in tutto l'intervallo con la eliminazione dei salti ma varia la sua espressione analitica in corrispondenza dei salti, o anche in punti interni dei tratti nei quali è continua, allora essa può essere rappresentata da una combinazione lineare di funzioni non nulle in ciascuno dei tratti

$$(33) \quad F(x) = \sum \varphi_i(0, 1, 0) f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove $\varphi_i(0, 1, 0)$ indica una funzione limitatrice, per es.

$$(34) \quad \text{Dir} \frac{2x - c_i - c_{i-1}}{c_i - c_{i-1}}$$

che ha il valore $+1$ nell'intervallo $i^{mo}(c_{i-1}, c_i)$ ed è nulla fuori di esso.

Se sono $F_i(x)$ delle funzioni primitive delle $f(x)$ e sono k_i delle costanti determinate con la condizione che risulti

$$(35) \quad k_i + F_i(c_{i-1}) = 0$$

tali cioè che rendano nullo il valore dell'integrale nell'estremo sinistro del tratto in cui deve valere, sarà

$$(36) \quad \int f(x) dx = \sum \varphi_i(0, 1, 0) \{k_i + F_i(x)\} + \sum C_i + \text{sem sgn}(x - c_i) + C$$

dove C_i sono le costanti interne date da

$$(37) \quad C_i = \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx = F_i(c_i) - F_{i-1}(c_{i-1}).$$

Il gruppo delle costanti interne

$$(38) \quad \sum C_i \text{ sem sgn}(x - c_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

è caratteristico della funzione discontinua data.

9. *Esempio d'integrazione.* — Un grave è sospeso ad un filo che viene tagliato al tempo zero. L'accelerazione g della gravità essendo supposta costante, rappresentare analiticamente il fenomeno della caduta del grave.

Si ha successivamente

$$(39) \quad V(d^2 s / dt^2) = g \text{ Punt } t$$

$$(40) \quad d^2 s / dt^2 = g \text{ sem sgn } t$$

$$(41) \quad v = ds/dt = \int g \text{ sem sgn } t dt = gt \text{ sem sgn } t$$

$$(42) \quad s = \int v dt = \int gt \text{ sem sgn } t dt = \frac{1}{2} g t^2 \text{ sem sgn } t$$

relazioni delle quali la (39) dà la variazione dell'accelerazione; la (40) che è la sommazione della (39) dà l'accelerazione; la (41), che si ottiene per integrazione della (40), dà la velocità e infine la (42) che si ottiene per integrazione della (41) dà lo spazio percorso.

Come si scorge la (39), (40), (41), (42) valgono tanto per t negativo quanto per t positivo, mentre le formole usuali valgono solo per valori di t non negativi e per valori di $t < 0$ danno valori non corrispondenti al fenomeno reale.

Matematica. — *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica sollecitata agli estremi.* Nota ⁽¹⁾ di G. LAMPARIELLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Se si considera un'asta sollecitata agli estremi da una pressione costante F , le vibrazioni trasversali di essa sono rette dall'equazione a derivate parziali ⁽²⁾

$$(E) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{F}{EJ} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho g}{EJ} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

dove $u(x, t)$ è lo spostamento, ρ la densità, g l'area della sezione trasversale, J il momento d'inerzia di questa rispetto all'asse neutro, E il modulo di Young. Supposti costanti i coefficienti di (E) potremo scegliere le variabili t, x in tal modo che essi risultino eguali ad 1; basterà assumere come nuove variabili rispettivamente

$$\frac{1}{\sqrt{\rho g}} \sqrt{\frac{F}{EJ}} t, \quad \sqrt{\frac{F}{EJ}} x.$$

Ritenendo per queste le stesse notazioni t, x , l'equazione diventa

$$(I) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ed è stata recentemente studiata dal prof. T. Levi-Civita ⁽³⁾ nell'analisi delle piccole oscillazioni di un filetto vorticoso in prossimità della forma circolare.

Appoggiandosi su un notevole lemma, dovuto ad Almansi, egli ha dimostrato l'esistenza e l'unicità dell'integrale $u(x, t)$ di (I), periodico rispetto ad x di periodo 2π , note le condizioni iniziali (del tipo di Cauchy) rispetto alla variabile t .

In questa Nota mi propongo di dimostrare l'unicità dell'integrale di (I) (e quindi di (E)), sostituendo alla periodicità un tipo di condizioni al con-

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1932.

(2) Cfr. *Handbuch der Physik*, Bd. VI, *Elastokinetik*, p. 365, Berlin, Springer, 1928 e, per un'equazione più generale, la Nota di G. KRALL, *Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico*, in questi «Rendiconti», vol. III, serie 6^a (1926).

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi*, «Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa», s. II, vol. I, pp. 1-33, 229-250 (1932); *Teoremi di unicità e di esistenza per le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso prossimo alla forma circolare*, «Rend. Lincei», vol. XV, serie 6^a (1932).

L'equazione (I) è stata studiata da Eulero in una ricerca sulle campane sonore; in una questione di elettromagnetismo da G. FUBINI nella Nota: *L'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico e l'equazione di Eulero delle campane sonore*, «Rend. Lincei», vol. XVIII, pp. 389-390 (1909).

torno, classiche nei problemi di Elasticità. Conviene notare che alla (1) non è applicabile il teorema di Cauchy-Kowalevsky rispetto alla variabile $t^{(1)}$ e d'altra parte il relativo teorema di unicità non è senz'altro conseguibile come per l'equazione del calore. Peraltro, l'unicità dell'integrale risulta valida finchè è soddisfatta una limitazione dalle quantità E, J, F , suscettibile di una notevole interpretazione meccanica.

Più precisamente, dimostreremo che, sotto le solite condizioni di regolarità per le derivate parziali di $u(x, t)$ che occorre considerare, è unico l'integrale $u(x, t)$ di (1) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = u_1(x)$$

per ogni x di un intervallo $(0, l)$; e alle condizioni (di incastro agli estremi)

$$(3) \quad u(0, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad u(l, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0.$$

Osserviamo che dalle (3) seguono le condizioni

$$(3') \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 \quad \text{per } x = 0, x = l.$$

Attesa la linearità della (1), basta, come è ben noto, supporre le $u_0(x)$, $u_1(x)$ identicamente nulle ed allora tutto si riduce a far vedere che un integrale $u(x, t)$ di (1) soddisfacente alle (3) e inizialmente nullo è tale qualunque sia t .

A tale scopo, diciamo R il rettangolo del piano (t, x) a lati paralleli agli assi, di vertici opposti $(0, 0)$, (t, l) e, dopo aver moltiplicato ambo i membri di (1) per $\frac{\partial u}{\partial t}$, integriamo in R . Ogni integrale $u(x, t)$ di (1) soddisfa alla relazione

$$(4) \quad \int_R \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) dR = 0.$$

Integrando per parti e tenendo conto delle (3'), si ha:

$$\begin{aligned} \int_R \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dR &= \int_0^t dt \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx = \int_0^t dt \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

(1) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Sopra un'equazione alle derivate parziali del 4° ordine*, «Rend. Lincei», s. 6ª, vol. XV, p. 37 (1° sem. 1932); per il teor. di unicità relativo alla equazione della mia Nota ora citata, cfr. F. SBRANA, *Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta solida, elastica e omogenea*, «Rend. Lincei», s. 5ª, vol. XXX, pp. 256-257.

Analogamente, si trova che

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dR = - \int_0^t dt \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dR = \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

e la (4) si trasforma in

$$(4') \quad \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Ciò posto, se una funzione $f(x)$, continua insieme con la sua derivata prima, assume lo stesso valore agli estremi di un intervallo (a, b) in cui è nullo il suo valore medio, si ha

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b f'^2(x) dx$$

(lemma di Almansi) ⁽¹⁾. La $\frac{\partial u}{\partial x}$ soddisfa, per le (3), alle condizioni testè dichiarate nell'intervallo $(0, l)$, qualunque sia t , epperò si ha

$$\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \leq \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \leq \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx,$$

a condizione che $1 - \left(\frac{l}{2\pi} \right)^2 \geq 0$.

Sotto questa limitazione, dalla (4') si deduce che

$$\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \leq 0.$$

Ciò può essere soltanto se $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ per $0 \leq x \leq l$, qualunque sia t e poichè $u(x, t)$ è nullo per $t = 0$, è anche tale per ogni $t > 0$.

(1) Per una proposizione più generale, cfr. L. TONELLI, *Su una proposizione dell'Almansi*, « Rend. Lincei », vol. XXIII, pp. 676-682 (1914); cfr. altresì M. PICONE, « Boll. della Unione Mat. », anno I, pp. 97-101 (1923) e F. SBRANA, « Rend. Lincei », vol. I, serie 6^a, pp. 204-206 (1925).

Tornando alla x originaria della (E), la limitazione ora trovata per l si trasforma in

$$(5) \quad \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{F}{EJ} \cong 0,$$

essendo λ la lunghezza dell'asta.

Il valore di F dedotto dalla (5) quando valga il segno di eguaglianza coincide col cosiddetto *carico critico* o *di punta* di Eulero per aste incastrate agli estremi.

Per questo, la condizione di equilibrio, come si può dimostrare, diviene tipicamente instabile, la prima frequenza del sistema si annulla, cioè il periodo diviene infinito, il che vuol dire, in sostanza, che in una vibrazione il sistema abbandona la configurazione di equilibrio per non ritornarci più.

Matematica. — *Sur l'intégration des équations de Hamilton pour une durée de temps infinie.* Nota ⁽¹⁾ di W. S. URBÁŃSKI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Soit donné un système d'équation de Hamilton

$$(1) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où $E = E(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ est une fonction analytique et uniforme.

Ces équations admettent l'invariant intégral

$$I = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

Envisageons la variété euclidienne à $2n$ dimensions Γ , dans laquelle (q_1, \dots, p_n) sont les coordonnées cartésiennes du point P représentant l'état du système dynamique.

Dans ce qui suit nous nous appuyons sur deux théorèmes de H. POINCARÉ ⁽²⁾.

Théorème 1. — Si le point P reste à distance finie, par tous les points de Γ , sauf peut-être un ensemble de mesure nulle, passent des solutions des équations (1) périodiques ou quasi-périodiques.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1932.

(2) H. POINCARÉ, « Acta Math. » 13 (1890), pp. 67-72 et 66; *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. III, Ch. 26; C. CARATHÉODORY, « Ber. », Berl., 1919, p. 580.

Envisageons une portion S d'une surface sans contact, et soit $V_n = V \cos \nu$ ($\cos \nu \geq d > 0$) la composante normale à S de la vitesse $V = \sqrt{\sum (\dot{q}_i^2 + \dot{p}_i^2)}$ aux points de S .

Remarquons qu'un ensemble sur S de mesure non nulle (à $n - 1$ dimensions) engendre dans l'espace Γ un ensemble de trajectoires de mesure non nulle (à n dimensions).

Donc les trajectoires issues des points de la surface S (sauf, peut-être, un ensemble de mesure nulle, selon le théorème 1) retournent à couper sur S les i -ers conséquents des points initiaux.

P étant un point quelconque, non appartenant à l'ensemble exceptionnel susdit, tout voisinage A_1 de P engendre, dans le temps qui varie d'une manière continue, ses points conséquents qui forment ensemble un domaine B_1 qui s'appelle le i -er conséquent de A_1 . Une portion A_2 du domaine restant $S - A_1$ engendra à son tour un domaine B_2 conséquent de A_2 ; et ainsi de suite. Ainsi on trouve sur S une suite (finie ou dénombrable) A_i de domaines antécédants qui engendrent leurs domaines conséquents B_i . $\sum A_i$, et également $\sum B_i$ épuisent presque tout le domaine S .

Un domaine pris arbitrairement sur la surface S se décompose en un ensemble de sous-domaines situés dans les A_i ; et ces parties engendrent leurs domaines conséquents, comme parties de B_i . Leur ensemble s'appelle le i -er conséquent (au sens généralisé) du domaine initial.

De même on trouve des domaines conséquents d'ordre 2, 3, ...

Théorème 2. — Soit A un domaine de la surface sans contact et B son domaine conséquent (d'ordre quelconque), on a alors

$$\int_A V_n dS = \int_B V_n dS.$$

De ce théorème résulte immédiatement, à cause de l'inégalité évidente $0 < m \leq V_n \leq M$, où m et M sont deux nombres fixes pour S , que le rapport des grandeurs de A et B reste dans les limites m/M et M/m

$$(2) \quad \frac{m}{M} \leq \frac{\text{volume } B}{\text{volume } A} \leq \frac{M}{m}.$$

Ces considérations s'étendent aussitôt au cas, où, au lieu des domaines A et B , on prendrait un ensemble mesurable E sur S et son ensemble conséquent E_i (d'ordre quelconque d'ailleurs, mais défini). La mesure de l'ensemble E_i reste dans les limites:

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{m}{M} \text{ mes } E \quad \text{et} \quad \frac{M}{m} \text{ mes } E.$$

On peut écrire les intégrales du système d'équations (1) dans le voisinage d'un point choisi et pour une durée du temps bornée sous la forme

$$(3) \quad \Phi_i(q_1, \dots, p_n) = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n-1),$$

$$\Phi_{2n}(q_1, \dots, p_n) = a_{2n} + t$$

ou bien

$$(4) \quad q_i, p_j = F_k(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n} + t) \\ (i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Dans cette représentation un système de valeurs des a_1, \dots, a_{2n-1} définit une trajectoire, et a_{2n} donne la position du point sur sa trajectoire au moment initial.

Les fonctions F_k donnant les solutions locales sont des fonctions univoques des constantes d'intégration a_i . La question se pose: Est-ce qu'il est possible de donner des fonctions intégrales de la forme (4) pour une durée de temps infinie. La réponse est donnée par le théorème suivant:

Théorème. — Si presque toutes (c'est-à-dire excepté, peut-être, un ensemble de mesure nulle) les trajectoires ne sont pas périodiques, les intégrales des équations (1) ne peuvent pas être représentées pour un temps illimité par des fonctions F_k (4) univoques et mesurables des paramètres a_i .

Démonstration. — Reprenons la surface sans contact S . Le temps de retour des points de S a son minimum τ .

Envisageons un domaine D de valeurs des quantités $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$ choisi de manière que a_{2n} varie de c , $0 < c < \tau$.

Supposon que les équations (4) pour $t = 0$ transforment univoquement l'ensemble de valeurs admissibles des a_i situées dans D en un ensemble E de points de l'espace Γ .

Cet ensemble E est composé de segments de trajectoires, dont chacun peut avoir avec S au plus un point en commun.

L'ensemble $H = E \cap S$ de points de E situés sur S , s'il est mesurable, a une mesure, $\text{mes } H$, qui peut être $= 0$ ou > 0 . Si tous les domaines tels que D donnent sur S des ensembles H de mesure nulle, leur somme donnerait aussi la mesure nulle, et la surface S ne serait pas épuisée par de tels ensembles.

Donc, il faut qu'il y ait un domaine D qui donnerait sur S un ensemble H de mesure non nulle. De l'univocité résulte qu'à un système de valeurs $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ correspond une trajectoire définie dont les points (pour t fixé) se distinguent par les valeurs de a_{2n} qui pour une courbe non fermée prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

Faisons croître le temps de 0 à $+\infty$.

L'ensemble H formera successivement ses conséquents H_1, H_2, \dots .

Les points des trajectoires non-cycliques qui se trouvent dans H forment un sous-ensemble H^* qui n'a pas des points communs avec ses conséquents H_1, H_2, \dots . L'ensemble H^* est mesurable, car on peut démontrer que l'ensemble des trajectoires cycliques est mesurable.

Les mesures des ensembles H_i^* s'ajoutent simplement.

Elles varient selon (2 bis) dans certaines limites.

Supposons que les trajectoires non-cycliques ne sont pas exceptionnelles (de mesure nulle). On peut alors trouver un domaine D et un ensemble correspondant H^* de mesure positive, mes $H^* > 0$.

Alors la somme de mesures des ensembles sans points communs

$$\text{mes } H^* + \text{mes } H_1^* + \text{mes } H_2^* + \dots$$

croîtrait infiniment, ce qui est impossible.

Donc H^* qui n'est pas de mesure nulle ne peut pas être non plus de mesure positive; il est non-mesurable, ainsi que l'ensemble H.

Et l'ensemble E dont H est l'intersection avec la surface S est aussi non mesurable (il faut avoir égard à la structure spéciale de l'ensemble E mentionnée plus haut).

Le système des fonctions (4) n'est pas mesurable C. Q. F. D.

Corollaire. — Les fonctions F_k ne peuvent pas être multivoques à multiplicité finie, des qu'on suppose que les ensembles de points de l'espace Γ correspondant à des valeurs des $a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$ dont la pluralité est $p = 1, 2, 3, \dots$ sont des ensembles mesurables.

Pour la démonstration il faut considérer l'un après l'autre ces ensembles de (a_1, \dots, a_{2n}) pour $p = 1, 2, \dots$ et répéter des raisonnements analogues à ceux qui précèdent.

Le théorème démontré met une limite aux solutions des problèmes de la mécanique: une méthode mathématique qui nous conduirait à un système de fonctions du type (4), valable pour un temps illimité ne peut pas réussir, sinon les solutions sont presque toutes cycliques.

Telle est p. e. la représentation des solutions en séries trigonométriques.

Le resultat obtenu peut trouver son application au problème des trois corps.

Matematica (Geometria). — *Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif* P_{n-1} ($n \geq 3$). Nota ⁽¹⁾ di di V. HLAVATÝ, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

La question concernant les courbures projectives d'une courbe dans le plan ou l'espace (projectif) a été déjà plus d'une fois traitée et résolue ⁽²⁾.

Étant donnée une courbe dans l'espace projectif (linéaire) P_{n-1} à $n - 1$ dimensions, on peut se demander, s'il existe ou non, un algorithme indépendant du nombre n (> 2), lequel nous permettrait d'envisager la question sur les courbures projectives d'une courbe pour n'importe quel n et n'importe quel facteur de proportionnalité qui intervient dans les coordonnées homogènes du point mobile de la courbe en question ⁽³⁾. Un tel algorithme existe, comme nous verrons immédiatement. Il repose sur les invariants (par rapport au changement du facteur dans les coordonnées projectives) I_2, \dots, I_n qui ont les propriétés suivantes: *a*) Leur expression moyennant des coefficients « a » (dont nous parlerons plus tard) ne dépend pas de n . *b*) Ils caractérisent complètement ⁽⁴⁾ une courbe dans P_{n-1} . *c*) On en peut construire une expression différentielle, invariante non seulement par rapport au changement du facteur mais aussi par rapport à n'importe quelle transformation du paramètre et cette expression donne naissance à « l'arc projectif » qui est d'ordre $\binom{n}{2}$ pour n pair et d'ordre $\binom{n}{2} + n - 1$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1932.

(2) Citons au moins G. FUBINI - E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale* (Bologna, Zanichelli, 1926), tomo I, cap. I; G. FUBINI - E. ČECH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (Paris, Gauthiers-Villars, 1931), chap. II et III (où le lecteur trouvera beaucoup de citations se rattachant à ce problème) et E. BOMPIANI, *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie* (Padova 1926), pp. 1-13 ainsi que E. ČECH, *Projektivní diferenciální geometrie* (Praha, Jednota českoslov. matematiků a fysiků, 1926) Kap. III.

(3) Une question analogue est la base du travail de L. BERZOLARI, *Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio* (« Annali di mat. pura ed applicata » (2), 26, 1897, pp. 1-58) qui constitue l'application de la méthode de HALPHEN (*Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre*, « Acta math. » (3), 1883, 325-380) développée pour l'espace à trois dimensions. Berzolari se sert des coordonnées non homogènes. L'algorithme, dont nous venons de parler au courant du texte se sert des coordonnées homogènes, conformément au point de vue moderne, influencé par les travaux cités ad 1). — Pour l'étude projective des courbes dans l'espace à quatre dimensions voir F. P. WHITE, *The projective generation of curves and surfaces in space of four dimensions* (« Proc. Cmbr. Phil Soc. », 21, (1922), pp. 210-227).

(4) Plus précisément: « Complètement à moins des homographies générales (aux coefficients constants) de l'espace en question ».

pour n impair. d) Si $n \geq 3$ les invariants I_3, \dots, I_n exprimés en fonction de l'arc projectif définissent complètement une courbe⁽¹⁾ et on peut les envisager comme des courbures projectives.

La première Note est consacrée à la construction des invariants I_2, \dots, I_n , dans les deux Notes suivantes nous traiterons la question concernant les courbures projectives et des exceptions.

1. Nous introduirons avant tout la notion du « poids » qui nous sera plus tard d'une grande utilité. Imaginons à cet effet une fonction

$$f\left(g(t), \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots\right)$$

des arguments $g, \frac{d^k g}{dt^k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) qui à leur tour dépendent d'un seul paramètre t et introduisons la transformation

$$(1) \quad t = c't,$$

c étant n'importe quelle constante numérique ($\neq 0$). Si

$$f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots\right) = c^r f\left(g, \frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots\right)$$

nous dirons que f est du poids r . Nous utiliserons bientôt cette notion.

Si en particulier $f = \frac{d^r g}{dt^r}$, cette fonction est du poids r , comme il suit de la définition de cette notion.

2. Soient x_1, \dots, x_n les coordonnées homogènes d'un point mobile x d'une courbe $C(t)$ dans l'espace projectif linéaire P_{n-1} à $n - 1$ dimensions. Nous dirons que la courbe en question est une courbe générale, si le déterminant

$$\left[x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right] \neq 0.$$

Dans ce qui suit nous ne traiterons que des courbes générales et de plus nous excluerons même les points d'une telle courbe, où le déterminant mentionné égale à zéro. Parce que les $n + 1$ points $x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}$ sont linéairement dépendants on a toujours

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i}(t) \frac{d^i x}{dt^i} = 0$$

(1) Plus précisément: « Complètement à moins des homographies générales (aux coefficients constants) de l'espace en question ».

où $a_0 = 1$ et de plus

$$\binom{n}{j} a_{n-j} = - \frac{\left[\frac{d^0 x}{dt^0}, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{j-1} x}{dt^{j-1}}, \frac{d^n x}{dt^n}, \frac{d^{j+1} x}{dt^{j+1}}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right]}{\left[\frac{d^0 x}{dt^0}, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right]},$$

pour $j = 0, \dots, n-1$ et $\frac{d^0 x}{dt^0} = x$. Il s'ensuit que a_{n-j} est du poids

$$\binom{n}{2} - j + n - \binom{n}{2} = n - j.$$

D'autre part, si $r > 0$, $\frac{d^r x}{dt^r}$ est du poids r ainsi que si nous attribuons à x le poids 0, le premier membre de l'équation (2) est isobare du poids n . Envisageons maintenant la transformation

$$(3) \quad x = p(t)^* x,$$

$p = p(t)$ étant n'importe quelle fonction qui n'est pas nulle pour aucune valeur de t de l'intervalle examiné et qui possède toutes les dérivées, dont nous aurons besoin. On trouve sans difficulté

$$\frac{d^i x}{dt^i} = \sum_0^i \binom{i}{k} \frac{d^{i-k} p}{dt^{i-k}} \frac{d^k {}^*x}{dt^k} \quad (i = 0, \dots, n)$$

ainsi que si l'on pose

$$(2)' \quad \sum_0^n \binom{n}{i} A_{n-i} \frac{d^i {}^*x}{dt^i} = 0$$

on obtient après un calcul facile

$$(3)' \quad A_m = \sum_0^m \binom{m}{i} a_{m-i} \frac{d^i p}{dt^i} \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

En introduisant la notation

$$(4) \quad p^* a_m = A_m, \quad P_m p = \frac{d^m p}{dt^m}, \quad (m = 0, \dots, n)$$

on obtient de (3)'

$$(5) \quad {}^*a_m = \sum_0^m \binom{m}{i} a_{m-i} P_i, \quad (m = 0, \dots, n)$$

et en particulier

$$(5)_0 \quad {}^*a_0 = a_0 = 1$$

$$(9)_1 \quad {}^*a_1 = a_1 + P_1$$

$$(5)_2 \quad {}^*a_2 = a_2 + 2 a_1 P_1 + P_2.$$

Remarquons expressément que les formules (5) ne dépendent pas de n . Parce que P_r est du poids r , on en déduit à cause de (5) que $*a_r$ est du poids r ⁽¹⁾.

3. On tire des équations (5) les relations

$$(6) \quad *a_h - a_h = \sum_i^h \binom{h}{i} a_{h-i} P_i \quad (h = 1, \dots, n)$$

qui peuvent être résolues par rapport aux P_1, \dots, P_n , car le déterminant

$$a = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & , & 0 & , & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{1} a_1 & , & \binom{2}{2} & , & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{1} a_2 & , & \binom{3}{2} a_1 & , & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{1} a_{n-1} & , & \binom{n}{2} a_{n-2} & , & \binom{n}{3} a_{n-3} & , & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Écrivons cette solution dans la forme

$$(7) \quad P_h = \sum_i^h (*a_i - a_i) \alpha_{hi}.$$

Il s'ensuit aussitôt en raison de (5) que

$$\alpha_{sr} = 0 \quad \text{pour} \quad r > s$$

tandis que, si $r \leq s$, les α_{sr} sont des fonctions entières rationnelles des arguments a_1, \dots, a_n et en particulier

$$(8) \quad \alpha_{hh} = 1 \quad (h = 1, \dots, n).$$

L'équation (7) nous apprend aussi que $\alpha_{hi} (h \geq i)$ est à fortiori du poids $h - i$. En effet, P_h étant du poids h , le second membre dans (7) est nécessairement isobare du poids h et par conséquent $*a_i - a_i$ étant du poids i - notre assertion est démontrée.

Si l'on désigne par l'accent la dérivée d'après t , on déduit de (4)

$$(9) \quad P'_k = P_{k+1} - P_k P_1.$$

(1) En employant une symbolique facile à comprendre, on peut écrire aussi pour (5)

$$(5 \text{ bis}) \quad *a_m = (a_0 + P_0)_m.$$

Or, si $k < n$, cette formule devient à cause de (7) (pour $h = k$, $k + 1, 1$)

$$(10) \quad P'_k = \sum_i^{k+1} (*a_i - a_i) \alpha_{k+1i} - (*a_1 - a_1) \sum_i^k (*a_i - a_i) \alpha_{ki}.$$

D'autre part on a en raison de (7) (pour $k = h$)

$$(11) \quad P'_k = \sum_i^k (*a'_i - a'_i) \alpha_{ki} + \sum_i^k (*a_i - a_i) \alpha'_{ki}.$$

En exprimant que les deux premiers membres dans (10) et (11) sont égaux, on obtient (toujours pour $k < n$) l'identité isobare

$$(12) \quad 0 = \sum_i^k (*a'_i - a'_i + (*a_1 - a_1) (*a_i - a_i)) \alpha_{ki} + \\ + \sum_i^k (*a_i - a_i) \alpha'_{ki} + \sum_i^{k+1} (a_i - *a_i) \alpha_{k+1i}$$

valable pour n'importe quel facteur p . Il s'ensuit nécessairement qu'on peut l'écrire

$$(12 \text{ bis}) \quad I_{k+1}(a) - I_{k+1}(*a) = 0 \quad (1 \leq k < n)$$

où I_{k+1} est un invariant par rapport aux transformation (3).

4. Nous avons obtenu ainsi $n - 1$ invariants $I_q(a) = I_q(*a)$ ($q = 2, \dots, n$) dont nous voulons mentionner expressément les propriétés suivantes:

I. L'invariant $I_q(a)$ est une fonction entière rationnelle des coefficients a_1, \dots, a_n du poids q . Cette assertion est la conséquence immédiate de l'identité isobare (12) et des propriétés déjà mentionnées des coefficients α .

II. La même équation nous apprend que le coefficient a_q intervient dans $I_q(a)$, multiplié par $+1$ (1).

III. L'invariant I_q ne contient que les coefficients a_1, \dots, a_q ainsi que les dérivées a'_1, \dots, a'_{q-1} , ces dernières linéairement. C'est ce que l'on trouve immédiatement, en tenant compte de ce que le poids des coefficients

(1) Si l'on tient compte de (8), l'équation (12) peut s'écrire aussi

$$(12)' \quad a_{k+1} - *a_{k+1} + (a_k - *a_k) \alpha_{k+1k} - (a_k - *a_k)' + (a_1 - *a_1) (a_k - *a_k) \\ + \sum_i^{k-1} [(a_i - *a_i) (\alpha_{k+1i} - \alpha'_{ki}) + (a_1 - *a_1) \alpha_{ki}] - (a'_i - *a'_i) \alpha_{ki} = 0.$$

Parmi les coefficients α qui interviennent dans cette équation il y en a un, dont le poids est le plus grand, à savoir $k + 1 - 1 = k$. Or, aucun des coefficients α ne peut contenir a_{k+1} qui est du poids $k + 1$.

α, α' qui interviennent dans la forme implicite (12) ne dépasse pas k et de plus que les coefficients α sont des fonctions entières et rationnelles des a .

IV. I_q ne dépend pas de n . C'est la conséquence immédiate du fait déjà constaté que les formules (5) ne dépendent pas de n . Pour éviter tout malentendu, nous voulons exprimer cette propriété encore d'une autre manière: Étant données deux courbes générales C dans P_{n-1} et \bar{C} dans P_{N-1} ($N > n$), l'invariant I_q ($q \leq n$) de C est exprimé moyennant les coefficients a de C de la même manière que l'est l'invariant \bar{I}_q de \bar{C} moyennant des coefficients \bar{a} .

Dans la Note suivante nous fructifierons les propriétés énumérées pour construire explicitement les invariants I .

Matematica (Geometria). — *Sulle condizioni per la regolarità di un sistema lineare di forme*. Nota⁽¹⁾ di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. Dato in S_{r+1} un sistema lineare (F_r^n) , privo di parte fissa, di forme d'ordine n , esso individua un sistema completo $|F_r^n|$, la cui dimensione virtuale $\delta_n^{(r)}$ si calcola valendosi della ben nota formula di postulazione⁽²⁾. La differenza

$$(1) \quad \omega_n^{(r)} = d_n^{(r)} - \delta_n^{(r)}$$

fra la dimensione effettiva $d_n^{(r)}$ di (F_r^n) e la dimensione virtuale di $|F_r^n|$ verrà brevemente detta *lo scarto* di (F_r^n) : essa può altresì esprimersi come differenza fra la sovrabbondanza e la deficienza di (F_r^n) , e riducesi alla sovrabbondanza per sistemi lineari completi⁽³⁾. È chiaro che lo scarto di (F_r^n) non supera quello di $|F_r^n|$, e che questi due sistemi hanno scarti uguali allora e soltanto allora quando essi coincidono.

Se si considerano in S_{r+1} sistemi lineari completi $|F_r^n|, |F_r^{n+1}|, \dots$ definiti dalle stesse varietà base colle stesse molteplicità, e di ordini via via crescenti, i relativi scarti riescono tutti nulli a partire da un certo valore dell'ordine n ⁽⁴⁾; allora — ove si avesse unicamente riguardo a ciò che succede pei sistemi lineari di curve piane (caso di $r = 1$) — verrebbe fatto di denominare regolari i suddetti sistemi da quell' n in poi⁽⁵⁾. Però, come

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1932.

(2) Cfr. p. es. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2^a ediz. (Messina, Principato, 1923), p. 302.

(3) Lo scarto può, a seconda dei casi, esser positivo, nullo o negativo; e ciò, se $r > 1$, anche per sistemi completi: ved. p. es. a p. 300 del Trattato dianzi citato.

(4) Ved. p. es. E. BERTINI, op. cit., p. 302.

(5) Così effettivamente fa il BERTINI nel libro citato.

già mostra la teoria dei sistemi lineari di superficie (caso di $r = 2$) e come più in generale risulterà implicitamente dal seguito per r qualunque, la definizione che così si darebbe non è la più conveniente per gli sviluppi e le applicazioni ulteriori⁽¹⁾; e noi, uniformandoci a quest'ultimo caso, diremo che $|F_r^n|$ è *regolare* quando tutti i sistemi $|F_r^{n+1}|, |F_r^{n+2}|, \dots$ segano un iperpiano generico secondo sistemi lineari completi e regolari. Vedremo poi (n. 4) che, in tale ipotesi, quei sistemi $|F_r^{n+1}|, |F_r^{n+2}|, \dots$ e $|F_r^n|$ hanno di conseguenza scarti nulli.

In base a ciò che precede, la nozione di *sistema regolare di forme*, essendo acquisita in S_{r+1} , non appena la si possenga in S_r , resta pienamente determinata in ogni caso per induzione completa, solo che si convenga che per $r = 0$ — ossia sulla retta — ogni serie lineare è regolare. Proveremo (n. 2) che per $r = 1$ la suddetta definizione di regolarità non differisce da quella comunemente ammessa per i sistemi lineari di curve piane; dunque per $r = 2$ essa concorda con quella di CASTELNUOVO, di cui, per r qualunque, costituisce la naturale estensione.

Tale definizione, per quanto spontanea, si presenta assai scomoda per le applicazioni, perchè basata su di un processo d'induzione e perchè esige la considerazione degli infiniti sistemi lineari $|F_r^{n+1}|, |F_r^{n+2}|, \dots$. In questa Nota — insieme ad altri risultati — vien dimostrato un semplice criterio, secondo cui, per stabilire se un sistema lineare assegnato in S_{r+1} è o non è regolare, basta effettuare un numero finito ($= r$) di verifiche; e precisamente:

Condizione necessaria e sufficiente per la regolarità di $|F_r^n|$ è che si annullino gli scarti dei sistemi lineari che $|F_r^{n+1}|, |F_r^{n+2}|, \dots, |F_r^{n+r}|$ rispettivamente segano su un generico S_r, S_{r-1}, \dots, S_1 di S_{r+1} .

OSSERVAZIONE. — Dalla definizione segue immediatamente che se $|F_r^n|$ è regolare, pure $|F_r^{n+1}|, |F_r^{n+2}|, \dots$ sono regolari; e, se anche $|F_r^n|$ non fosse regolare, in quella successione si incontrano di certo dei sistemi regolari, purchè ci si spinga convenientemente innanzi⁽²⁾.

(1) Ved. la definizione data per $r = 2$ da G. CASTELNUOVO, al n. 7 della Memoria: *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, « Annali di Mat. », serie II, t. 25 (1897). Che questa definizione possa differire da quella di BERTINI, risulta dal seguente esempio. Consideriamo in S_3 la curva del 20° ordine comune ad una F_2^4 e ad una F_2^5 ; il sistema $|F_2^5|$ delle superficie del 5° ordine che passano per la curva suddetta e per tre punti allineati di quella F_2^5 ha scarto nullo, e lo stesso accade per i sistemi lineari $|F_2^6|, |F_2^7|, \dots$ definiti dalle stesse varietà base: ciò non ostante $|F_2^5|$ non è regolare secondo CASTELNUOVO, in quanto $|F_2^5|$ sega un piano generico secondo un sistema lineare non regolare ed incompleto (avente la sovrabbondanza e la deficienza uguali ad 1).

(2) Quest'ultimo fatto risulta facilmente da una proposizione che, p. es., trovasi a p. 302 del Trattato cit. di BERTINI.

2. Nel caso dei sistemi lineari di curve piane, mostreremo l'identità fra la nostra definizione e quella solita, ed in pari tempo proveremo la proposizione finale del numero precedente, facendo vedere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare completo di curve piane d'ordine n sia regolare (secondo la comune accezione), è che il sistema lineare completo di curve d'ordine $n + 1$ colle stesse singolarità determini su di una retta generica una g_{n+1}^{n+1} .

Conserviamo le notazioni del n. 1, omettendo solo, per semplicità, di scrivere l'indice $r = 1$. Se k è la postulazione del gruppo base di $|F^n|$, si ha

$$\delta_n = \binom{n+2}{2} - k - 1,$$

eppertanto:

$$(2) \quad \delta_{n+2} - 1 = 2\delta_{n+1} - \delta_n, \quad (3) \quad \delta_{n+1} - \delta_n - 1 = n + 1.$$

Prese nel piano due rette generiche A, B , tagliantisi in un punto P , i sistemi $|F^{n+1}| + A, |F^{n+1}| + B$ si intersecano secondo il sistema lineare $|F^n| + A + B$, e sono congiunti da un sistema lineare che è contenuto nel (o coincide col) sistema costituito dalle curve di $|F^{n+2}|$ che passano per P . Risulta dunque

$$(4) \quad d_{n+2} - 1 \geq 2d_{n+1} - d_n,$$

ossia, in base alle (2), (1) [ove, p. es., con $\omega_n (\geq 0)$ si indichi lo scarto (cioè la sovrabbondanza) di $|F^n|$]:

$$\omega_{n+2} \geq 2\omega_{n+1} - \omega_n.$$

In quest'ultima limitazione si può manifestamente porre successivamente $n + 1, n + 2, \dots$ in luogo di n ; si ha in tal guisa:

$$(5) \quad \omega_n - \omega_{n+1} \geq \omega_{n+1} - \omega_{n+2} \geq \omega_{n+h} - \omega_{n+h+1} \quad (\text{per } h = 1, 2, \dots).$$

Per h convenientemente grande è notoriamente $\omega_{n+h} = \omega_{n+h+1} = 0$. Basta quindi che si abbia

$$(6) \quad \omega_n - \omega_{n+1} = 0,$$

perchè, in forza delle (5), debba esser $\omega_{n+1} - \omega_{n+2} = 0$, e similmente $\omega_{n+2} - \omega_{n+3} = 0$, ecc., ossia

$$\omega_n = \omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \dots = \omega_{n+h} = 0,$$

onde $|F^n|$ risulta regolare; e viceversa, se $|F^n|$ è regolare vale la (6).

D'altronde, per le (1), (3), si ha:

$$d_{n+1} - d_n - 1 = n + 1 - (\omega_n - \omega_{n+1});$$

ciò prova l'asserto, poichè la (6), in base a quest'ultima relazione, vien precisamente ad esprimere che la serie lineare segata da $|F^{n+1}|$ su di una retta generica ha dimensione $n + 1$.

3. Prima di passare al caso di r qualunque, indichiamo qualche conseguenza ulteriore delle considerazioni svolte al numero precedente.

Si è visto che, se $|F^n|$ è regolare, nelle limitazioni (5), e quindi pure nella (4), deve dappertutto prendersi il segno $=$. Ciò prova il teorema di CASTELNUOVO, secondo cui, nell'ipotesi suddetta, $|F^{n+2}|$ risulta la somma minima di $|F^{n+1}|$ e delle rette del piano (1).

Se invece $|F^n|$ non è regolare, non potrà valere la (6), e quindi, dovendo in virtù delle (5) essere $\omega_n - \omega_{n+1} \geq 0$, si avrà $\omega_{n+1} \leq \omega_n - 1$. Se neppure $|F^{n+1}|$ è regolare, sarà parimenti $\omega_{n+2} \leq \omega_{n+1} - 1$, ossia $\omega_{n+2} \leq \omega_n - 2$. Così proseguendo, si vede che si ottiene certamente un sistema completo collo scarto nullo, almeno quando l'ordine ha raggiunto il valore $n + \omega_n$. Dunque:

Dato in un piano un sistema lineare di ordine n e sovrabbondanza ω_n , il sistema lineare di ordine $n + \omega_n$, avente lo stesso gruppo base colle stesse molteplicità, riesce sempre regolare.

4. Trattiamo ora il caso generale in cui è $r > 1$. Giusta il n. 1, dobbiamo considerare in S_{r+1} i sistemi lineari completi $|F_r^n|, |F_r^{n+1}|, \dots$; fissatone uno, $|F_r^{n+h}|$ (ove h può assumere uno qualunque dei valori $0, 1, 2, \dots$), sia (F_i^{n+h}) il sistema lineare da esso determinato su di un S_{i+1} generico di S_{r+1} (per $i = 0, 1, \dots, r-1$): possiamo senza restrizione supporre — come facciamo — che S_{i+1} appartenga ad S_{i+2} . Diciamo $d_{n+h}^{(i)}$ ed $\omega_{n+h}^{(i)}$ la dimensione effettiva e lo scarto di (F_i^{n+h}) , ed indichiamo con $\delta_{n+h}^{(i)}$ la dimensione virtuale di $|F_i^{n+h}|$, talchè sarà:

$$(7) \quad \omega_{n+h}^{(i)} = d_{n+h}^{(i)} - \delta_{n+h}^{(i)}.$$

In S_{i+2} , fra le forme di (F_{i+1}^{n+h+1}) contenenti come parte S_{i+1} , vi sono quelle le cui parti ulteriori costituiscono (F_{i+1}^{n+h}) , e non ve ne sono altre se quest'ultimo sistema è completo. Poichè (F_{i+1}^{n+h+1}) sega S_{i+1} secondo (F_i^{n+h+1}) , così, nell'ipotesi suddetta, dev'essere:

$$(8) \quad d_{n+h+1}^{(i+1)} - (d_{n+h}^{(i+1)} + 1) = d_{n+h+1}^{(i)}.$$

Per h sufficientemente grande, i sistemi dianzi considerati riescono completi ed a scarti nulli (n. 1, OSSERVAZIONE), ond'è:

$$(9) \quad \delta_{n+h+1}^{(i+1)} - (\delta_{n+h}^{(i+1)} + 1) = \delta_{n+h+1}^{(i)};$$

(1) Ved. G. CASTELNUOVO, Mem. cit., n. 2.

siccome però le δ si esprimono mediante le formule di postulazione come funzioni algebriche determinate dei relativi argomenti, così la (9) dev'essere un'identità valida per ogni h . Dalle (7), (8), (9) segue la:

$$(10) \quad \omega_{n+h+1}^{(i+1)} - \omega_{n+h}^{(i+1)} = \omega_{n+h+1}^{(i)},$$

nell'ipotesi ammessa che (F_{i+1}^{n+h}) sia completo.

Suppongasì ora che $|F_r^n|$ sia regolare. Per definizione, saranno regolari e completi i sistemi (F_{r-1}^{n+h}) per $h \geq 1$; per lo stesso motivo dovranno esser regolari e completi i sistemi (F_{r-2}^{n+h}) per $h \geq 2$, ed anche — più in generale — i sistemi (F_j^{n+h}) per $h \geq r-j$ ($j = 0, 1, \dots, r$). Dico che tutti questi sistemi hanno scarti nulli, ossia che è

$$(11) \quad \omega_{n+h}^{(j)} = 0 \quad \text{per } h \geq r-j, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

Ciò è evidente per $j = 0$, poichè nella retta ogni serie lineare g_{n+h} completa ha dimensione (effettiva e virtuale) $n+h$. Basterà dunque stabilire la (11) per $j = i+1$, nell'ipotesi ch'essa valga per $j = i$, supposto cioè che sia:

$$(12) \quad \omega_{n+h+1}^{(i)} = 0 \quad \text{per } h+1 \geq r-i.$$

Ora effettivamente, per $h \geq r-(i+1)$, (F_{i+1}^{n+h}) essendo completo, si può applicare la (10) e quindi, in base alla (12), si ottiene:

$$\omega_{n+h}^{(i+1)} = \omega_{n+h+1}^{(i+1)}.$$

Questa relazione mostra che, al variare di h , purchè sia $h \geq r-(i+1)$, gli scarti $\omega_{n+h}^{(i+1)}$ risultano uguali fra loro; e pertanto sono tutti nulli, dovendo essi annullarsi per h convenientemente grande.

La (11), che così abbiamo stabilita, nella quale si faccia $j = r$, prova in particolare che:

Se un sistema lineare $|F_r^n|$ è regolare (secondo la definizione posta al n. 1), esso e tutti i sistemi $|F_{r-1}^{n+1}|, |F_{r-2}^{n+2}|, \dots$ hanno scarti nulli.

Se invece nella (11) si fa $h = r-j$, per $j = 0, 1, \dots, r-1$, si ottengono le

$$(13) \quad \omega_{n+r}^{(0)} = \omega_{n+r-1}^{(1)} = \dots = \omega_{n+1}^{(r-1)} = 0,$$

che dimostrano la necessità delle condizioni enunciate al n. 1 per la regolarità di $|F_r^n|$.

5. Per dimostrare la parte inversa del teorema finale del n. 1, dobbiamo far vedere che — ferme restando le notazioni del numero precedente — se valgono le (13) il sistema $|F_r^n|$ è regolare. All'uopo procederemo col

metodo d'induzione completa, e proveremo il teorema in discorso nell'ipotesi ch'esso valga per sistemi lineari appartenenti a spazi di dimensione $\leq r$; da ciò seguirà la tesi, in virtù del n. 2.

Incominciamo collo stabilire che, in forza delle (13), i sistemi lineari (F_i^{n+r-i}) risultano regolari e completi per $i = 0, 1, \dots, r-1$. La cosa è evidente per (F_0^{n+r}) , essendo per ipotesi $\omega_{n+r}^0 = 0$; basterà dunque far vedere che, per $0 < i < r$, (F_i^{n+r-i}) è regolare e completo, quando già si sappia che tali sono $(F_0^{n+r}), \dots, (F_{i-1}^{n+r-i+1})$. Osserviamo intanto che il sistema lineare completo $|F_i^{n+r-i}|$ sega gli spazi S_1, \dots, S_i secondo sistemi lineari che, dovendo contenere i sistemi $(F_0^{n-r}), \dots, (F_{i-1}^{n+r-i+1})$ per ipotesi completi, debbono ordinatamente coincidere con questi ultimi. E siccome essi hanno scarti nulli, così - per quanto si è ammesso da principio - il sistema completo $|F_i^{n+r-i}|$ risulta regolare. Ma allora (n. 4) questo sistema è a scarto nullo; e, tale essendo pure per ipotesi il sistema (F_i^{n+r-i}) in esso contenuto, si conclude (n. 1) che i due sistemi coincidono, e quindi - come volevasi - che il secondo è regolare.

Da qui, in base all'OSSERVAZIONE del n. 1, si ha che anche tutti i sistemi completi $|F_j^{n+k}|$, per $j = 0, 1, \dots, r-1$ e $k \geq r-j$, sono regolari. Vogliamo, sotto le stesse condizioni per j e k , provare la regolarità e completezza di (F_j^{n+k}) . Questo fatto è già stato poc'anzi associato per $j = 0, 1, \dots, r-1$ e $k = r-j$; esso d'altronde è evidente per $j = 0$ e $k \geq r$ qualsiasi, in quanto sulla retta S_1 la somma minima della serie completa (F_0^{n+r}) e della g_{k-r}^{k-r} appartiene alla $g_{n+k}^{n+k} (F_0^{n+k})$, la quale ultima riesce pertanto completa come la prima. Ragionando anche qui per induzione, potremo dunque ammettere che (F_j^{n+k}) risulti regolare e completo

$$\text{per } j = i, \quad k \geq r-i$$

$$\text{e per } j = i+1, \quad r-i-1 \leq k \leq h$$

(comunque si siano fissati $i = 0, 1, \dots, r-2$, $h \geq r-i-1$), e basterà dimostrare che (F_{i+1}^{n+h+1}) è regolare e completo. Ora, per le ipotesi fatte, (F_i^{n+h+1}) e (F_{i+1}^{n+h}) sono regolari e completi, onde hanno scarti nulli; inoltre, per la completezza di (F_{i+1}^{n+h}) , può applicarsi la (10), dalla quale segue

$$\omega_{n+h+1}^{(i+1)} = 0.$$

Dunque il sistema (F_{i+1}^{n+h+1}) ha scarto nullo, e quindi deve coincidere col sistema completo $|F_{i+1}^{n+h+1}|$, esso pure a scarto nullo perchè regolare; si conclude così, nel modo voluto, con la regolarità e completezza del primo sistema.

Da ciò che precede si ha in particolare, per $j = r - 1$, che tutti i sistemi $(F_{r-1}^{n+1}), (F_{r-1}^{n+2}), \dots$ sono regolari e completi, il che significa appunto che il sistema completo $|F_r^n|$ considerato inizialmente è regolare.

OSSERVAZIONE 1^a. — In base ai nn. 4 e 5 si ha facilmente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché $|F_r^n|$ sia regolare è che gli r sistemi $|F_r^{n+1}|, \dots, |F_r^{n+r}|$ seghino un iperpiano generico secondo sistemi lineari completi e regolari; in tale ipotesi, cioè, la stessa proprietà sussiste per sistemi $|F_r^{n+r+1}|, |F_r^{n+r+2}|, \dots$.

OSSERVAZIONE 2^a. — Il teorema di CASTELNUOVO — di cui al n. 3 — si può generalizzare senza difficoltà, nel modo seguente:

Se il sistema $|F_r^n|$ è regolare, la somma minima di $|F_r^{n+r}|$ e degli iperpiani di S_{r+1} , è il sistema completo $|F_r^{n+r+1}|$.

La dimostrazione si può svolgere per induzione sulle orme di quella data nei nn. 2 e 3, avendo riguardo al fatto che (n. 4) $|F_r^{n+2}|$ determina su di un generico S_{r-1} di S_{r+1} , un sistema lineare regolare e completo, al quale può venir applicato il teorema da dimostrarsi.

Meccanica. — *Sulla legge delle aree di un moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo.* Nota ⁽¹⁾ di M. CIMINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Premessa. — Il problema del moto di un punto materiale di massa infinitesima sotto l'azione di un campo gravitazionale generato da una distribuzione di masse dotate di simmetria sferica, è stato, in sede relativistica, rigorosamente risolto con la costruzione del noto elemento lineare cronotopico assegnato dallo Schwarzschild. Nel passare però allo studio effettivo degli elementi di tale moto, quali le traiettorie e le leggi temporali, risulta (e lo vedremo nella presente Nota) via più espressiva e più accessibile alla diretta intuizione quella che permette di riferirsi nello studio stesso a ben conosciuti moti newtoniani, nell'ordinario cronotopo galileiano. A tal fine, e per tale moto, fu dato dal Levi-Civita ⁽²⁾ un « principio di equivalenza », valido in seconda approssimazione ⁽³⁾, che ci limitiamo qui

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1932.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*. Zanichelli, Bologna, 1928. Cap. I, § 11 e Cap. II, § 8, ove tale principio si trova inquadrato.

(3) Assumeremo in tutta la presente Nota come termini del 2° ordine tutti quelli che sono dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$, v essendo la velocità del mobile e c quella della luce: ricordiamo pure che con tale ordine si presenta nell'ordinario moto planetario il termine $\frac{fM}{\rho c^2}$.

semplicemente a riportare nel suo enunciato, poichè su di esso baseremo le nostre deduzioni.

Le traiettorie di un moto einsteiniano coincidono, in seconda approssimazione, con quelle di un moto newtoniano, nell'ordinario spazio euclideo, per il quale la forza derivi dal potenziale:

$$(1) \quad U_1 = \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) U_0 + \frac{3U_0}{c^2}$$

(ove è: $U_0 = \frac{x_0}{\rho} = \frac{fM}{\rho}$: M massa del corpo, o del sistema di corpi con simmetria sferica potenzianti; f costante di Argand-Gauss; ρ raggio vettore; c velocità della luce) e sia dotato di energia E . Detto inoltre t_1 il tempo (ordinario) di questo ausiliario problema newtoniano, esso risulta collegato al tempo cosmico t dalla seguente relazione differenziale:

$$(2) \quad dt = dt_1 \left(1 + \frac{4U_0}{c^2}\right),$$

che permette di dedurre, dalla risoluzione completa del problema newtoniano, anche la legge del tempo nel moto einsteiniano ⁽¹⁾.

Ma questo principio di equivalenza ci permetterà pure di assegnare alcune leggi del moto einsteiniano non già considerando tale moto nella varietà tridimensionale spaziale con metrica indotta dal ds dello Schwarzschild, ma considerandolo in un ordinario spazio euclideo. Tale genere di ricerche potrà sembrare, da un punto di vista di principio, come poco espressivo, data anche l'approssimazione del principio di equivalenza; ma dal punto di vista dell'effettivo studio dell'andamento del moto esso si dimostra fecondo. Nella presente Nota noi troveremo una « legge delle aree » valida per il moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo, la quale si presterà, come vedremo in altra prossima Nota, ad esprimere (sempre in uno spazio euclideo) la legge del tempo cosmico, nonchè i periodi di rivoluzione, *anomalistica* e *siderale* ⁽²⁾, ricorrendo semplicemente ai primi elementi di Meccanica celeste e, naturalmente, al suddetto principio di equivalenza.

Fin da ora osserviamo però che i risultati che così otterremo, non coincidono con quelli che si otterrebbero considerando il moto nel suo na-

(1) Il LEVI-CIVITA ha immediatamente dedotto dal suo principio di equivalenza l'avanzo del perielio per un moto einsteiniano: cfr. § 1.

(2) Cfr. J. CHAZY, *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*. Gauthier Villars, Paris, 1928, t. I, p. 124. Anomalistica è la rivoluzione che porta il corpo dal perielio al perielio nuovamente; siderale è quella che porta il corpo ad assumere la stessa anomalia. Le due definizioni non coincidono in sede relativistica, dato l'avanzare del perielio.

turale spazio einsteiniano: nel § 3 ci renderemo agevolmente conto della natura del divario. Ma riteniamo che, passando alle pratiche applicazioni astronomiche, in un confronto dei risultati della teoria con quelli forniti dalle osservazioni, occorrerà riferirsi alle leggi del moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo: ma anche di ciò a suo tempo.

§ 1. — Cominciamo con lo studiare classicamente l'orbita di un punto materiale di massa unitaria (da ritenere trascurabile di fronte alla massa M) sotto l'azione della forza derivante dal potenziale (1), (*orbita del moto einsteiniano nell'ordinario spazio euclideo*).

Ponendo:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) x_0 = \kappa \quad ; \quad \frac{6x_0^2}{c^2} = \mu \quad ; \quad 1 - \frac{\mu}{A_1^2} = \lambda; \\ \frac{\kappa}{A_1^2} = \Omega \quad ; \quad A_1 = \text{costante delle aree di tale moto classico;} \end{array} \right.$$

ed essendo la forza derivante dal potenziale U_1 :

$$\varphi(\rho) = - \frac{\kappa}{\rho^2} - \frac{\mu}{\rho^3}$$

otteniamo, classicamente, l'equazione dell'orbita (θ essendo l'anomalia; $\theta_0 = 0$, quella iniziale):

$$(4) \quad \rho = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos \sqrt{\lambda} \theta}$$

ove si è posto ancora:

$$(5) \quad p_1 = \frac{\lambda}{\Omega}$$

mentre e_1 è una costante di integrazione, che, come tale, si può assumere al posto di E , l'altra costante essendo A_1 già data; e_1 si può supporre inoltre sempre positiva (cambiando eventualmente θ in $\theta + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$), e noi la supporremo compresa tra 0 e 1.

Notoriamente (con osservazione che risale al Newton) l'orbita definita dalla (4) può considerarsi come una conica (ellisse nelle nostre ipotesi) con parametro p_1 ed eccentricità e_1 , purchè ci si riferisca ad un nuovo riferimento (polare collo stesso polo nel piano dell'orbita), sì che il raggio vettore del mobile sia ancora ρ , e l'anomalia abbia, istante per istante, il valore $\omega = \sqrt{\lambda} \theta$. Un tale riferimento risulta animato rispetto al riferimento

primitivo dalla velocità angolare: $\dot{\phi} = \dot{\theta}(1 - \sqrt{\lambda})^{(1)}$; e la conica risulta percorsa dal mobile con legge kepleriana, con costante areolare A fornita dalla:

$$(6) \quad A = A_1 \sqrt{\lambda}.$$

Ciò posto possiamo agevolmente riconoscere che:

1) *Nel riferimento (ω, ρ) il moto avviene come se fosse dovuto al potenziale:*

$$U = \frac{\kappa}{\rho}$$

come si verifica subito attraverso la (6), la (5) e la quarta delle (3).

2) Se è data l'energia E del moto nel riferimento (θ, ρ) , l'energia E' nel riferimento (ω, ρ) è ancora E ; basta per ciò aver riguardo ai due integrali dell'energia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) = \frac{\kappa}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\rho^2} + E \\ \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\omega}^2) = \frac{\kappa}{\rho} + E' \end{array} \right.$$

e alle relazioni:

$$\dot{\omega} = \sqrt{\lambda} \dot{\theta} \quad ; \quad \dot{\theta}^2 = \frac{A_1^2}{\rho^4}$$

e ricordare che ρ e $\dot{\rho}$ sono gli stessi nei due riferimenti.

§ 2. — *Osservazioni sulla scelta delle costanti di integrazione:* Negli sviluppi che precedono abbiamo supposto di poter scegliere come costanti di integrazione A_1 (ovvero A) ed e_1 . Consideriamo allora nel riferimento (θ, ρ) un moto dovuto al potenziale:

$$(7) \quad U_0 = \frac{\kappa_0}{\rho}$$

e supponiamo ⁽²⁾ che il moto dovuto al potenziale (1), sempre nel riferimento (θ, ρ) , sia dovuto allo stesso potenziale U_0 che abbia però subito:

(1) Donde subito lo spostamento del perielio $S_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} - 2\pi$, che dà in seconda approssimazione: $S_p = \frac{6\kappa_0\pi}{c^2 a_1 (1 - e_1^2)}$: cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 124.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 123.

1°) una alterazione, con divario del 2° ordine, del coefficiente di attrazione, la quale porti κ_0 in κ ; 2°) l'aggiunta di un termine che dia luogo alla forza perturbatrice $-\frac{\mu}{\rho^3}$.

Fissando allora un moto dovuto al potenziale (7), nel senso che siano dati tutti gli elementi di esso, supponiamo che le suddette alterazioni del potenziale avvengano quando il corpo si trova al perielio: allora il moto dovuto ad U_0 si dirà, con espressione usuale, « osculatore al perielio » del moto dovuto ad U_1 .

Vogliamo allora esprimere le due costanti A_1 ed e_1 in funzione delle costanti di codesto moto osculatore. Basterebbe allo scopo considerare che per le due successive alterazioni del potenziale al perielio non si modifica ivi la velocità del corpo e la distanza ϑ_0 di esso dal centro di forza. Dunque rimane pure inalterata la velocità areolare $\frac{1}{2} A_0$ del moto osculatore. Perciò intanto è: $A_1 = A_0$, e potremo assumere A_0 e ϑ_0 come costanti di integrazione nel moto modificato; e nel riferimento (ω, ρ) avremo:

$$(8) \quad \begin{cases} A = A_0 \sqrt{\lambda_0} & ; \quad \left(\lambda_0 = 1 - \frac{\mu}{A_0^2} \right) \\ \vartheta = \vartheta_0 \end{cases}$$

le quali ci permetterebbero di esprimere ogni altra costante del moto einsteiniano (considerato nell'ordinario spazio euclideo) con quelle del moto osculatore al perielio.

In realtà è da notare che nella prima delle suddette modifiche del potenziale U_0 si introduce, attraverso il coefficiente κ , la energia E del moto einsteiniano. Ciò porta a considerare E come costante data di integrazione per questo moto, assumendola assieme a ϑ_0 . Allora, (essendo a_1 il semi-grand'asse nel riferimento (ω, ρ)) avremo in questo riferimento:

$$(9) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{\kappa}{2E} \\ e_1 = 1 - \frac{\vartheta_0}{a_1} = 1 + \frac{2\vartheta_0 E}{\kappa} \end{cases}$$

Sarà quindi:

$$A^2 = -\frac{\kappa^2}{2E} (1 - e_1^2)$$

e infine:

$$(10) \quad A_0^2 = -\frac{\kappa^2}{2E} \frac{1 - e_1^2}{\lambda_0}$$

la quale ci dà A_0 in funzione di E ; e viceversa se è data A_0 del moto osculatore al perielio (e ϑ_0), e, in base alle considerazioni svolte, si vogliono

assumere le (8) come costanti di integrazione del moto con potenziale modificato, tenendo conto della prima e della terza delle (3) e delle (9), la energia E (che compare pure nel coefficiente κ) del moto einsteiniano (nell'ordinario spazio euclideo) è fornita dalla (10).

§ 3. — Possiamo ormai alla deduzione, in base al principio di equivalenza del Levi-Civita, di una « legge delle aree » per il moto einsteiniano. Detta A_1 una costante positiva, doppio della velocità areolare nell'ausiliario moto newtoniano, dalla :

$$(11) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt_1} = A_1$$

sarà in virtù della (2), ed in seconda approssimazione nel senso dichiarato :

$$(12) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = A_1 \left(1 - \frac{4 U_0}{c^2} \right).$$

Questa (12) non coincide, naturalmente in seconda approssimazione, con l'analogo integrale primo dedotto, dal noto principio variazionale ⁽¹⁾:

$$(13) \quad \delta \int ds = 0$$

ove il ds è quello dello Schwarzschild.

Ma il divario è agevolmente spiegato purchè si consideri che la relazione differenziale (2) viene dedotta dal confronto, in un generico punto del cronotopo, di due integrali primi validi, l'uno pel moto einsteiniano, l'altro per l'ausiliario moto newtoniano, quando il primo di questi venga considerato nel cronotopo pseudo-euclideo tangente in quel generico punto a quello definito dal ds dello Schwarzschild. Ora l'integrale primo (11), ove compare ρ in termini finiti, è valido nella varietà spaziale tridimensionale euclidea tangente, per un valore iniziale di ρ , a quella, pure spaziale, alla quale compete la metrica indotta dal ds dello Schwarzschild. È pertanto necessario, prima di applicare il principio di equivalenza, esprimere l'integrale (11) stesso nello spazio einsteiniano; e poichè questo è rappresentato conformemente nello spazio euclideo tangente in un suo punto, e si ha ⁽²⁾, nella dichiarata approssimazione (indicando con R il ρ stesso misurato con metrica einsteiniana):

$$\rho = R \left(1 - \frac{\kappa_0}{R c^2} \right),$$

(1) Cfr. J. CHAZY, loc. cit., p. 68.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 153.

la (11) diviene:

$$(11') \quad R^2 \frac{d\theta}{dt_1} = A_1 \left(1 + \frac{2x_0}{Rc^2} \right)$$

e quindi, sempre in virtù della (2), avremo la:

$$(12') \quad R^2 \frac{d\theta}{dt} = A_1 \left(1 - \frac{2x_0}{Rc^2} \right) = A_1 \left(1 - \frac{2U_0}{c^2} \right).$$

Dalla (12'), dedotta da noi senza ricorrere al principio variazionale (13), si può dedurre il tempo cosmico per il moto einsteiniano nel suo naturale spazio einsteiniano, dall'integrale:

$$t = \frac{1}{A_1} \int \frac{R^2 d\theta}{1 - \frac{2x_0}{Rc^2}} + \text{const.}$$

e calcolare quindi i periodi di rivoluzione, anomalistica e siderale, del moto nello spazio einsteiniano ⁽¹⁾.

Ma in base alle stesse considerazioni risulta pure che: *la (12) può ritenersi come l'integrale delle aree di un moto einsteiniano considerato in un ordinario spazio euclideo, nel quale lo spazio einsteiniano sia conformemente rappresentato.*

Dalle considerazioni del § 1) e da questa (12) partiremo allo scopo di ricercare quanto si è detto nella premessa.

(1) Cfr. J. CHAZY, loc. cit., pp. 80-85.

Geofisica. — *La pretesa ripercussione, agli antipodi, dell'eruzione del Cracatoa del 1883.* Nota⁽¹⁾ di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio L. PALAZZO.

In una Nota precedente⁽²⁾ ebbi a riconoscere quanto poco probativi fossero gli esempi addotti dal dott. E. Oddone nel 1904 per dimostrare: 1° che le onde sismiche d'un forte terremoto, dopo attraversato il globo, si rendono ancora sensibili ai sensi dell'uomo agli antipodi; 2° che dopo essersi ivi riflesse, ritornano sui loro passi per provocare una *replica* al loro punto di partenza; 3° che le stesse onde, già riflesse, subendo ulteriori riflessioni allo stesso modo, possono dare origine ad altre repliche. Veramente non era affatto nuova l'idea della possibile trasmissione di sensibili vibrazioni meccaniche da un capo all'altro del nostro pianeta, in quanto che la medesima era già sorta fin dal 1885, e precisamente in occasione della famosa eruzione del Cracatoa, avvenuta due anni prima, nel senso che le vibrazioni sonore, prodotte dalle formidabili esplosioni di quel vulcano, si sarebbero propagate attraverso il nucleo terrestre e sarebbero state avvertite alle Antille, in prossimità dell'antipodo. Oltracciò il matematico Bromwich⁽³⁾ fin dal 1899 aveva già indagato sul periodo sferoidale teorico della Terra. Ho voluto approfondire anche tale questione, risalendo alle origini, ben sapendo quanto le notizie, ripetute da uno all'altro scrittore, si alterino per via e finiscano per dar corpo alle ombre. L'eruzione del Cracatoa fu ritenuta il più grande fenomeno geologico nei tempi storici, il quale impressionò vivamente tutto il mondo scientifico per i grandiosi e inaspettati effetti prodotti quali: il subbissamento in mare di buona parte dell'isola Cracatoa e di altre circonvicine; la formazione di nuove isole col materiale lanciato in aria e ricaduto sulle acque; la gigantesca onda marina registrata nei più lontani mareografi di America e Europa, i boati uditi fino a più di 4000 km.; le onde aeree che influenzando a più riprese i barometri, mostrarono d'aver fatto più volte il giro della Terra; infine, il sole verde, le luci rosse crepuscolari, l'alone solare ancor visibile nel 1885, e lo stato anormale della polarizzazione atmosferica.

Nessuna meraviglia dunque che abbiano attirato un'eccessiva attenzione alcuni rumori uditi alle Antille, quasi in concomitanza col parossisma del

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1932.

(2) *La riflessione delle onde sismiche agli antipodi causa di nuovi terremoti.* (« Rend. d. R. Acc. N. dei Lincei », ser. 6^a, XV, p. 729).

(3) *Influence of Gravity on elastic Waves, and in particular, on the Vibrations of an elastic Globe.* (« Proc. London Math. Soc. », vol. XXX, 1899).

vulcano. È il prof. Forel ⁽¹⁾ che per primo ne diè comunicazione il 9 marzo 1885 in seguito ad una lettera d'un suo compatriota dimorante nell'Honduras il quale, nell'ottobre 1883, parlando col cap. Voodville dei fenomeni straordinari del Cracatoa, riportati dai giornali, apprese da lui la seguente notizia pervenutagli da *Caiman-Brac*, piccola isola al Sud di Cuba. La domenica (26 agosto 1883) gli isolani furono sorpresi da boati come di tuoni lontani e, supponendo si trattasse di qualche incrociatore spagnolo, scrutarono l'orizzonte verso Sud e poi, attraversata l'isola, anche verso Nord, ma non riuscirono a scorgere nè navi, nè fumo. E poichè i rumori continuavano e si convinsero trattarsi di fenomeno sotterraneo, dapprima ne restarono spaventati, poi si rassicurarono pel fatto che le detonazioni a poco a poco cessarono. Ecco come si esprime al riguardo il Forel: « Sans vouloir être « trop affirmatif, et sans accepter d'enthousiasme un fait aussi étrange que « la propagation des bruits souterrains de l'éruption du Krakatoa à travers « la masse entière du globe, j'indiquerai les motifs qui me font accueillir « provisoirement cette observation ». Eccoli: 1° Improbabilità che si trattasse di boati provenienti dai vulcani più vicini (l'*Omotepec* nel Nicaragua e il *Cotopaxi* nell'Equatore, rispettivamente a 1100 e 2300 km.), pensando giustamente che i giornali non avrebbero mancato di dar notizia di eruzioni avvertite a distanze sì ragguardevoli; 2° Improbabilità che il fenomeno fosse dovuto a vicine eruzioni sottomarine, in quanto che le Grandi Antille, di cui fa parte Caiman-B., non sono vulcaniche; 3° La rassomiglianza tra i boati uditi in quest'isoletta e quelli del Cracatoa; 4° L'enorme distanza a cui furono segnalate le detonazioni del vulcano; 5° La grande vicinanza di Caiman-B. all'antipodo del medesimo, e quindi la possibilità di una trasmissione diretta del suono lungo il diametro terrestre; 6° La concordanza tra il tempo del parossisma vulcanico e quello dei rumori alle Antille. E il Forel soggiunge: « Si les rapports supçonnés entre ces bruits souterrains et « l'éruption de Krakatoa pouvaient être confirmés, ce serait un fait des plus « importants pour la physique du globe ».

Il Verbeek nella sua Relazione al Governo olandese ⁽²⁾, dice che al tempo dell'eruzione del Cracatoa ne avvennero altre anche presso gli antipodi, delle quali però ignorava i particolari, e inoltre che non possono escludersi eruzioni sottomarine, accompagnate da scoppi, nel Mare Caribico; e da ciò appaiono svalutati i primi due motivi del Forel. Sorvolando sul 3° e 4° di assai scarso valore, soffermiamoci al 5° che è, invece, di grande importanza. Stando agli stessi dati del Forel, l'antipodo del Cracatoa si trova a 4° 1/2 più a l'Est e 13° 1/2 più a Sud per rispetto a Caiman-B., sicchè quest'isola se ne trova distare per ben 1500 km.! E veramente ripugna

(1) *Bruits souterrains entendus le 26 août 1883 dans l'îlot de Caiman-Brac etc.* (« C. R. », vol. 100, p. 755, 1° sem. 1885. Paris).

(2) *Kort Verslag over de Uitbarsting van Krakatau* (Translated in « Nature », vol. XXX, p. 10, 1884). - *Krakatau* (Batavia, 1885).

l'ammettere che le vibrazioni sonore provenienti direttamente dal vulcano attraverso il nucleo terrestre, o magari propagatesi lungo la superficie del globo, sia pure presentando nodi di rinforzo, siano state avvertite soltanto in un isolotto e passate inosservate a popolosi Stati dell'America Centrale in un raggio di 1500 km. attorno all'antipodo e, cioè, entro una vastissima area che comprende la Columbia, il Panama, la Costa Rica, il Nicaragua e parte dell'Honduras e del Venezuela. Sarebbe mai concepibile che la ripercussione in parola sia stata segnalata in un punto, *e soltanto della periferia*, di una plaga vasta quasi quanto l'Europa? E passiamo al 6° motivo. Tra le ore in cui fu notata la più violenta esplosione del Cracatoa la mattina del 27 agosto (6.45 a Buétiens, 8.30 a Batavia, 10 a Teloc Betaeng) il Forel prese in considerazione l'intermedia (8.30, t. Batavia) corrispondente a 20.5 del 26 agosto in tempo di Caiman-B., e ammettendo circa un'ora per la trasmissione del suono attraverso il diametro terrestre, trovò che la più forte ripercussione dovette farsi sentire in quell'isola verso le 21^h del 26 agosto, cioè, già a notte inoltrata. Il Verbeek ha spiegato il disaccordo delle ore sopra riportate con la probabile influenza della direzione del vento nelle varie località, ed ha cercato di determinare, per altra via, gli istanti delle esplosioni più forti ricorrendo al tracciato manometrico del gazometro di Batavia. Tenuto conto del tempo impiegato dalle onde aeree per propagarsi dal vulcano fino a questa città, egli trovò che le esplosioni maggiori dovettero avvenire a 5^h.35^m, 6^h.50^m, 10^h.5^m e 10^h.55^m (t. Batavia) le quali, aumentate di un'ora per il tempo preso dal suono per attraversare il globo, corrispondono rispettivamente a 18^h, 19^h 1/4, 22^h 1/2 e 23^h.20^m (t. Caiman-B.). Quella di gran lunga la più violenta fu la penultima (22^h 1/2). Sicchè le detonazioni avrebbero cominciato alle Antille al tramonto del sole, proseguito quando già annottava e raggiunto il massimo a notte completa! È vero che il cap. Woodville non dice a quale ora si manifestò il fenomeno a Caiman-B.; ma pel fatto che prima fu esplorato l'orizzonte verso Sud e dopo qualche tempo verso Nord, parrebbe doversi escludere che ciò avvenisse di notte. Ad ogni modo, il Woodville non accenna minimamente alla circostanza — che certamente non sarebbe stata omessa — di un progressivo e considerevole aumento nell'intensità del fenomeno; anzi dalla sua relazione parrebbe piuttosto risultare che le detonazioni fossero state più forti all'inizio.

E come se non bastassero queste considerazioni, aggiungerò un altro fatto importante riferito dal Flammarion ⁽¹⁾, ed è che anche nella vicina isola di S. Domingo furono pure udite detonazioni, ma tra le 16^h e 17^h del lunedì 28 agosto. Il lunedì corrisponde veramente al 27, ma ad ogni modo non v'è corrispondenza nè di data nè di ora con Caiman-B. E anche se si volesse ammettere un errore di data per S. Domingo, cioè, che il

(1) *Les éruptions volcaniques et les tremblements de terre*. Paris, anno 1885.

fenomeno vi fosse stato osservato proprio il 26, in tal caso resterebbe assodato che il medesimo ebbe luogo di giorno, tra le 16^h e 17^h, cioè, ben prima che fossero potute giungere le prime avvisaglie del parossisma del Cracatoa! Ma v'ha di più, poichè, errore per errore, se riteniamo equivocata proprio la data di Caiman-B. - e ciò non è improbabile a causa del modo troppo indiretto e anche del gran ritardo con cui il Forel fu informato - le detonazioni sarebbero state udite non il 26, bensì il 27 agosto e, cioè, un giorno dopo il parossismo vulcanico!! Anche lo stesso Symons - l'autore di un'ampia monografia sull'eruzione del Cracatoa - non ha creduto di annettere alcuna importanza al fenomeno di Caiman-B., limitandosi a consacrarvi soltanto poche righe ⁽¹⁾.

Quale dunque potrebbe essere stata la causa dei rumori alle Antille? Il Van den Broeck nella rivista belga « Ciel et Terre » (t. XVI, 1895 e t. XVII, 1896) richiamò l'attenzione sopra misteriose detonazioni nel Mare del Nord, colà chiamate *mistpoeffers* che forse hanno la stessa origine dei *Barisal-guns* nelle Indie inglesi, descritti come colpi di cannone o tuoni lontani ⁽²⁾. Nella stessa Italia abbondano consimili fenomeni sui quali riferono principalmente il Cancani e l'Alippi, propendendo per l'ipotesi d'un'origine endogena. Non è quindi improbabile una simile spiegazione anche per le detonazioni alle Antille, in quanto che il Mare Caribico che le bagna, costituisce una fossa di sprofondamento nell'Atlantico ed è sede d'importanti fenomeni sismici e vulcanici. Del resto, la stessa localizzazione dei rumori ivi segnalati verrebbe a confermare la predetta ipotesi; e se i medesimi ebbero luogo il 26, ovvero il 27 agosto - quasi contemporaneamente al parossisma del Cracatoa - ciò deve ritenersi una mera coincidenza.

*
* *

Il Forel aveva calcolato a circa un'ora il tempo impiegato dalle vibrazioni sonore per attraversare il nucleo terrestre, tempo che si avvicina ai 67 minuti riportati dal dott. E. Oddone in altra sua Memoria ⁽³⁾, quale valore medio degli intervalli a cui il manometro di Batavia indicò le più notevoli esplosioni del Cracatoa; valore che, secondo lui, costituisce una *costante importantissima* coincidente col tempo preso dalle onde S dei terremoti per traversare il globo. A quest'intervallo di 67^m io accennai di sfuggita alla fine della mia Nota sopra indicata, dichiarando di non essere riuscito a comprendere in che modo era stato dedotto dai dati orari contenuti in

(1) *The Eruption of Krakatoa and subsequent Phenomena*. « Report of the Krakatoa Committee of the R. Society ». London, 1888.

(2) MONTESSUS DE B.: *La science sèismologique. Tremblement de terre*, cap VI, (*Les bruits sèismiques*).

(3) *Déchainement des trembl. de terre à l'arrivée des ondes sismiques dues à un 1^{er} macro-sisme lointain*. (« Boll. d. Soc. Sism. It. », XII, 1907, p. 380).

una tabella della Memoria del Nagaoka⁽¹⁾, riportata dall'Oddone, ma con inesatto raggruppamento dei medesimi. L'esame della tabella originale mi ha dato la spiegazione delle difficoltà da me allora incontrate.

Per far meglio risaltare quale fiducia possa accordarsi all'intervallo in questione, riporto la tabella del Nagaoka, avvertendo di avervi corretto alcuni piccoli errori, ricopiati pure dall'Oddone:

Data	Ora delle maggiori esplosioni	Intervalli		
		considerati	manipolati	
26 Ag.	17 ^h .20 ^m	6 ^h .49 ^m	= 68 ^m .2 × 6	I
27 »	0.9			
» »	1.55			
» »	2.38	3.21	= 66.7 × 3	II
» »	3.30			
» »	4.41			
» »	4.55	3.27	= 69.0 × 3	III
» »	*5.43			
» »	*6.57			
» »	8.25	3.22	= 67.3 × 3	IV
» »	9.42			
» »	**10.15			
» »	*11.15	1.00	= 60.0 × 1	V
		Media . . . 66 ^m .2		

Le ore sono espresse in t. Batavia; quelle con un asterisco (*) si riferiscono alle più notevoli esplosioni, e quella con due (**) all'esplosione di gran lunga la più violenta.

La diversità delle ore riportate dal Verbeek si spiega in parte con il tempo di propagazione delle onde aeree dal vulcano a Batavia.

L'intervallo I è la 6^a parte di quello tra le due prime esplosioni. Il II è la 3^a parte di quello tra le ore 0.9 e 3.30, restando saltate, non si sa perchè, le due ore intermedie (1.55 e 2.38). Il III è ancora la 3^a parte di quello tra le ore 3.30 e 6.57, non tenendosi alcun conto di altre tre ore intermedie e segnatamente quella (5.43) relativa ad una delle più violente esplosioni.

(1) *The Eruption of Krakatoa and the Pulsation of the Earth.* («Nature», LXXVI, May to Oct., 1907, p. 89).

Il IV è sempre la 3^a parte di quello tra le ore 6.57 e 10.15 con esclusione delle due intermedie. Il V è l'intervallo tra gli ultimi due dati orari. Non si può a meno dal restare meravigliati dinanzi all'arbitrarietà con la quale vennero calcolati dal Nagaoka i 5 intervalli sopra riportati, sia per l'esclusione ingiustificata di tante ore — perfino di quella importantissima delle 5^h 43^m — sia a causa della divisione per 6 o per 3 senza alcuna spiegazione al riguardo. E la meraviglia cresce se si dà uno sguardo al *fac-simile* del tracciato manometrico di Batavia, riportato dal Symons, nel quale la perturbazione aerea risulta incessante e violenta per tante ore di seguito, in modo da rendere difficile una sicura determinazione delle ore dei massimi; e stupisce ancor di più che l'Oddone, senza riflettere a tutto ciò, ha creduto di accordare tanta fiducia all'intervallo in questione e servirsene a sostegno della sua tesi circa il tempo di propagazione delle onde sismiche *S* agli antipodi. Ma egli è andato anche più oltre, facendo risaltare anche l'identità di detto intervallo con il periodo medio di 66^m ⁽¹⁾, quale risulta dai dati mareografici relativi alle grandi ondate marine suscitate dal Cracatoa e che egli trova in *rapporto armonico* con molte altre costanti sismiche, per esempio: i 33^m impiegati dalle onde *P* per attraversare la Terra, i 135^m = 2 × 66^m c. e i 200^m = 3 × 67^m c. impiegati rispettivamente dalle onde *L* e loro massimi per fare il giro della medesima ⁽²⁾.

E ritornando alla tesi della riflessione delle onde sismiche agli antipodi, di cui vanta la priorità l'Oddone — come idea geniale e di grande valore — essa è in evidente relazione col periodo sferoidale terrestre del Bromwich e con la creduta propagazione dei rumori del Cracatoa fino alle Antille; propagazione accolta giustamente con le debite riserve dal Forel, non tenuta in alcun conto dal Symons e riconosciuta da noi infondata. La tesi dunque sostenuta dall'Oddone, oltre a non avere il merito della novità, resta maggiormente campata in aria quando si rifletta che, se non è stata ancora

(1) Questo periodo è posto in relazione dal Nagaoka con quello vibratorio sferoidale terrestre del Bromwich, ma, stando al CONNEL, si spiegherebbe in modo più semplice con la riflessione delle grandi ondate marine nelle opposte baie. (« Boll. Mens. Moncalieri », ser. 2^a, X, p. 65).

(2) Pur troppo questa mania di trovare coincidenze ad ogni costo, ricorrendo a multipli e sottomultipli, non è infrequente. Così, per giustificare un'anomalia da me rilevata per i cicli di 102 e 23 anni che risultarono al Cancani per la ricorrenza dei forti terremoti Marchegiani e, cioè, che gli ultimi due avvennero invece a intervalli di 27 e 6 anni, il dott. TRAFELLI (« Atti d. Soc. It. per il Progresso d. Sc. », XX Riunione, Milano, settembre 1931, vol. II) si domandò se l'obbiezione non potesse essere considerata come una conferma! Secondo lui, i numeri del Cancani (102 e 23) e i miei (27 e 6) potrebbero essere collegati tutti in armonia alla stregua del periodo delle macchie solari. I numeri 102 e 23 corrisponderebbero su per giù a 9 periodi (18 semiperiodi) e a 2 periodi (4 semiperiodi) rispettivamente, mentre i miei (27 e 6) corrisponderebbero a 2 1/2 periodi (5 semiperiodi) e a 1 semiperiodo. Come si vede, il Nagaoka ha fatto scuola, instaurando statistiche e manipolazioni così poco serie da risentire alquanto delle operazioni cabalistiche!

dimostrata neppure la semplice trasmissione di vibrazioni attraverso il nucleo terrestre, tanto meno è da pensare a una o più riflessioni delle medesime agli antipodi e ancora capaci di provocare, nei successivi ritorni al loro punto di partenza, sensibili scuotimenti del suolo! Da tutto ciò parmi potersi concludere che le astrazioni troppo teoretiche allontanano dalla verità, e non è da raccomandarsi mai abbastanza di moderare lo slancio della fantasia e dare invece più importanza all'accurato e oggettivo esame dei fatti.

Fisica (Fisica teorica). — *Sul comportamento magnetico della molecola di ossigeno.* Nota ⁽¹⁾ di R. EINAUDI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

In questa Nota ci proponiamo di studiare teoricamente il comportamento della molecola di ossigeno in campi magnetici dell'ordine di grandezza di 10^4 Gauss, e di giustificare teoricamente i risultati delle esperienze di deviazione magnetica, che il dott. Schnurmann, dell'Università di Amburgo, ci ha gentilmente comunicati.

I risultati delle esperienze del dott. Schnurmann sono rappresentati dalla curva tratteggiata della fig. 1. In ascisse sono riportati gli spostamenti s , in ordinate le intensità I delle molecole spostate. Le molecole, che hanno colpito il rivelatore in corrispondenza al massimo di destra ($s = 25$), hanno attraversato un campo medio di $5 \cdot 10^3$ Gauss; le molecole che hanno colpito il rivelatore in corrispondenza al massimo di sinistra ($s = -55$), hanno attraversato un campo medio di 10^4 Gauss; inoltre le condizioni sperimentali sono state scelte in modo che il gradiente del campo fosse costante nella zona attraversata dalle molecole. In assenza di campo la curva delle intensità era una curva a campana, compresa nel tratto ($s = -10, s = 10$), e quindi simmetrica rispetto all'asse delle intensità. Ora l'asimmetria notevole della curva in presenza del campo magnetico non si spiega se si trascura l'interazione fra lo spin e la rotazione della molecola, giacchè in tal caso il gradiente costante del campo dovrebbe provocare spostamenti simmetrici rispetto all'asse delle intensità.

In questo lavoro abbiamo tentato quindi di giustificare teoricamente l'andamento della curva sperimentale, tenendo conto dell'interazione fra lo spin e la rotazione della molecola: e i risultati teorici sono rappresentati dalla curva continua della fig. 1.

Lo stato fondamentale della molecola di ossigeno è uno stato $^3\Sigma$ ⁽²⁾. Nello stato fondamentale la molecola di ossigeno si potrà quindi trattare

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1932.

(2) R. MULLIKEN, «Physical Review», 32, 880 (1928).

come un rotatore spaziale, avente un momento d'inerzia J e un momento della quantità di moto $\frac{h}{2\pi}L$, accoppiato con uno spin di modulo $\frac{h}{2\pi}s$, che noi indicheremo con $\frac{h}{2\pi}s$. Ora si dimostra ⁽¹⁾ che, se si indica con n un vettore unitario, avente la direzione della congiungente i due nuclei,

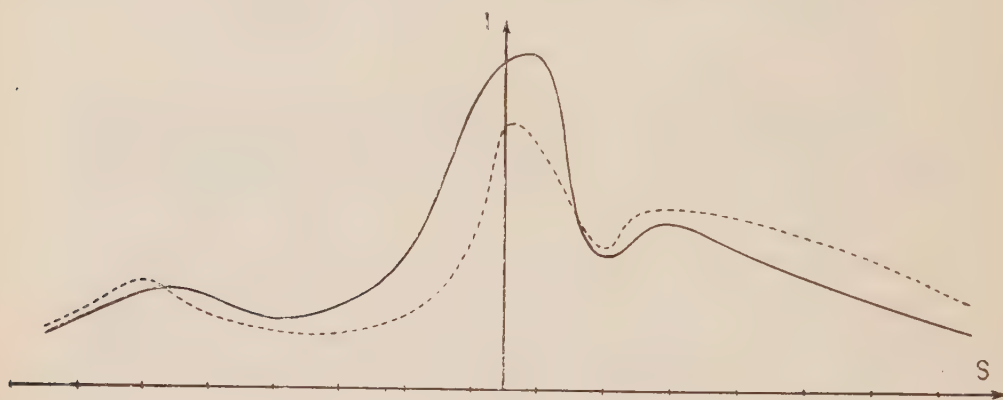


Fig. 1.

l'energia di accoppiamento dello spin col resto della molecola, e cioè col rotatore, è data da :

$$(1) \quad V_r = hc[A\{3(s \times n)^2 - s^2\} + Bs \times L]$$

ove h è la costante di Planck, c la velocità della luce, ed A e B sono due costanti, che lo studio dello spettro della molecola di ossigeno permette di fissare in

$$(1') \quad A = 0.484 \text{ cm}^{-1} \quad B = 0.025 \text{ cm}^{-1}.$$

Se indichiamo dunque con \mathcal{H}_0 l'Hamiltoniana di un rotatore di momento d'inerzia J , l'energia della nostra molecola sarà, in assenza del campo magnetico, uguale ad $\mathcal{H}_0 + V_r$. Se ora vogliamo tener conto della presenza del campo magnetico dovremo aggiungere al termine $\mathcal{H}_0 + V_r$ un termine V_2 , corrispondente all'energia di interazione fra la molecola di ossigeno e il campo magnetico. Siccome il momento della quantità di moto orbitale ha, nello stato fondamentale della molecola, componente nulla nella direzione della congiungente i due nuclei, è praticamente nulla l'interazione tra le orbite e il campo e rimane quindi solo da tener conto dell'interazione fra il campo e lo spin risultante. Ne segue che, se supponiamo che il campo magnetico sia diretto nella direzione dell'asse z e se indichiamo con H la

(1) H. A. KRAMERS, « Zeits. für Phys. », 53, 429 (1929).

sua intensità, l'energia di interazione fra il campo magnetico e la nostra molecola sarà uguale a:

$$(2) \quad V_2 = \frac{eh}{2\pi m_0 c} H s_z$$

ove m_0 è la massa dell'elettrone, e la sua carica ed s_z la componente secondo l'asse z del vettore s . Conclusione: l'Hamiltoniana relativa alla molecola di ossigeno nello stato fondamentale, posta in un campo magnetico, è data da

$$(3) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V_1 + V_2,$$

La parte preponderante negli autovalori di \mathcal{H} è dovuta al termine \mathcal{H}_0 ; noi potremo quindi trattare V_1 e V_2 come termini di perturbazione e, come tali, dovremo considerarli insieme, essendo essi, per campi magnetici di 10⁴ Gauss, dello stesso ordine di grandezza. Come autofunzioni del sistema non perturbato noi potremo scegliere le autofunzioni:

$$(4) \quad \Psi(l, m_l, m_s) = e^{im_l \varphi} P_l^{m_l}(\cos \theta) \delta(m_s)$$

corrispondenti rispettivamente agli autovalori:

$$(4') \quad E(l) = \frac{h^2}{8\pi^2 J} l(l+1);$$

m_l e m_s rappresentano qui rispettivamente gli autovalori, corrispondenti all'autofunzione (4), delle componenti secondo l'asse z dei vettori L e s ; le funzioni $P_l^{m_l}(\cos \theta)$ sono i polinomi di Legendre normalizzati e le funzioni $\delta(m_s)$ sono le autofunzioni di spin.

L'autovalore (4') è evidentemente un autovalore $3(2l+1)$ volte degenerato; ma se si tien conto della perturbazione $V_1 + V_2 = V$, questo autovalore si spezzerà in tanti termini che, in prima approssimazione, si ottengono aggiungendo a $E(l)$ gli autovalori della sottomatrice di V , formata dagli elementi diagonali rispetto a l ; se indichiamo pertanto con $V^{(l)}$ questa sottomatrice, ogni elemento di essa dipenderà ancora da m_l e da m_s e si potrà quindi rappresentare col simbolo $V^{(l)}(m_l, m_s; m'_l, m'_s)$. Indichiamo ora con m la somma dei due numeri m_l e m_s : m rappresenta evidentemente la componente secondo l'asse z del momento della quantità di moto totale del sistema; e siccome V è invariante rispetto a rotazioni intorno all'asse z , $V^{(l)}$ sarà diagonale rispetto a m e verrà quindi a spezzarsi nei tre seguenti gruppi di sottomatrici:

1°) Un primo gruppo di $2l-1$ sottomatrici del tipo:

$$5) \quad V_m^{(l)} = \begin{vmatrix} V^{(l)}(m-1, 1; m-1, 1) & V^{(l)}(m-1, 1; m, 0) & V^{(l)}(m-1, 1; m+1, -1) \\ V^{(l)}(m, 0; m-1, 1) & V^{(l)}(m, 0; m, 0) & V^{(l)}(m, 0; m+1, -1) \\ V^{(l)}(m+1, -1; m-1, 1) & V^{(l)}(m+1, -1; m, 0) & V^{(l)}(m+1, -1; m+1, -1) \end{vmatrix},$$

con m uguale a $-l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1$.

2°) Un secondo gruppo di due sottomatrici, definite dalla relazione;

$$(5') \quad \begin{cases} V_l^{(l)} = \begin{vmatrix} V^{(l)}(l, 0; l, 0) & V^{(l)}(l, 0; l-1, 1) \\ V^{(l)}(l-1, 1; l, 0) & V^{(l)}(l-1, 1; l-1, 1) \end{vmatrix}; \\ V_{-l}^{(l)} = \begin{vmatrix} V^{(l)}(-l, 0; -l, 0) & V^{(l)}(-l, 0; -l+1, -1) \\ V^{(l)}(-l+1, -1; -l, 0) & V^{(l)}(-l+1, -1; -l+1, -1) \end{vmatrix} \end{cases}$$

corrispondenti rispettivamente a $m = \pm l$.

3°) Una coppia di elementi $\epsilon_{l+1}^{(l)}$ e $\epsilon_{-l-1}^{(l)}$, corrispondenti rispettivamente a $m = \pm (l+1)$ e definiti dalla relazione:

$$(5'') \quad \epsilon_{l+1}^{(l)} = V^{(l)}(l, 1; l, 1) \quad \epsilon_{-l-1}^{(l)} = V^{(l)}(-l, -1; -l, -1).$$

Indichiamo ora con $\epsilon_m^{(l)}(i)$, ove i è un indice variabile da 1 a 3, gli autovalori della matrice $V_m^{(l)}$; con $\epsilon_l^{(l)}(k)$ e con $\epsilon_{-l}^{(l)}(k)$, ove k è un indice a due valori, rispettivamente gli autovalori delle matrici $V_l^{(l)}$ e $V_{-l}^{(l)}$. Potremo allora concludere che i 3 $(2l-1)$ autovalori $\epsilon_m^{(l)}(i)$ delle matrici $V_m^{(l)}$, i 4 autovalori $\epsilon_l^{(l)}(k)$ e $\epsilon_{-l}^{(l)}(k)$ delle matrici $V_l^{(l)}$ e $V_{-l}^{(l)}$, nonchè i due elementi $\epsilon_{l+1}^{(l)}$ ed $\epsilon_{-l-1}^{(l)}$ danno complessivamente i 3 $(2l+1)$ autovalori della matrice $V^{(l)}$.

Cominciamo ad esaminare il gruppo di autovalori $\epsilon_m^{(l)}(i)$ delle matrici $V_m^{(l)}$; l'espressione della matrice $V_m^{(l)}$ in funzione di l e di m si ottiene sostituendo a V_1 e V_2 le espressioni fornite dalle formule (1) e (2). Indicando, per brevità, con $V_{m;\alpha,\beta}^{(l)}(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ gli elementi della matrice $V_m^{(l)}$, si trova che:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{m;1,1}^{(l)} &= hc \left\{ A \frac{l^2 + l - 3 + 6m - 3m^2}{(2l+3)(2l-1)} + B(m-1) + \frac{eH}{2\pi m_0 c^2} \right\}; \\ V_{m;1,2}^{(l)} &= hc \left\{ A \frac{3\sqrt{(l-m+1)(l+m)}(1-2m)}{\sqrt{2}(2l+3)(2l-1)} + \frac{B}{\sqrt{2}} \sqrt{(l-m+1)(l+m)} \right\}; \\ V_{m;1,3}^{(l)} &= -3hcA \frac{\sqrt{(l+m)(l-m)(l+m+1)(l-m+1)}}{(2l+3)(2l-1)}; \\ V_{m;2,2}^{(l)} &= hcA \frac{-2l(l+1) + 6m^2}{(2l+3)(2l-1)}; \\ V_{m;2,3}^{(l)} &= hc \left\{ A \frac{3\sqrt{(l-m)(l+m+1)}(1+2m)}{\sqrt{2}(2l+3)(2l-1)} + \frac{B}{\sqrt{2}} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \right\}; \\ V_{m;3,3}^{(l)} &= hc \left\{ A \frac{l^2 + l - 3 - 6m - 3m^2}{(2l+3)(2l-1)} - B(m+1) - \frac{eH}{2\pi m_0 c^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Gli autovalori $\epsilon_m^{(l)}(i)$ della matrice, formata dagli elementi (6), hanno in funzione di l, m e H , una espressione estremamente complicata e malagevole; così malagevole che, per calcolare gli autovalori, corrispondenti ai differenti valori di l e di m , è preferibile partire direttamente dalle formule (6), calcolare gli elementi per i vari l e i vari m e ricavarne, volta per volta, gli autovalori in funzione di H . Fortunatamente però per i grandi valori di l , ci è riuscito di trovare una formula approssimata che dà, in forma abbastanza semplice, gli autovalori $\epsilon_m^{(l)}(i)$; in base a questa formula, nella quale si è tenuto conto che i valori di A e B sono determinati dalle relazioni (1'), si ha:

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_m^{(l)}(1) &= 2hc \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3} \right]; & \epsilon_m^{(l)}(2) &= 2hc \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{\varphi}{3} + \pi \right]; \\ \epsilon_m^{(l)}(3) &= 2hc \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{\varphi}{3} + \frac{5\pi}{3} \right] \end{aligned} \right.$$

ove φ è definito dalla relazione

$$(6'') \quad \cos \varphi = \frac{3}{2} \frac{q}{p} \sqrt{\frac{3}{p}}$$

e p e q sono legati a l, m e H dalle relazioni:

$$(6''') \quad \left\{ \begin{aligned} p &= 0.187 + 0.00062 l^2 + \left\{ 1.363 \frac{m}{l^2} + 0.0469 m \right\} 10^{-4} H + \\ &\quad + 0.882 \cdot 10^{-8} H^2 \\ q &= -0.018 + 0.00029 l^2 + \left\{ 0.0229 m + 0.169 \frac{m}{l^2} \right\} 10^{-4} H + \\ &\quad + \left\{ -0.198 + 0.640 \frac{m^2}{l^2} \right\} 10^{-8} H^2. \end{aligned} \right.$$

Il gruppo di formule (6), (6'), (6''), (6''') dà già una discreta approssimazione per $l = 5$, una approssimazione ottima per $l > 8$.

Passando ai 4 autovalori $\epsilon_i^{(l)}(k)$ e $\epsilon_{-i}^{(l)}(k)$ delle matrici (5), si trovano per essi, tenendo conto delle formule (1), (1') e (2), le seguenti espressioni:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_i^{(l)}(1) &= hc \left\{ a_0 + 0.470 \cdot 10^{-4} H + \frac{1}{2} \sqrt{b_0 + b_1 H + 0.882 \cdot 10^{-8} H^2} \right\}; \\ \epsilon_i^{(l)}(2) &= hc \left\{ a_0 + 0.470 \cdot 10^{-4} H - \frac{1}{2} \sqrt{b_0 + b_1 H + 0.882 \cdot 10^{-8} H^2} \right\}; \\ \epsilon_{-i}^{(l)}(1) &= hc \left\{ a_0 - 0.470 \cdot 10^{-4} H + \frac{1}{2} \sqrt{b_0 - b_1 H + 0.882 \cdot 10^{-8} H^2} \right\}; \\ \epsilon_{-i}^{(l)}(2) &= hc \left\{ a_0 - 0.470 \cdot 10^{-4} H - \frac{1}{2} \sqrt{b_0 - b_1 H + 0.882 \cdot 10^{-8} H^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

ove

$$(7') \quad \begin{cases} a_0 = 0.241 \frac{l+3}{2l+3} + 0.0125(l-1); \\ b_0 = 2.106 \frac{l^2+2l+1}{(2l+3)^2} - 0.0726 \frac{l^2+2l+1}{2l+3} + \\ \quad + 0.00062(l^2+2l+1); \\ b_1 = \left[0.0469(l-1) - 2.732 \frac{l-1}{2l+3} \right] 10^{-4}. \end{cases}$$

Infine le formule (1), (1'), (2) danno immediatamente le espressioni dei due elementi $\varepsilon_{l+1}^{(l)}$ e $\varepsilon_{l-1}^{(l)}$; precisamente si trova

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon_{l+1}^{(l)} = hc \left\{ -0.484 \frac{l}{2l+3} + 0.025 l + 0.939 \cdot 10^{-4} H \right\}; \\ \varepsilon_{l-1}^{(l)} = hc \left\{ -0.484 \frac{l}{2l+3} + 0.025 l - 0.939 \cdot 10^{-4} H \right\}. \end{cases}$$

Le formule (6), (6'), (6''), (6'''); (7), (7'); e (8) sono le formule fondamentali alle quali volevamo arrivare: esse ci danno le energie di perturbazione della molecola di ossigeno, nello stato fondamentale, posta in un campo magnetico, e costituiscono il punto di partenza dello studio del comportamento magnetico dell'ossigeno in campi dell'ordine di grandezza di 10^4 Gauss.

Per calcolare infatti i momenti magnetici μ delle varie molecole basta derivare gli autovalori dell'energia rispetto al campo magnetico e prendere, d'accordo colle condizioni sperimentali, un campo magnetico medio di $5 \cdot 10^3$ Gauss per i momenti magnetici dell'ordine di grandezza di $-1, -2$ magnetoni di Bohr, un campo magnetico medio di 10^4 Gauss per i momenti magnetici dell'ordine di grandezza di $+1, +2$ magnetoni di Bohr, e un campo magnetico medio di $7 \cdot 10^3$ Gauss per i momenti magnetici vicini allo zero. Nel calcolo dei momenti, corrispondenti agli autovalori $\varepsilon_m^{(l)}(i)$ dell'energia ($m = -l+1, \dots, l-1$), siamo partiti, per i valori di l compresi fra 0 e 8, direttamente dalle formule (6), mentre, per i valori di $l > 8$, abbiamo fatto uso delle formule asintotiche (6'), (6''), e (6'''). Calcolati i momenti, abbiamo costruito la curva dell'intensità in funzione dello spostamento, applicando la formula di Stern:

$$(9) \quad \begin{cases} I = \text{cost} \sum_i w_i \left\{ e^{-\frac{s_\alpha |\mu_i|}{s+a} \left(\frac{s_\alpha |\mu_i|}{s+a} + 1 \right)} - e^{-\frac{s_\alpha |\mu_i|}{s-a} \left(\frac{s_\alpha |\mu_i|}{s-a} + 1 \right)} \right\} & \text{per } s > a, \\ I = \text{cost} \sum_i w_i e^{-\frac{s_\alpha |\mu_i|}{s+a} \left(\frac{s_\alpha |\mu_i|}{s+a} + 1 \right)} & \text{per } |s| < a. \end{cases}$$

Le formule (9) sono valide per spostamenti delle molecole nel verso positivo dell'asse delle s ; per spostamenti nel verso negativo basterà costruire le curve simmetriche rispetto all'asse delle intensità. Per la validità delle formule (9) si presuppone che, in mancanza di campo magnetico, le molecole siano concentrate, con intensità costante, nel tratto ($s = -a, s = a$); inoltre w_i rappresenta il peso statistico dell'energia corrispondente al momento μ_i . Per approssimare il meglio possibile le condizioni sperimentali, abbiamo preso a eguale a 5 e la costante s_a uguale a 150. I risultati dei calcoli sono rappresentati, come già dicemmo, dalla curva continua della fig. 1. La cosa essenziale che si è rivelata nel corso dei calcoli è che l'asimmetria notevole, che si riscontra nelle curve della fig. 1, è dovuta esclusivamente al fatto che le molecole corrispondenti al massimo destro ($s \sim 25$) e le molecole corrispondenti al massimo sinistro ($s \sim -50$) hanno attraversato campi magnetici medi notevolmente differenti. A parte la diversità che si riscontra nella zona centrale delle due curve disegnate nella fig. 1, diversità dovuta al fatto che, in assenza di campo magnetico, dovemmo necessariamente sostituire la curva sperimentale dell'intensità, fatta a campana, con un rettangolo, l'accordo fra la curva teorica e quella sperimentale, specialmente per quanto riguarda l'asimmetria, ci pare assai buono.

Fisica. (Fisica teorica). — *Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta.* Nota di P. STRANEO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Riflettendo sulla mia recente teoria unitaria ⁽²⁾, ho veduto che può esser ancora notevolmente migliorata e semplificata la maniera di giungere alla sua formulazione.

Esporrò ciò brevemente, modificando nello stesso tempo qualche passo accessorio che, nella forma precedente, non è rigoroso.

L'indole della teoria e le equazioni che la compendiano rimangono sostanzialmente invariate; la loro interpretazione fisica però viene a risultare ancora più semplice. Ad ogni modo è solo la presente rielaborazione quella che soddisfa a tutti i requisiti.

1. Scritta la connessione euclidea con torsione nella forma più generale

$$(1) \quad L_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \Omega_{\mu\nu}^{\alpha},$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) Questi «Rendiconti», vol. XV, serie 6^a, p. 462 e 563 (1932).

e la corrispondente curvatura nella consueta forma

$$(2) \quad L_{\mu\nu\varrho}^{\alpha} = R_{\mu\nu\varrho}^{\alpha} + \Omega_{\mu\varrho;\nu}^{\alpha} - \Omega_{\mu\nu;\varrho}^{\alpha} + \Omega_{\mu\varrho}^{\lambda} \Omega_{\lambda\nu}^{\alpha} - \Omega_{\mu\nu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\varrho}^{\alpha},$$

nella quale $R_{\mu\nu\varrho}^{\alpha}$ sta a indicare il *tensore di Riemann*, e il segno « ; » *derivazione covariante ordinaria rispetto al tensore fondamentale* $g_{\mu\nu}$, imponiamo ad essa, e quindi al nostro spazio tempo: 1°) il parallelismo assoluto; 2°) l'invarianza delle lunghezze nel trasporto per parallelismo (invarianza che vari autori dicono euclideanità).

2. Per soddisfare alla prima condizione è necessario e sufficiente annullare identicamente la curvatura (2); per soddisfare alla seconda è necessario e sufficiente imporre al tensore di torsione $\Omega_{\mu\nu}^{\alpha}$, già *a priori* emisimmetrico rispetto agli indici μ, ν , l'ulteriore emisimmetria

$$(3) \quad \Omega_{\alpha\mu\nu} + \Omega_{\mu\alpha\nu} \equiv 0,$$

dalla quale naturalmente consegue pure $\Omega_{\alpha\nu}^{\alpha} \equiv 0$ ⁽¹⁾. (Si veda p. es. Eisenhart, *Non Riemannian Geometry*, p. 34). Quest'ultima condizione deve esser intesa nel senso di valere per ogni singola componente, e non solo per la loro somma. In altri termini, devono esser considerate nulle tutte le Ω con due qualsiasi indici di egual valore.

3. In conseguenza di note identità per i simboli di Riemann (Eisenhart, p. 34) consegue:

$$(4) \quad R_{\mu\nu\varrho}^{\alpha} + \Omega_{\nu\varrho;\mu}^{\alpha} + \Omega_{\nu\varrho}^{\lambda} \Omega_{\lambda\mu}^{\alpha} = 0$$

la quale è senz'altro *la nostra legge unitaria fondamentale*.

Essa contiene le equazioni gravitazionali (corrette) e le equazioni elettromagnetiche come casi particolari.

Contraendo per $\alpha = \rho$ segue infatti

$$(5) \quad R_{\mu\nu} = \Omega_{\alpha\nu}^{\lambda} \Omega_{\lambda\mu}^{\alpha},$$

che, nelle Note precedenti, ho mostrato equivalere alle equazioni gravitazionali; contraendo per $\alpha = \mu$ segue

$$(6) \quad \Omega_{\nu\varrho;\alpha}^{\alpha} = 0.$$

(1) Nelle citate Note precedenti volli riferire questa condizione ad un lavoro del Bortolotti, ma non lo citai esattamente. Valga la presente annotazione per rettifica.

Quest'ultima, per note proprietà dei tensori emisimmetrici ⁽¹⁾, è equivalente alla

$$(7) \quad \Omega^{\alpha\nu\rho} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \{ \sqrt{g} X^{\alpha\nu\rho k} \},$$

ove X indica un tensore emisimmetrico. Essa, contratta per rapporto a due qualsiasi degli indici α, ν, ρ si riduce a

$$(8) \quad 0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \{ \sqrt{g} F^{\beta k} \},$$

cioè a una nota espressione delle equazioni di Maxwell fuori dell'elettricità. Ma per la ricordata necessaria differenza dei valori degli indici, il tensore Ω ha ormai sole 4 componenti distinte. Perciò le equazioni (7) si lasciano esse pure identificare colle maxwelliane nei luoghi ove, oltre le forze elettromagnetiche, esiste anche un'ipercorrente che sarà rappresentata dal tensore Ω , mentre le forze elettromagnetiche saranno rappresentate dal tensore X. E così le forze elettromagnetiche risultano, come si voleva, espresse per mezzo delle Ω . È inoltre facile verificare che il tensore elettromagnetico costruito, come al solito, colle F, rientra nella forma generale del tensore energetico (occorrente nelle equazioni gravitazionali) costruito per mezzo delle Ω .

4. Mi riservo di dare con altra pubblicazione più diffusa maggiori particolari su questa teoria, che giunge alla conclusione, veramente sorprendente, che, *applicando ad uno spazio quadridimensionale pseudo-euclideo una torsione sottoposta alla sola condizione di non alterarne il parallelismo assoluto e l'eucledicità* (quest'ultima intesa nel senso sopra ricordato), *si ottenga senz'altro un continuo atto a rappresentare geometricamente UN UNIVERSO* (spazio-tempo colla relativa materia, elettricità e coi corrispondenti campi) *SOTTOPOSTO A LEGGI ESSENZIALMENTE ANALOGHE A QUELLE DELLA NOSTRA FISICA.*

(1) Ved. p. es. A. PALATINI, *Sulla Divergenza dei tensori emisimmetrici e dei vettori*, « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere », serie II, vol. LXII, p. 281.

Fisica. — *Sul moto di un elettrone in un reticolo cristallino.*
Nota ⁽¹⁾ di G. C. WICK, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

La Teoria elettronica dei metalli richiede la soluzione dell'equazione di Schrödinger relativa a n elettroni in un reticolo cristallino. Numerosi tentativi di soluzione approssimata del problema sono stati compiuti, finora con scarso successo. Solo il modello di Heisenberg ⁽²⁾ ha fornito alcuni brillanti risultati sul ferromagnetismo, ma purtroppo non si presta allo studio della conduzione elettrica. A questo scopo ci si è finora dovuti accontentare di una approssimazione alquanto grossolana, che è analoga a quelle spesso usate nella teoria degli spettri, e nella teoria degli urti elastici (effetto Ramsauer).

Si schematizza cioè l'azione mutua degli elettroni, supponendo che le forze che agiscono su ogni singolo elettrone si possano sostituire con un campo elettrostatico conveniente, specie di « self consistent field » alla Hartree. Al potenziale di questo campo si attribuisce la stessa periodicità del reticolo ⁽³⁾.

Com'è noto, un'approssimazione del genere, nel caso di un atomo, non fornisce neanche un'immagine qualitativa dello spettro, se vi è più di un elettrone di valenza. A questo scopo occorre considerare i fenomeni di risonanza dovuti all'identità degli elettroni (Austausch). Secondo i calcoli di Massey e Mohr ⁽⁴⁾, anche nella teoria degli urti tali fenomeni di risonanza non possono venir trascurati, specialmente per elettroni lenti (eff. Ramsauer). Poichè le velocità degli elettroni conduttori corrispondono a un numero non grande di volta, è probabile che anche per questi l'effetto dell'identità non sia trascurabile.

Scopo di questo lavoro è di mostrare come per lo meno di una parte dell'interazione tra gli elettroni si possa abbastanza facilmente tener conto in modo più fine (e cioè considerando la risonanza), di quel che non avvenga con un « self consistent field ».

Secondo il modello che per solito si ammette, un metallo è costituito da un reticolo di ioni positivi, in seno al quale si muovono gli elettroni conduttori. Noi trascureremo, o schematizzeremo al modo solito, l'azione mutua degli elettroni conduttori; terremo invece conto della risonanza tra un singolo elettrone conduttore e gli elettroni legati che costituiscono gli

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1932.

(2) W. HEISENBERG, « Zs. f. Phys. », 49, 619 (1928).

(3) Cfr. F. BLOCH, « Zs. f. Phys. », 52, 555 (1929).

(4) « Proc. Roy. Soc. », London, 132, 605 (1931).

ioni del reticolo. Senza dubbio questa approssimazione è alquanto arbitraria, e sarebbe se non altro più coerente trascurare la risonanza completamente; il presente lavoro è quindi da considerare soltanto come una soluzione parziale del problema più generale, e assai più difficile, della risonanza tra tutti gli elettroni del reticolo.

Il primo passo del calcolo consiste naturalmente nel costruire un'autofunzione approssimata senza tener conto dell'identità degli elettroni. Questa sarà il prodotto di un'autofunzione che contiene le coordinate di tutti gli elettroni legati, per un'autofunzione dell'elettrone conduttore.

Delle proprietà dell'equazione di Schrödinger per un elettrone in un campo periodico ⁽¹⁾, ci basterà ricordare quanto segue:

L'equazione è:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu [E - V(x)] \psi = 0 \quad ; \quad \mu = \frac{8 \pi^2 m}{h^2}$$

dove:

$$(2) \quad V(x + a) = V(x)$$

se a è la costante del reticolo (per semplicità ci limitiamo a una dimensione).

Grazie all'esistenza di un integrale del movimento, rappresentato dall'operatore L tale che:

$$L\psi(x) = \psi(x + a)$$

le autofunzioni di (1) posson esser scelte in modo che:

$$(3) \quad \psi(x + a) = e^{2\pi i f} \psi(x)$$

dove f è un numero reale (determinato, per una data ψ , solo a meno di un addendo intero).

La costante del movimento f , o meglio $\frac{h}{a}f$ presenta una certa analogia coll'impulso, e anzi si riduce a questo se si fa tendere a a zero (elettrone libero).

Per solito, per aver a che fare con un cristallo di dimensioni finite, si impone la condizione di periodicità ⁽²⁾:

$$(4) \quad \psi(x + Ga) = \psi(x).$$

Allora f è quantizzato e può solo assumere i valori:

$$f = \frac{k}{G} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(1) Cfr. F. BLOCH, loc. cit.

(2) Cfr. BLOCH, loc. cit.; G è un numero intero assai grande.

Lo spettro dei livelli energetici è allora discreto, ma costituito da una successione di livelli vicinissimi (salvo certi intervalli « proibiti »), che somiglia tanto meglio a uno spettro continuo quanto più G è grande. Ma ⁽¹⁾ la distanza tra due autovalori aventi valori uguali (congruenti mod. G) di k è dell'ordine dei potenziali di eccitazione degli atomi, qualunque sia G .

Proprietà analoghe valgono in tre dimensioni, dove, invece di uno, vi son tre numeri f_1, f_2, f_3 , che corrispondono a tre traslazioni elementari indipendenti del reticolo (v. formula (3)).

Sia ora :

$$(5) \quad \Phi(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \dots)$$

l'autofunzione degli elettroni legati, che corrisponde allo stato quantico in cui tutti gli ioni sono nello stato fondamentale, che supporremo sia 1S (supponiamo tutti gli ioni uguali tra di loro) e sia E_0 l'energia corrispondente.

Sia inoltre ψ_f una soluzione di (1) (in tre dimensioni), con $E = E_f$. Senza tener conto dell'identità degli elettroni, possiamo considerare :

$$E_0 + E_f \quad \text{e} \quad \Phi \cdot \psi_f = \Psi_f$$

rispettivamente come autovalore e autofunzione di approssimazione nulla.

Cerchiamo ora di calcolare i livelli energetici del sistema in prima approssimazione. A questo scopo occorre tener presente che ogni autovalore $E_0 + E_f$ è multiplo, poichè una permutazione degli elettroni non ne altera il valore. È a questo punto che si introduce nel calcolo il fenomeno di risonanza a cui abbiamo accennato più volte.

Seguiremo il metodo di Slater ⁽²⁾, introducendo senz'altro le coordinate dei momenti magnetici propri degli elettroni (benchè la loro azione dinamica venga trascurata) e il principio di Pauli. Bisognerà dunque moltiplicare le Ψ_f per una funzione delle coordinate dello « spin », e rendere poi il prodotto antisimmetrico con il solito processo. Queste nuove autofunzioni considereremo d'ora in poi come autofunzioni di approssimazione nulla.

Un primo vantaggio del metodo di Slater sta in una enorme riduzione della molteplicità degli autovalori di approssimazione nulla.

Poichè infatti lo stato fondamentale di uno ione è 1S , l'autovalore E_0 del reticolo è semplice, e l'autovalore $E_0 + E_f$ del sistema totale è solamente doppio (la coordinata dello « spin » dell'elettrone conduttore può assumere due valori).

(1) V. per es. R. de L. KRONIG e W. G. PENNEY, « Proc. Roy. Soc. London », 130, 499 (1931).

(2) V. per es. F. BLOCH, « Zs. f. Phys. », 57, 545 (1929).

Poichè inoltre la risultante dei momenti magnetici propri è una costante del movimento, possiamo fissarne *a priori* la direzione; avremo dunque in sostanza a che fare con autovalori semplici.

Il risultato ben noto della teoria delle perturbazioni è, in questo caso: si ottengono gli autovalori in prima approssimazione calcolando i valori medi dell'energia per le autofunzioni di approssimazione nulla.

Questo modo di procedere richiede, nel nostro caso, alcune giustificazioni.

Anzitutto si trascura così facendo l'eccitazione degli ioni. Ora questa può avere influenza non solo sulla seconda approssimazione, ma anche sulla prima, e precisamente se l'elettrone conduttore ha un'energia superiore al potenziale di eccitazione di uno ione (urti non elastici). Non so se sia già stato osservato, che però tali urti inelastici non possono avvenire per gli elettroni conduttori di un metallo. Infatti il gas elettronico obbedisce alla statistica di Fermi, e si trova normalmente in condizioni di degenerazione: tutti gli stati quantici al disotto di un'energia critica ϵ sono completamente occupati, e tutti quelli al disopra sono vuoti. Solo in un intorno di ϵ di larghezza dell'ordine di kT vi sono sia stati vuoti che occupati.

In queste condizioni un urto inelastico è proibito dal principio di Pauli, poichè porterebbe un nuovo elettrone in uno degli stati già completamente occupati ($kT = \frac{3}{100}$ Volt el. per $T = 300^\circ$). Questa osservazione non si applica senz'altro al nostro caso, poichè noi non consideriamo che *un* elettrone conduttore, ma mi sembra che rappresenti una giustificazione sufficiente, se si pensa che l'uso che vi si fa del principio di Pauli non richiede un'interazione « dinamica » degli elettroni conduttori.

Un altro dubbio, sulla applicabilità del calcolo delle perturbazioni in prima approssimazione, potrebbe sorgere dal fatto che benchè ogni autovalore $E_0 + E_f$ sia, strettamente parlando, semplice, non può tuttavia venir trattato come tale, per la proprietà già ricordata, che E_f si può praticamente considerare come variabile in modo continuo.

Ma questa difficoltà non esiste, poichè, come mostreremo immediatamente, non occorre considerare combinazioni che tra stati aventi la stessa f . In altre parole, un elemento non diagonale della matrice energia relativo a due autofunzioni Ψ_f e $\Psi_{f'}$ (antisimmetrizzate) è identicamente nullo se non è

$$(6) \quad f - f' = \text{intero.}$$

Infatti tale elemento, che vogliamo chiamare I , è evidentemente invariante rispetto a una traslazione elementare delle autofunzioni Ψ_f e $\Psi_{f'}$. D'altra parte una tale traslazione non fa che moltiplicare Ψ_f per $e^{2\pi i f}$, $\Psi_{f'}$ per $e^{2\pi i f'}$. Trasforma quindi I in $I \cdot e^{2\pi i (f - f')}$. Dev'essere dunque:

$$I = I \cdot e^{2\pi i (f - f')}$$

e perciò ⁽¹⁾:

$$I = 0 \quad \text{se non vale la (6).}$$

Ciò premesso, passiamo al calcolo della perturbazione. Scegliremo a questo scopo il modello più semplice di ione: un nucleo di carica Ze , circondato da due elettroni nello stato $1s$.

Come autofunzione si può scegliere, con discreta approssimazione:

$$u(r_1)u(r_2) \quad ; \quad u(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi c^3}} e^{-\frac{r}{c}}$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono agli elettroni, con r si indica la distanza dal nucleo, e c è una lunghezza da scegliere convenientemente, per es.:

$$\frac{1}{c} = \left(Z - \frac{5}{16} \right) \frac{1}{a_0}$$

dove a_0 è il raggio della prima orbita di Bohr dell'idrogeno. Trascurando l'azione mutua degli ioni, si potrà assumere per Φ , formula (5), il prodotto delle autofunzioni dei vari ioni.

È comodo, nel calcolo, aver a che fare con un numero finito di ioni. Bisogna quindi ricorrere a una condizione al contorno, come avviene nella teoria dei calori specifici, o nella teoria elettronica dei metalli per gli elettroni conduttori. Sarà opportuno scegliere, non solo per l'elettrone conduttore, ma per tutti gli elettroni del reticolo una condizione di periodicità, v. (4), come si otterrebbe nel caso lineare se gli ioni fossero disposti su di un anello. Scegliamo come « campo fondamentale » un parallelepipedo, di lati paralleli agli assi del reticolo (che supporremo semplice) contenente G^3 atomi. Le autofunzioni siano normalizzate per questo campo.

Vi sono allora G^3 stati quantici $1s$, ognuno dei quali è occupato da due elettroni. Vi è inoltre uno stato quantico, rappresentato dalla ψ_f , occupato da un solo elettrone. Il calcolo della perturbazione è un caso particolare di quello di Bloch ⁽²⁾, che considera anche un numero qualsiasi di stati semplicemente occupati. Specializzando le formule di Bloch, si trova come perturbazione dell'energia:

$$(7) \quad A + Q - \sum_n J_n$$

dove A è una somma di termini che rappresentano azioni tra gli ioni, e non dipende dalla ψ_f scelta. L'integrale Q , che per solito si chiama elet-

(1) Questo risultato non sorprende, esso significa in sostanza che f è una costante del movimento rispetto a tutte le azioni degli ioni sull'elettrone conduttore, il che è naturale poichè queste azioni hanno la stessa periodicità del potenziale V , formula (2).

(2) F. BLOCH, « Zs. f. Phys. », 57, 545 (1929).

trostatico, rappresenta l'energia potenziale media dell'elettrone nello stato ψ_f , nel campo elettrostatico creato dalla distribuzione media di elettricità che corrisponde all'autofunzione Φ (potenziale creato dagli ioni).

J_n è infine l'integrale di scambio collo stato $1s$ dello ione n (supposti numerati gli ioni con un indice n):

$$(8) \quad J = \int u(r_1) \overline{\psi_f(x_2, y_2, z_2)} W u(r_2) \psi_f(x_1, y_1, z_1) d\tau_1 d\tau_2$$

dove W è l'interazione tra l'elettrone conduttore e lo ione n , e dove l'indice n è ora trascurato poichè come si vede facilmente, l'integrale non dipende dalla posizione dello ione. La sommatoria in (7) è estesa a tutti i G^3 ioni del campo fondamentale. È chiaro che l'integrazione in (8) si può estendere a tutto lo spazio. Poichè finalmente tutti gli integrali J sono uguali, possiamo sopprimere in (7) il segno di sommatoria, normalizzando però la ψ_f in modo che

$$(9) \quad \int |\psi_f|^2 dx dy dz = 1$$

l'integrale essendo esteso solo a una cella elementare.

Allora, a meno di una costante additiva che non dipende da f , l'energia del sistema è:

$$E_f + Q - J.$$

Si tratta ora di esaminare come varia $Q - J$ in funzione di f .

Le autofunzioni ψ_f che compaiono negli integrali Q e J non sono note con sufficiente approssimazione che per grandi velocità; allora si può porre:

$$(10) \quad \psi_f = \gamma e^{2\pi i f \frac{x}{a}} \quad ; \quad E_f = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{f}{a} \right)^2$$

dove γ è una costante da scegliere in modo che valga la (9) e la (8) diventa:

$$(11) \quad J = \frac{\gamma^2}{\pi c^3} \iint \left(e^{-\frac{r_1}{c}} - 2\pi i f \frac{x_2}{a} \left(-\frac{Ze^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_{12}} \right) e^{-\frac{r_2}{c}} + 2\pi i f \frac{x_1}{a} \right) d\tau_1 d\tau_2.$$

Come si vede facilmente, J tende a zero rapidamente al crescere della velocità. (Si pensi al teorema:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{ikx} dx = 0$$

spesso usato in ottica). È questo il fatto già osservato nella teoria degli urti, che gli effetti dello scambio sono trascurabili per grandi velocità dell'elettrone incidente.

Del resto l'integrale (11) si può calcolare. La parte contenente $\frac{Ze^2}{r_1}$ si calcola facilmente e si trova:

$$= -32\pi Ze^2 \gamma^2 c^2 (1 + \xi^2)^{-3} \quad ; \quad \xi = 2\pi f \frac{c}{a}.$$

La parte con $\frac{e^2}{r_{12}}$ si può integrare con uno sviluppo in serie di funzioni sferiche, e in particolare per $f = 0$ in termini finiti. Si tratta del resto di integrali calcolati da Massey e Mohr nel lavoro citato (v. per es. l'integrale g formola (38) per $\delta = 0$). Utilizzando i risultati di questi autori si vede facilmente che l'integrale (11), che per $f = 0$ vale:

$$-4\pi e^2 \gamma^2 c^2 (8Z - 5)$$

si riduce già a 1/10 di questo valore, per $f = 1$ ($Z = 3$).

Si ha dunque il risultato che gli effetti dello scambio hanno importanza precisamente per quelle velocità, per cui non possiamo calcolarli in modo soddisfacente. Si noti anche che per piccole velocità l'autofunzione ψ_f è tutt'altro che ortogonale alla u , il che rende ancor più incerto il metodo di approssimazione. Può tuttavia essere interessante esaminare le conseguenze a cui si giunge adoperando le formole approssimate (10) e (11).

È chiaro che allora la distribuzione elettrica media corrispondente alla ψ_f non dipende da f ; l'integrale Q si comporta allora come una costante additiva, che dimenticheremo.

Consideriamo per semplicità il caso di una sola dimensione.

Allora la E_f è data approssimativamente dalla formola (10); soltanto nei punti $f = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$ si ha una deviazione qualitativamente notevole, perchè la funzione E_f è ivi discontinua⁽¹⁾. Il termine $-J$ è positivo per $f = 0$ e si annulla rapidamente al crescere di f ; già alla prima discontinuità si è ridotto considerevolmente. Se dunque tracciamo il diagramma dell'energia $E = E_f - J$ in funzione di f troveremo una curva che somiglia a una parabola, con le discontinuità già ricordate⁽¹⁾, e che per di più ha un massimo invece che un minimo nel punto $f = 0$.

Nella teoria elettronica dei metalli ci si limita per solito al primo pezzo della curva E_f . Il nostro risultato è abbastanza curioso, poichè mostra che in questo primo pezzo vi posson essere due minimi invece di uno, mentre dove E_f ha un minimo, si ha un massimo di E (un massimo di E_f per $f = 0$, si può avere nei pezzi superiori della curva, per es. nel secondo,

(1) V. la figura in R. PEIERLS, « Ann. d. Phys. » [5] 4, 121 (1930).

se approfittando della indeterminazione nella definizione di f , vi si fa variare f da $-\frac{1}{2}$ a $+\frac{1}{2}$).

Abbiamo qui un esempio del fatto ben noto che nel problema di n elettroni in un reticolo, lo stato di energia minima non ha necessariamente impulso medio nullo. (Per un solo elettrone, l'autofunzione di energia minima è priva di nodi, quindi $f = 0$. Ciò non vale per n elettroni, grazie al principio di Pauli). In modo analogo, lo stato fondamentale di un atomo con più elettroni non è necessariamente uno stato S.

Non è però detto che le circostanze qui indicate si debban sempre presentare; è chiaro che la presenza del massimo per $f = 0$, dipende dalla rapidità con cui J tende a zero al crescere di f . La presenza di J potrebbe per es. soltanto appiattire il minimo di E . Sarebbe dunque necessario un calcolo soddisfacente di (8). Inoltre considerando ioni in cui anche gli stati $2s, 2p, \dots$ siano occupati, si potrebbe forse trovare un segno diverso per J , ecc.

RIASSUNTO. — Tenendo conto delle forze di risonanza dovute all'identità tra un elettrone conduttore e gli elettroni legati del reticolo, si calcolano in prima approssimazione i livelli energetici di un elettrone in un reticolo. Si trova un massimo relativo dell'energia per velocità nulla dell'elettrone.

Ringrazio il prof. E. Fermi per i suoi preziosi consigli, e il prof. E. Persico, per l'interesse con cui ha seguito questo lavoro.

Chimica (Chimica biologica). — *Ricerche sulla colesterina cerebrale umana*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di C. ANTONIANI e F. ZANELLI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

La colesterina cerebrale umana è stata oggetto di numerose indagini di carattere sia chimico che fisiologico; dal punto di vista puramente chimico e per quanto è a nostra conoscenza, questa sostanza non è però mai stata sottoposta ad uno studio sistematico, compiuto secondo i criterii in uso per la caratterizzazione dei termini di questo gruppo. Tanto che se si volesse asserire, oppure negare, l'identità della colesterina cerebrale con la colesterina tipica della bile bisognerebbe convenire che manca oggidì ancora ogni sicuro elemento di confronto.

In considerazione di questo e anche nell'intento di prepararci la indispensabile base sperimentale per uno studio di carattere chimico-fisiologico che abbiamo in animo di compiere successivamente, abbiamo eseguito le ricerche di cui diamo conto in questa Nota.

PARTE SPERIMENTALE

Le ricerche riguardano la colesterina cerebrale dell'uomo adulto e del feto a termine, che vennero studiate separatamente. La sostanza cerebrale utilizzata comprendeva il solo cervello, senza il cervelletto.

La colesterina venne separata dalla massa cerebrale, previamente essicata e polverizzata, per estrazione con acetone a freddo e venne successivamente purificata mediante ripetute ricristallizzazioni da alcool-etero. Abbiamo seguito questo procedimento, in luogo di quello abitualmente in uso dell'estrazione eterea del prodotto della saponificazione, per la ragione che ci interessava di conservare inalterati i fosfatidi, oggetto di altre ricerche. Per la nota assenza di esteri colesterinici nel cervello, si rendeva del resto ovvia la saponificazione.

COLESTERINA CEREBRALE DI FETO.

Colesterina. — Cristallizza anidra da alcool-etero. Fonde a 150°⁽³⁾, presenta cioè un punto di fusione leggermente superiore a quello della colesterina biliare. Per il potere rotatorio⁽⁴⁾ si è osservato il valore $\alpha_D = -38,7$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1932.

(3) Tutti i punti di fusione qui riportati sono corretti.

(4) Il potere rotatorio venne sempre determinato in soluzione cloroformica.

($C = 7.4\%$), che è poco discosto dal potere rotatorio che si osserva per la colesterina biliare (-37.8).

La determinazione del peso molecolare (gr. 0.5461 in gr. 15.08 di benzolo, abbassamento 0.44°) ha dato il valore di 410. Il valore calcolato per $C_{27}H_{45}OH$ è 386.

Acetato. — Venne preparato secondo le indicazioni di A. Menozzi ⁽¹⁾. Fonde a 117° , leggermente superiore al punto di fusione dell'acetato della colesterina biliare ($114-115^\circ$).

Benzoato. — Venne preparato secondo le indicazioni di A. Menozzi ⁽²⁾. Fonde a 148° , coincidente col punto di fusione del benzoato della colesterina biliare ($146-148^\circ$). Il potere rotatorio ha dato $\alpha_D = -17.1$ ($C = 3.40\%$). Le osservazioni che si hanno (Menozzi) pel corrispondente estere della colesterina biliare coincidono sostanzialmente con questa.

L'analisi elementare ha dato:

Sostanza	H ₂ O	CO ₂	H	C
gr. 0.1464	gr. 0.1374	gr. 0.4504	10.5 %	83.9 %
» 0.1082	» 0.1008	» 0.3302	10.4 %	83.2 %.

Calcolato per $C_{34}H_{50}O_2$: H 10.2 %; C 83.2 %.

Palmitato. — Venne preparato secondo K. Hürthle ⁽³⁾. Fonde a 76.5° . Per il potere rotatorio abbiamo ottenuto $\alpha_D = -24.8$ ($C = 5.40\%$). Non si hanno osservazioni per il corrispondente derivato della colesterina biliare.

COLESTERINA CEREBRALE DI ADULTO.

Colesterina. — Cristallizza anidra da alcool-etere. Fonde a 151° . Potere rotatorio $\alpha_D = -35.5$ ($C = 8.85\%$).

Acetato. — Preparato in modo analogo al precedente. Fonde a 119.5° . Potere rotatorio $\alpha_D = -41.0$ ($C = 2.80\%$). Nelle stesse condizioni di concentrazione per l'acetato della colesterina biliare abbiamo osservato $\alpha_D = 44.5$.

L'analisi elementare ha dato:

sost. gr. 0.1520; H₂O gr. 0.1620; CO₂ gr. 0.4358; H 11.2 %; C 78.2 %.

Calcolato per $C_{29}H_{48}O_2$: H 11.2 %; C 78.1 %.

Salicilato. — Preparato secondo Golodetz ⁽⁴⁾. Fonde a 179° come il corrispondente estere della colesterina biliare. Potere rotatorio $\alpha_D = -20.4$ ($C = 2.35\%$).

(1) A. MENOZZI, questi « Rendiconti », vol. XII, 1903.

(2) A. MENOZZI, loc. cit.

(3) K. HÜRTHLE, « Zeitschr. Physiol. Chem. », XXI, p. 331 (1896).

(4) GOLODETZ, « Chem. Zeitung. », XXXI, p. 1215 (1907).

Formiato. — Preparato secondo le indicazioni di Menozzi ⁽¹⁾. Fonde a 95-96° come il corrispondente derivato della colesterina biliare. Potere rotatorio $\alpha_D = - 52.1$ ($C = 3.20 \%$). Il formiato della colesterina biliare, in uguali condizioni di concentrazione, ci ha dato $\alpha_D = - 51.6$, cioè praticamente lo stesso valore.

Palmitato. — Preparato in modo analogo al precedente. Fonde a 74°. Potere rotatorio $\alpha_D = - 23.4$ ($C = 8.53 \%$).

Diidrocolesterina. — Preparata secondo Willstätter e Mayer ⁽²⁾ per azione dell'idrogeno sulla colesterina in soluzione eterea in presenza di nero di platino. Fonde a 145°. Potere rotatorio $\alpha_D = + 19.8$ ($C = 9.70 \%$). Il punto di fusione da noi osservato è leggermente superiore a quello indicato da altri sperimentatori pel derivato della colesterina biliare (141-143°). Il potere rotatorio coincide con quello già osservato dal Moreschi ⁽³⁾ per la diidrocolesterina biliare.

CONSIDERAZIONI.

La grandezza molecolare e la composizione centesimale della colesterina cerebrale umana sono le stesse della colesterina tipica della bile.

Rispetto alla colesterina biliare la colesterina cerebrale umana del feto e dell'adulto presenta in genere, sia per sé che pei varii derivati da noi esaminati, un punto di fusione leggermente ma sensibilmente superiore. Qualche differenza si nota pure nei valori del potere rotatorio specifico.

Nonostante queste discordanze non ci sentiamo però autorizzati a concludere, nei riguardi della colesterina cerebrale, per una individualità diversa da quella della colesterina biliare.

Per quanto concerne il punto di fusione della colesterina riteniamo che il maggior valore da noi osservato sia in relazione all'alto grado di purezza della sostanza. Se si confrontano le costanti fisiche e soprattutto il punto di fusione dei numerosi prodotti colesterinici isolati dai varii organi e tessuti animali, si rilevano differenze talora assai notevoli, le quali sono per lo più dovute alla variabile quantità in cui possono esser presenti la diidrocolesterina, la metacolesterina e soprattutto l'ossicolesterina, noto prodotto di ossidazione della colesterina che a questa sempre si accompagna nell'organismo animale e che secondo le ricerche di J. Lifschütz ⁽⁴⁾ e M. C. Rosenheim ⁽⁵⁾ è presente nella sostanza cerebrale soprattutto allo stato di estere, mentre come già si è detto, la colesterina è esclusivamente allo stato libero. Data la debolissima solubilità degli esteri colesterinici in genere nell'acetone a freddo noi riteniamo che il processo di estrazione da noi seguito abbia precisa-

(1) A. MENOZZI, loc. cit.

(2) WILLSTÄTTER e MAYER, « Ber. Deutsch. Chem. Gesellsch. », CLI, 11, p. 2201.

(3) MORESCHI, « Rendic. Soc. Chim. Ital. », fasc. X.

(4) J. LIFSCHÜTZ, « Chem. Zentr. », IV (1920).

(5) M. ROSENHEIM, « Chem. Zentr. », I (1914).

mente avuto per effetto di allontanare gli esteri dell'ossicolesterina, consentendo così di giungere ad un prodotto colesterinico ad insolito grado di purezza.

Nei riguardi del potere rotatorio specifico, nel giudicare le differenze riscontrate non si deve poi naturalmente dimenticare che troppi sono i fattori che possono influire sulla determinazione perchè si possa pretendere una assoluta coincidenza di valori.

Fatte queste considerazioni, i valori da noi osservati per il punto di fusione ed il potere rotatorio specifico della colesterina cerebrale e dei vari suoi derivati, si possono considerare come coincidenti con quelli dei corrispondenti termini della colesterina biliare. Ed allo stato attuale delle nostre conoscenze su questo gruppo di sostanze la colesterina del cervello appare quindi identica a quella della bile.

Ci riserviamo di ritornare sull'argomento quando saremo in possesso dei risultati di altre ricerche attualmente in corso, nonchè di quelli dell'esame cristallografico, di cui si è cortesemente incaricata la prof. De Angelis.

Dobbiamo un vivo ringraziamento al prof. Pratolongo che ci consentì l'esecuzione di questo lavoro, al prof. Contardi ed al dott. Maimeri che spesso ci consigliarono nell'esecuzione di esso ed al prof. Pugliese che ci fornì il prezioso materiale sperimentale.

Chimica (Chimica fisica). — *Sulle leghe di litio.* — I. *Analisi termica e röntgenografica del sistema litio-stagno* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Il problema del comportamento del litio rispetto agli altri metalli, la capacità cioè di formare o meno con essi soluzioni solide o composti, si può dire non sia stato fino ad ora affrontato e risolto con criteri scientifici o pratici. Infatti gli studi eseguiti sono quasi tutti incompleti e non permettono quindi di trarre alcuna deduzione utile. Fanno eccezione gli studi di Tammann ⁽³⁾ e di S. Pastorello ⁽⁴⁾.

Il primo che si sia occupato dei composti di litio con altri metalli è stato P. Lebeau ⁽⁵⁾ che ha studiato la preparazione dell'antimoniuro di litio. Egli ha osservato che il litio si combina con l'antimonio facilmente e con reazione fortemente esotermica. Infatti se si introduce in una provetta un

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1932.

(3) « Ztschr. Anorg. Chemie », 67, 183-99 (1910).

(4) « Gazz. Chim. It. », 60, 494 (1930); 60, 988 (1930); 61, 47 (1931).

(5) « Compt. Rend. », 134, 231 (1902); « Bull. Soc. Chim. », 27, 254 (1902).

po' di antimonio grossolanamente polverizzato ed un pezzetto di litio e si riscalda debolmente, si vede dapprima il litio fondere e poi reagire violentemente con l'antimonio con sviluppo di calore e vivo fenomeno luminoso: parte del litio volatilizza per effetto dell'alta temperatura raggiunta dalla massa e nella provetta resta una massa nera fusa che decompone l'acqua a freddo con sviluppo di idrogeno. Evidentemente però questo metodo non può essere utilizzato per la preparazione di composti definiti, per cui l'Autore ha applicato a tale scopo un altro metodo che consiste nell'elettrolizzare una miscela in parti uguali di cloruro di litio e di cloruro di potassio usando un catodo di antimonio. Egli ha potuto ottenere in questo modo l'antimoniuro di litio Li_3Sb che si presenta come un composto definito, cristallizzato, poco fusibile. Nello stesso modo egli ha preparato anche l'arseniuro di litio Li_3As . Questo metodo è stato pure applicato alla preparazione di altri composti di litio con metalli facilmente fusibili, come stagno e piombo.

Successivamente Masing e Tammann⁽¹⁾ hanno studiato il comportamento del litio rispetto al sodio, potassio, cadmio, magnesio, stagno e questo è indubbiamente lo studio più completo che in questo campo sia stato fatto finora. Anche in questo caso si rilevano notevoli imperfezioni sperimentali che possono permettere dubbi sull'attendibilità dei risultati ottenuti. Infatti questi Autori operano prevalentemente in tubi di vetro di Jena difficilmente fusibili. Ora l'attacco del vetro, che è molto forte quando si operi a temperature superiori ai 350° , si fa sentire in modo notevole anche a temperature inferiori, ciò che si manifesta con la colorazione nero azzurrastra che assume la superficie del vetro bagnato dal litio fuso. Anche i crogioli di ferro, da essi usati, risentono un attacco notevole da parte del litio. Essi operano inoltre in corrente di idrogeno che dà luogo alla formazione di sensibili quantità di idruro di litio LiH che aumentano con l'aumentare della temperatura: infatti già a 500° e 760 mm. il litio assorbe 17 volumi di idrogeno⁽²⁾. È per questo che essi non hanno potuto effettuare in modo esatto lo studio termico del sistema litio-magnesio, a causa dell'alto punto di fusione di questo e della necessità di fondere entrambi i componenti per potere avere delle miscele omogenee. Essi si limitano in questo caso ad affermare che litio e magnesio danno luogo verosimilmente alla formazione di due serie di cristalli misti con una lacuna di miscibilità da 85 a 95 % di magnesio. Pure discutibile, per le considerazioni su esposte, è il risultato che essi hanno ottenuto per il sistema litio-cadmio nel quale avrebbero trovato due composti: LiCd che fonderebbe a 541° e LiCd_2 che fonderebbe a 505° . Analoghe considerazioni valgono anche per il sistema litio-stagno. Più attendibili sono invece i risultati ottenuti per i sistemi litio-sodio,

(1) Loc. cit.

(2) « Compt. Rend. », 78, 807 (1874).

litio-potassio avendo potuto lavorare a temperature non superiori a 200°. Secondo questi Autori, litio e sodio mostrano allo stato liquido una lacuna di miscibilità dal 92 al 3 % di litio e non danno luogo alla formazione nè di composti, nè di cristalli misti. Il punto di fusione del sodio 97°, non viene abbassato sensibilmente per aggiunte successive di litio, mentre quello del litio diminuisce da 179° fino a 162° per la lega contenente il 92 % di questo. Analogo comportamento avrebbero litio e potassio per i quali si rileva una lacuna di miscibilità dal 95 % di litio fino quasi al potassio puro.

Anche nel caso del sistema alluminio-litio le ricerche sono molte incomplete. Questo sistema è stato studiato da parecchi autori⁽¹⁾ ed è stato anche oggetto di un brevetto da parte della Metallbank und Metallurgische Gesellschaft. Questa ha studiato l'influenza di aggiunte successive di litio fino a percentuali non superiori al 6 % per ottenere un indurimento dell'alluminio. Essa ha osservato anche che le leghe ottenute (che oltre all'alluminio ed al litio possono contenere anche altri metalli) possono venire migliorate per riscaldamento a temperature superiori a 100° e successivo lento raffreddamento o mediante tempera in un liquido o con una corrente di gas. Successivamente P. Assmann ha studiato il sistema Al-Li fino ad una percentuale del 12 % di litio. Nelle leghe ricche di litio questo Autore ha osservato una notevole durezza e fragilità, ciò che rende impossibile la loro applicazione pratica. Queste leghe presentano inoltre una notevole difficoltà alla fusione. Il lavoro più completo sul sistema Al-Li è quello di A. Müller che lo ha studiato sia per mezzo dell'analisi termica che di quella metallografica. Egli ha osservato che l'alluminio può formare soluzioni solide col litio fino a percentuali del 3, 5 % di questo; dà poi luogo alla formazione del composto Al Li col 20 % di litio. All'aria umida i cristalli misti si mantengono perfettamente lucidi, mentre quelli del composto Al Li si appannano molto facilmente.

J. Czochralski ed E. Rassow⁽²⁾ hanno studiato termicamente e metallograficamente il sistema Pb-Li fino alla percentuale del 2, 2 % di litio che corrisponde al composto Pb_3Li_2 . Questo composto fonde a 470° e forma col piombo un eutectico che fonde a 230° e contiene 0,65 % di litio. Gli Autori hanno osservato inoltre che il piombo può dar luogo alla formazione di cristalli misti solo fino ad una percentuale di 0,04 % di litio e che le leghe contenenti fino ad 1,5 % di litio sono stabili all'aria.

Infine W. Fraenkel e Hahn⁽³⁾ hanno studiato il sistema zinco-litio con metodi termici e metallografici ed hanno osservato che il punto di fusione

(1) *Metallbank und metallurgische Gesellschaft*, F. P. 518023; C. B. 92, IV, 352 (1921); P. ASSMANN, « *Ztschr. f. Metallkunde* », 18, 51-54 (1926); A. MÜLLER, « *Ztschr. f. Metallkunde* », 18, 231-32 (1926).

(2) « *Ztschr. f. Metallkunde* », 19, 111-112 (1927).

(3) « *Metall-Wirtschaft* », 10, 641-42 (1931).

dello zinco scende dapprima fino all'eutectico che corrisponde al 0,6 % in peso di litio e sale poi fortemente fino ad un massimo al 6 % di litio. Gli Autori ritengono esista un composto Zn_3Li_2 .

I lavori sopra accennati sono tutti incompleti e ciò sia per la difficoltà incontrata dai vari Autori nella scelta del materiale resistente al litio anche a temperature elevate, che per la necessità di operare in ambiente di gas inerte anzichè sotto vuoto onde evitare notevoli perdite di litio. Il primo quindi che abbia effettuato uno studio completo su alcuni sistemi di leghe di litio è stato S. Pastorello⁽¹⁾ il quale in questi ultimi anni ha studiato, anche con l'ausilio dell'analisi röntgenografica, i sistemi Li-Ag ed Li-Cu. Anzi egli ha illustrato un caso in cui con la sola analisi röntgenografica si giunge allo studio di un sistema binario senza conoscere di esso in precedenza i risultati dell'analisi termica. Successivamente è riuscito a superare anche le difficoltà sperimentali dell'analisi termica di questi sistemi ed a determinare i rispettivi diagrammi di stato. Egli ha effettuato le fusioni in ambiente di argo purificato per ripetuti passaggi in ciclo chiuso su una miscela di tornitura di calcio e di magnesio mantenuta alla temperatura di 500°⁽²⁾ ed utilizzando un apposito crogiolo di acciaio al nichel-cromo (V2A Krupp). Per la determinazione della curva di raffreddamento, la saldatura calda della coppia termoelettrica platino-platino rodio immersa nella massa fusa, era protetta da un sottile cilindretto di acciaio ricavato per tornitura nello stesso crogiolo. Con ciò si realizza oltre il vantaggio della perfetta protezione della pinza verso i vapori di litio, anche la possibilità di estrarre la pinza stessa senza ulteriore rifusione della massa solidificata, operazione questa che può portare a variazioni della concentrazione del litio per perdita per evaporazione.

Per il sistema litio-argento questo Autore ha potuto determinare termicamente e röntgenograficamente l'esistenza di un composto intrametallico AgLi che fonde a 955° e presenta un reticolo cubico tipo cloruro di cesio con la cella elementare di lato $a = 3,22, \text{Å}$ ed un composto intrametallico AgLi₃ che fonde a 450°; ha determinato inoltre l'esistenza di tre punti eutectici a 610°, 410° e 180° corrispondenti rispettivamente a 30, 70 e 100 % atomico di litio e la non esistenza di soluzioni solide fra i due componenti. Per il sistema Li-Cu egli ha dimostrato l'assenza di composti intrametallici, la non solubilità allo stato solido dei due componenti e la presenza dell'eutectico al punto di fusione del litio puro.

Io ho ripreso lo studio delle leghe di litio utilizzando sostanzialmente lo stesso metodo di questo ultimo Autore ed ho cominciato con l'analisi termica e röntgenografica del sistema litio-stagno. Successivamente riferirò i risultati degli studi in corso sulle altre leghe di litio.

(1) Loc. cit.

(2) « Berichte », 43, 1435 (1910).

Dal diagramma di stato riportato nella fig. 1, si vede subito come l'analisi termica riveli l'esistenza di tre composti intrametallici: Li_4Sn che fonde a 684° , Li_3Sn_2 che fonde a 483° ed LiSn_4 ; si osserva inoltre l'esistenza di tre eutectici a 458° , 320° e 214° corrispondenti al 35, 58 e 94 % atomico di stagno.

L'analisi röntgenografica rivela invece solo i due primi composti. I fotogrammi ottenuti applicando il metodo di Debye ed usando un anticatodo

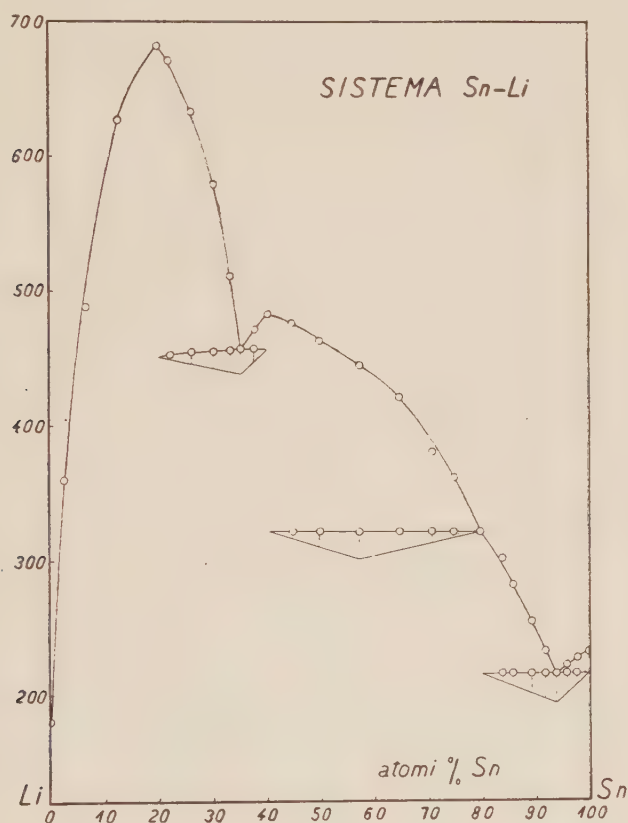


Fig. 1.

di ferro sono molto brutti e permettono solo il calcolo della costante reticolare. Nella tabella riporto gli angoli di diffrazione corrispondenti ai reticoli del litio, dello stagno e dei due composti; dalla tabella si vede come nei fotogrammi di questi ultimi non compaia nessuna linea appartenente ai due metalli puri.

Per il terzo composto LiSn_4 ho ottenuto dei fotogrammi che presentano solo le linee dello stagno sia raffreddando rapidamente che sottoponendo la lega ad una ricottura a 250° per più di 12 ore e ciò verosimilmente perchè questo composto si decompone durante il raffreddamento della

massa solidificata. L'effetto termico però non viene avvertito con l'analisi termica.

TABELLA

Li	Li ₄ Sn	Li ₃ Sn ₂	Sn
		43.1	41.7
48.5			43.7
	50.1	50.0	
	52.7		
	55.5	56.3	
	58.4		59.7
			61.2
70.5		62.4	
		72.0	70.5
	72.4		
	76.2		86.0
89.0		87.4	
	92.5		89.0
	94.3		
			101.0
107.8			102.3
			112.5
	114.5	114.0	
	116.1		
127.5			130.5
		132.4	
			144.0
			149.0

Riassumendo:

a) Viene studiato termicamente il sistema stagno-litio e viene dato il relativo diagramma di stato. Da questo si rileva l'esistenza di tre composti: Li₄Sn che fonde a 684°, Li₃Sn₂ che fonde a 483° e LiSn₄ e l'esistenza di tre punti eutectici a 458°, 320° e 214° corrispondenti rispettivamente al 35, 58 e 94 % atomico di stagno.

b) Viene studiato lo stesso sistema anche col metodo röntgenografico che permette l'identificazione dei composti Li₄Sn e Li₃Sn₂. I fotogrammi ottenuti col metodo delle polveri risultano però poco nitidi e non permettono di affrontare con sicurezza il calcolo della struttura di questi composti. Non è stato invece possibile identificare coi raggi X il composto LiSn₄.

Geologia. — *La diffusione degli strati a Posidonomya alpina nell'Appennino Centrale.* Nota ⁽¹⁾ di F. SCARSELLA, presentata dal Corrisp. G. ROVERETO.

La corrispondenza di tutti, o di una parte, degli strati selciosi ad aptici dell'Appennino mesozoico umbro e marchigiano con quelli a *Posidonomya alpina* Gras delle Alpi orientali, venne prospettata prima dallo Zittel ⁽²⁾, poi dal Cavanari ⁽³⁾ e dal Bonarelli ⁽⁴⁾, in base, soprattutto, ai fossili caratteristici dei livelli sotto e soprastanti.

Tale deduzione ebbe una prima conferma quando il Principi trovò questo fossile nella parte inferiore degli scisti selciosi del M. Tezio ⁽⁵⁾ e, in seguito, di Val d'Urbia ⁽⁶⁾; egli attribuì questo livello della formazione giurassica al Calloviano, o, quanto meno, al Dogger superiore.

Anteriormente, e contemporaneamente, strati con *Posidonomya alpina* venivano descritti, o segnalati, in regioni che hanno facies analoghe a quelle dell'Appennino umbro, dal Bettoni ⁽⁷⁾ per le Prealpi bresciane, da De Stefani ⁽⁸⁾ e Martelli ⁽⁹⁾ per le Apuane e l'Appennino toscano, da Renz ⁽¹⁰⁾ e Martelli ⁽⁹⁾ per l'Albania e le isole joniche.

Più di recente il Renz ⁽¹¹⁾, confrontando il Giurassico dell'Appennino, del Canton Ticino e della Grecia occidentale, ha figurato una sezione di Acquacastagna, presso il Passo della Somma (Spoleto), nella quale gli strati

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1932.

(2) ZITTEL K. A., *Geologische Beobachtungen aus den Central Appenninen*. « Geogn. Paläont. Beiträge Dr. Benecke », vol. II, München, 1869.

(3) CANAVARI M., *La Montagna del Suavicino*. « Boll. Com. Geol. Ital. », 1880; *Sulla presenza degli strati a Posidonomya alpina nell'Appennino centrale*. « Pr. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », 1883.

(4) BONARELLI G., *Miscellanea di note geolog. e paleont. per il 1902. II Prospetto cronologico del Giura italiano*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », 1903.

(5) PRINCIPI P., *Gli strati a Posidonomya alpina nel M. Tezio presso Perugia*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XVIII, 1909.

(6) PRINCIPI P., *La geologia del gruppo del M. Catria e del M. Nerone*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », 1921, vol. XL.

(7) BETTONI A., *Gli strati a Posidonomya alpina nei dintorni di Brescia*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », 1904.

(8) DE STEFANI C., *Le pieghe delle Alpi Apuane*. « R. Istit. Studi Super. », Firenze, 1889.

(9) MARTELLI A., *Sull'età degli strati a Posidonomya dell'Appennino toscano e dell'Albania*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XIX, 1910.

(10) RENZ C., *Oberer und mittlerer Dogger auf Corfu und in Epirus*. « Monatsber. der deutsch. geolog. Gesellsch. », n. 5, Berlin, 1908.

(11) RENZ C., *Vergleiche zwischen dem südschweizerischen, apenninischen und westgriechischen Jura*. « Verhandl. d. Naturforschenden Gesellsch. in Basel ». Band. XXXIV, 1923.

a *Posidonomya alpina* soprastanno a calcari grigio-verdastri e rossi mandorlati, con selce nella parte superiore, privi di fossili, e sottostanno agli scisti selciosi ad aptici. Ha segnalato inoltre la presenza di questi strati a Posidonomie presso la Fonte del Faggio (Morro Reatino), sulle pendici nord-ovest del M. Terminillo.

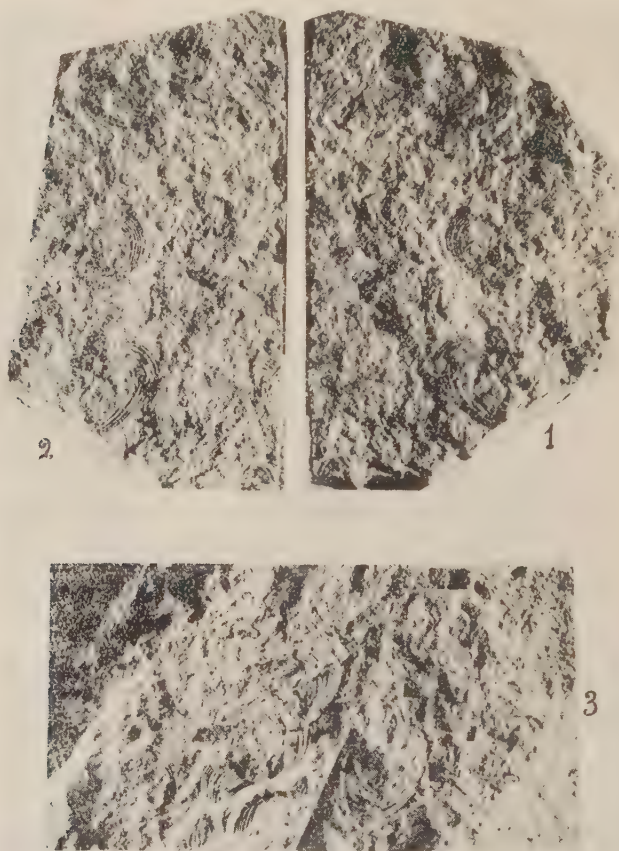


Fig. 1.

In questi ultimi anni, percorrendo l'Appennino, mi è occorso di trovare strati con *Posidonomya alpina* in località nuove e tra loro lontane. Queste località fossilifere sono: M. Malbe presso Perugia, per la mulattiera che da Podere Ragni sale a Podere il Romitorio; Casa S. Cataldo presso Sasso, in Valle d'Ûssita, nei M. Sibillini; il dorso di M. Bove tra la Croce e quota 2113, pure in Valle d'Ûssita.

In tutte le località ricordate i fossili si presentano in identiche condizioni di conservazione e di facies litologica (fig. 1). La roccia che li contiene

è generalmente un calcare grigio-chiaro, molto siliceo, che, per decalcificazione, assume una struttura porosa, con apparenza di *tripoli*, e un colore giallino; spesso le Posidonomie sono comprese anche nei noduli e negli straterelli di selce. Questi fossili sono sempre molto schiacciati, appiattiti, con scomparsa della regione dell'umbone; talvolta, ad es. nel M. Malbe, si ha addirittura un impasto di frammenti di conchiglie; sono, tuttavia, ben identificabili mediante confronti con quelli, di sicura determinazione, delle altre località già studiate.

Nel M. Malbe, per la struttura tettonica particolarmente complicata di quel rilievo, e per le condizioni dell'affioramento, non è cosa facile deter-



Fig. 2.

minare sul posto i rapporti stratigrafici degli strati fossiliferi, i quali, del resto, sono identici a quelli del vicino M. Tezio descritti dal Principi.

Invece in Valle d'Üssita i due affioramenti sono chiaramente stratificati. Presso Casa S. Cataldo le Posidonomie compaiono in sottili strati di calcare grigio-chiaro, con noduli e straterelli di selce grigia o rosea, sottostanti agli scisti calcareo-selciosi, verdastri o rossastri, ad aptici. Trovandosi l'affioramento alla base del versante, il calcare grigio-chiaro scompare inferiormente sotto il detrito, il quale nasconde gli strati successivi.

Nel M. Bove la serie giura-liassica, poggianti per testata contro il calcare massiccio del Lias inferiore di Croce di M. Bove, mostra la successione seguente dal basso in alto (fig. 2):

1° calcari marnosi grigi del Lias medio, con ammoniti limonitizzate (*Hildoceras* cfr. *algovianum* Opp., *Lytoceras cornurolandi* Bettoni) ⁽¹⁾;

2° scisti marnosi e marne rosse e verdastre del Lias superiore (Toarciano) con *Posidonomya Bronni* Voltz e ammoniti (*Hildoceras bifrons* Brug., *Phylloceras Nillsoni* Hébert, *Coeloceras* sp., ecc.);

3° calcari marnosi rossi, nodulosi, con ammoniti (*Hildoceras (Lillia)* Mercati Hauer, *Phylloceras* sp., ecc.) ancora del Toarciano;

4° calcari compatti, duri, grigi, rosei o verdastri;

5° scisti calcareo-selciosi grigi, con *Posidonomya alpina* Gras;

6° scisti calcareo-selciosi verdastri o rossastri, con abbondanti straterelli di selce colorata e con molti aptici;

7° calcari bianchi, in strati sottili, titonico-neocomiani.

Questa sezione corrisponde bene a quelle riportate dal Principi pel M. Tezio e dal Renz per Acquacastagna (Spoleto); anche per la Valle d'Ussita si deve, perciò, ritenere sicuro il riferimento degli strati con *Posidonomya alpina* al Calloviano (Bonarelli, Principi) o al Dogger medio-superiore (Renz).

Interessa ora di notare, come è scopo di questa Nota, che gli affioramenti di strati con *Posidonomya alpina* sopra elencati, e che son quelli finora noti, costituiscono i vertici di un poligono che comprende, *grosso modo*, tutto il mesozoico dell'Umbria; ciò, mentre avvalora quanto ha scritto il Renz ⁽²⁾, che « gli scisti selciosi a Posidonomie del Dogger devono indubbiamente avere una grande diffusione nella regione apenninica peninsulare », autorizza la deduzione che, salvo eventuali, localizzate, sostituzioni di facies, e salvo, beninteso, la scomparsa di qualche membro per cause tettoniche, gli strati a *Posidonomya alpina* sono estesi a rappresentare il Calloviano in tutto l'Appennino mesozoico di facies umbro-marchigiana, e che se ne debba fare ricerca, nei rilevamenti, come di un livello sicuro per i riferimenti cronologici.

(1) LOTTI B., *Il bacino sorgentifero del fiume Nera*. « Boll. R. Com. Geol. », vol. XLI, 1910.

(2) RENZ C., *Vergleiche zwischen ecc.*, op. cit., p. 274.

Mineralogia (Cristallografia). — *Dilatazione termica nei cristalli e legge di Haüy* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. CAVINATO, presentata dal Socio G. BOERIS.

Che la legge di Haüy valga anche quando un cristallo sia dilatato per riscaldamento si può dimostrare nel modo che segue.

Sia O un vertice del cristallo; OX, OY, OZ tre rette su cui stanno tre spigoli del cristallo; A₁, B₁, C₁, A₂, B₂, C₂ i punti, a distanza finita, nei quali i piani di due facce F₁ ed F₂ toccano rispettivamente le tre rette OX, OY, OZ.

Scaldato il cristallo si ottiene un nuovo poliedro; supposto fisso il vertice O (ciò è legittimo) alla tre rette, del poliedro non dilatato, OX, OY, OZ corrisponderanno nel nuovo poliedro le rette OX', OY', OZ' (generalmente distinte dalle precedenti) ed i piani delle due facce F₁ ed F₂ toccheranno i tre assi rispettivamente nei punti A'₁, B'₁, C'₁ ed A'₂, B'₂, C'₂.

Dall'esperienza si apprende che gli angoli tra le rette OX, OY, OZ e gli angoli tra le facce generalmente variano al variare della temperatura (ad esclusione dei cristalli monometrici nei quali sempre rimangono costanti) ma si conserva il parallelismo: cioè a facce e spigoli paralleli del primo poliedro (non scaldato) corrispondono facce e spigoli paralleli del secondo poliedro (scaldato). I punti dei due poliedri si corrispondono quindi in una « affinità » ⁽³⁾.

Detti allora X_∞ X'_∞ i punti all'infinito degli spigoli OX, OX' è (OA₁ A₂ X_∞) = (OA'₁ A'₂ X'_∞). Da cui

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OA'_1}{OA'_2}.$$

Ripetendo il ragionamento su i corrispondenti punti di OY, OZ si ha che $\frac{OB_1}{OB_2} = \frac{OB'_1}{OB'_2}$, $\frac{OC_1}{OC_2} = \frac{OC'_1}{OC'_2}$.

E si può quindi concludere che

$$\frac{OA_1}{OA_2} : \frac{OB_1}{OB_2} : \frac{OC_1}{OC_2} = \frac{OA'_1}{OA'_2} : \frac{OB'_1}{OB'_2} : \frac{OC'_1}{OC'_2} \quad \text{c. v. d.}$$

Analiticamente il ragionamento che conduce a questa dimostrazione si rifa come segue.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Mineralogia della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1932.

(3) G. CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria analitica*, 5ª edizione, p. 326, § 218.

Un'affinità che lascia fissa l'origine degli assi, e quindi la più generale *deformazione omogenea* che un cristallo subisce per riscaldamento, è rappresentata da tre relazioni del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} X' = a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z \\ Y' = a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z \\ Z' = a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z; \end{cases}$$

dove le a_{ik} sono nove costanti elementi di un determinante di terzo ordine diverso da zero, e dove X', Y', Z' sono le coordinate cartesiane di un punto cui corrisponde un punto di coordinate X, Y, Z riferite ad uno *stesso* sistema assiale e ad una stessa unità di misura.

Se, come è lecito, invece che ad un *unico* sistema assiale riferiamo i punti del primo poliedro alle rette OX, OY, OZ e quelli del secondo alle rette OX', OY', OZ' che a quelle corrispondono, l'affinità è rappresentata da

$$(2) \quad \begin{cases} X' = p_1 X \\ Y' = p_2 Y \\ Z' = p_3 Z; \end{cases}$$

dove le p_r sono tre costanti non nulle. Indicati con $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, i parametri che i piani delle facce F_1 ed F_2 staccano rispettivamente su OX, OY, OZ , e con $a'_1, b'_1, c'_1, a'_2, b'_2, c'_2$ i parametri che i piani delle stesse due facce staccano, dopo lo riscaldamento, su OX', OY', OZ' , è $a'_1 = p_1 a_1$, etc.; $a'_2 = p_1 a_2$, etc.; cioè anche

$$\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} : \frac{c_1}{c_2} = \frac{a'_1}{a'_2} : \frac{b'_1}{b'_2} : \frac{c'_1}{c'_2} : \quad \text{c. v. d. (1).}$$

In conseguenza della simmetria dei cristalli cui il fenomeno della dilatazione termica si uniforma, considerando come assi OX, OY, OZ le tre direzioni corrispondenti alle « croci assiali » adottate in cristallografia, nei cristalli monoclini l'asse OY ed il piano OXZ restano fissi nello riscaldamento e pertanto le (1), (valevoli in ogni caso per i cristalli triclinali), diventano

$$(3) \quad \begin{cases} X' = a_{11} X + a_{12} Z \\ Y' = a_{21} Y \\ Z' = a_{31} X + a_{32} Z; \end{cases}$$

(1) In taluni libri per dimostrare la validità della proposizione di cui è questione si scrive che essendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ coefficienti della dilatazione nella direzione dei tre assi cristallografici, in conseguenza di una variazione t di temperatura subita dal cristallo i parametri $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ di due facce, diventano rispettivamente $a_1 (1 + \lambda_1 t) \dots a_2 (1 + \lambda_1 t) \dots$: da cui $\frac{a_1 (1 + \lambda_1 t)}{a_2 (1 + \lambda_1 t)} = \frac{a_1}{a_2}$. Ma tale ragionamento varrebbe se applicato alle misure assolute di $a_1 \dots a_2 \dots$ e se gli angoli tra gli assi non variassero.

ed i due sistemi cui riferire le (2) sono rispettivamente OX, OY, OZ ed OX', OY', OZ' : nel rombico restano fissi tutti e tre gli assi per cui le relazioni che legano le coordinate di un punto prima e dopo lo scaldamento sono date da relazioni del tipo delle (2), cui si riducono in tale caso anche le (1): nel tetra-, tri-⁽¹⁾, esagonale le relazioni (1) e (2) diventano $X' = aX, Y' = aY, Z' = bZ$: e nel monometrico $X' = aX, Y' = aY, Z' = aZ$.

In queste ultime considerazioni sono implicite le note proposizioni relative alla dilatazione termica dei poliedri cristallini e dei loro reticoli.

Biologia. — *Studii cirripedologici*. IX. *Anaerobiosi in « Chthamalus stellatus » Ranzani*⁽²⁾. Nota⁽³⁾ di B. MONTEROSSO, presentata dal Socio A. RUSSO.

Nel lungo studio che, adoperando soprattutto metodi sperimentali, ho consacrato al fenomeno di anabiosi, da me stesso trovato nei Cirripedi⁽⁴⁾, più di una ragione mi fece pensare alla probabilità, che siffatti organismi fossero dotati di potere anaerobico. Quando difatti constatai che erano capaci di sopravvivere per lungo tempo (cfr. le Note VI e VIII) a completa e ininterrotta immersione in olio di vaselina, mi risultò chiara la resistenza di essi all'asfissia, e mi parve logico supporre che la presenza di ossigeno nell'ambiente non fosse condizione indispensabile, almeno temporaneamente, al mantenimento delle funzioni vitali, nella specie studiata.

Diversi Autori, in varii organismi animali, introdotti in gas indifferenti (azoto ed idrogeno) hanno visto persistere i fenomeni vitali per un certo tempo. Rimandando alla Memoria in esteso la discussione dei dati forniti dalla bibliografia esistente sull'anaerobiosi degli animali, ricordo qui che Pflüger già nel 1875 mantenne per 25 ore delle rane in atmosfera priva di ossigeno; Bunge (1883-1890) poté far vivere, per alcuni giorni, individui di *Ascaris* (specie diverse) in soluzione salina, esclusa dal contatto di ossigeno molecolare, ma contenente tracce trascurabili di tale gas, nonchè esemplari di Discofori (2 a 6 giorni) e Artropodi acquatici (1 a 5 ore); E. Weinland (1900) adoperò ancora degli *Ascaris*, studiandone il metabo-

(1) Croce dell'esagonale.

(2) Lavoro fatto nell'Ist. di Zoologia ed Anat. comp. della R. Univ. di Cagliari.

(3) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1932.

(4) Su tale argomento, come su particolari, che saranno ricordati nel corso del presente lavoro, si tengano presenti le mie pubblicazioni qui di seguito elencate:

Nota I: in « Atti Acc. Gioenia », vol. XV, 1927. Nota II: in questi « Rendiconti », vol. VII, 1928. Nota III: in « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. III, 1928. Nota IV: in questi « Rendiconti », vol. VIII, 1928. Nota V: « ibid. », vol. IX, 1928. Nota VI: « ibid. », vol. IX, 1930. Nota VII: « ibid. », vol. XV, 1932. Nota VIII: « Atti Acc. Gioenia », vol. XIX, 1932.

lismo anaerobico. La facoltà di vivere temporaneamente senza ossigeno nell'ambiente fu confermata da A. Fischer (1924) e da W. K. Slater (1924-1927) in Nematodi, da Pütter (1907) in Discofori, da E. I. Lesser (1907-1923) in Lumbricidi e nella Rana; da Slater e Davis (1926-1928) in *Periplaneta orientalis*.

Qui non parliamo della questione di tessuti isolati, sopravviventi anaerobicamente, come muscoli, nervi ecc. su cui esistono lavori fisiologici, e la cui importanza è a tutti nota.

Ritenni opportuno dunque, per orientamento e per controllo, consigliare un'esperienza, che fu fatta in questo Laboratorio, adoperando l'idrogeno ⁽¹⁾. Il risultato fu positivo, ma la sua valutazione venne a bella posta differita, poichè gli studii, da me stesso fatti, sulla specie in parola, avevano rivelato, sull'esoscheletro, la presenza costante di una florula di Missoficee, il cui pigmento poteva avere influito sulla composizione dell'ambiente sperimentale, liberando l'ossigeno dall'anidride carbonica emessa dai *Chthamalus*. A riguardo di tali organismi vegetali mi limiterò a dire che costituiscono uno strato quasi ininterrotto, ricoprente le superficie della muraglia e dell'opercolo, come un lieve pannicolo. Dietro mia preghiera il dott. ACHILLE FORTI, al quale mi è grato rinnovare qui sentiti ringraziamenti, ha proceduto alla determinazione specifica, ed ha riconosciuto che trattasi di *Brachythrichia balani* (Lloyd) Born. et Flah., una Rivulariaceae tipicamente marina. Sul guscio di *C. s. depressus*, che ha costituito anche per queste ricerche il materiale, non esistono altri organismi nè vegetali nè animali.

Com'è noto, siffatti Schizofiti, oltre a clorofilla, posseggono carotina e ficocianina ⁽²⁾. Ho voluto eseguire la prova microchimica dei pigmenti, onde controllare la presenza della clorofilla. All'uopo, ho adoperato il *metodo* Mayer o dell'ipoclorina e la *reazione del Molish*. Ho avuto la netta conferma dell'esistenza di abbondante clorofilla, associata ad altri pigmenti.

Bisognava pertanto procurare, introducendo i soggetti di studio in gas inerte, che le alghe sospendessero i processi normali di fotosintesi. Mantenni allora, per qualche settimana, dei Cirripedi in perfetta oscurità; ma ottenni solo un lieve scolorimento del pigmento verde, come era da attendersi ⁽³⁾. Provai di eliminare meccanicamente le alghe, raschiando con accuratezza i gusci dei Ctamali da sottoporre a regime anaerobico ⁽⁴⁾. Ma tralasciai subito siffatto espediente non essendo adatto alla completa eliminazione della florula. Da sezioni microtomiche del guscio di *C. s. depressus*, difatti, potei assodare

(1) G. FLORIS, *Resistenza dei Ctamalini in gas inerte etc.* «Rend. Seminario Sc. R. Univ. Cagliari», anno II, fasc. 2°, 1932.

(2) WETTSTEIN, *Botanica sistem.* Trad. POLI, U. T. E. T., vol. I, pp. 86-87 (1926).

(3) Cfr. G. GOLA, *Clorofilla*, in «Suppl. Ann. Enc. Chimica» del GUARESCHI, 1913, p. 256.

(4) Tale espediente fu adoperato da E. KREPS («Plüger's Arch.», 222, pp. 217-220, 1929), in sue ricerche sul ricambio respiratorio di *Balanus*.

che tali Missoficee aderiscono alla superficie esterna dei pezzi scheletrici, la quale presenta frequenti rientranze e rugosità, occupate da cenobii dell'alga. Praticamente quindi riesce impossibile eliminare questi organismi vegetali o anche toglierne in quantità tale da impedire ogni sensibile effetto del loro ricambio gassoso. Apparve dunque possibile solo una via ⁽¹⁾: adoperare grandi quantità di gas puro inerte, rinnovandolo spessissimo; e mantenere al buio perfetto gli animali, almeno durante il trattamento.

Esperienza I. — Credetti opportuno iniziare le ricerche controllando la possibilità di sopravvivenza nell'olio di vaselina, al buio perfetto. I risultati di tale prova sono stati consacrati già nella precedente Nota (VIII), sicchè mi esimo dal ripeterli, limitandomi a ricordare che il comportamento non mostrò sensibile differenza rispetto a quello dei Ctamali mantenuti nello stesso liquido, ma alla luce. Da ciò si può arguire che la flora dell'esoscheletro non esercita azione rilevabile sulle condizioni biologiche dei Cirripedi studiati, in riguardo all'esistenza o no dei raggi luminosi e limitatamente all'ambiente e metodo sperimentale adoperato.

Esperienza II. — Entro una capace cassetta a pareti robuste fu posta una vaschetta piena di acqua marina, in cui venne capovolta una campana, che racchiudeva un blocco con *C. s. depressus*, sostenuto in modo da non bagnarsi mai. Nella campana penetravano due tubi, dopo esser passati a tenuta perfetta attraverso le pareti della cassetta. Mediante uno di questi si estrasse tutta l'aria della campana, cosicchè essa venne riempita di acqua, che man mano veniva richiamata dalla bacinella, su cui era capovolta. Attraverso lo stesso tubo, allora si fece pervenire idrogeno puro, che a sua volta spostò l'acqua dalla campana. Quando il livello dell'acqua della campana divenne uguale a quello della bacinella, si rese pervio il secondo tubo, cosicchè il gas (H_2) che continuava a penetrare per il primo tubo, cominciò a uscire per il secondo, la cui estremità esterna già pescava in un bagno di acqua. Nei primi giorni si curò di mantenere l'afflusso di idrogeno quasi costante dalla mattina alla sera. In tal modo i soggetti da esperimento si trovavano praticamente in una corrente di gas inerte. Ciò si volle per le seguenti ragioni: 1° per diluire e scacciare qualunque traccia di ossigeno, proveniente dall'acqua, che nella bacinella costituiva una valvola idraulica destinata a mantenere la pressione interna della campana uguale all'atmosfera e ad impedire l'accesso dell'aria nella camera sperimentale stessa; 2° per esercitare lo stesso effetto sulle tracce di ossigeno (aria) rimaste entro la cavità palmale dei Cirripedi e nell'acqua, che impregnava il pezzo

(1) Se è fuori dubbio che la clorofilla diventi attiva alla luce, resta incerta tuttavia la funzione biologica della carotina e della ficocianina. Da ricerche di GAIDUKOW, di DANGEARD e altri, pare che i pigmenti diversi dalla clorofilla assorbano e utilizzino determinate radiazioni luminose (cfr. GOLA, op. cit.).

di basalto, su cui questi erano fissati naturalmente; 3° onde trascinar fuori i prodotti del ricambio gassoso degli animali.

Non appena il dispositivo entrò in funzione, la cassetta fu chiusa perfettamente e avvolta in un doppio involucro di cartone nero. In questo, come in tutti gli altri simili esperimenti, i tubi di afflusso e di efflusso erano di gomma, spessi, molto lunghi e, fuori della cassetta, venivano ripetutamente ritorti a spirale, per intercettare qualunque barlume di luce.

Dopo i primi giorni, l'apporto di gas fu limitato a 4-6 ore quotidiane. Con tutte le cautele accennate e con altre, che per brevità di esposizione si tralasciano, ritengo di avere, per quanto possibile, evitato la presenza di ogni traccia di O_2 nella campana sperimentale. La prova fu iniziata il 21 marzo e all'apertura della cassetta (5 aprile) cioè dopo 15 giorni, si constatò che i Cirripedi erano vivi, quasi nelle stesse condizioni di quelli, che in analogo esperimento ⁽¹⁾ erano stati mantenuti alla luce.

Esperienza III. - Volli tuttavia fare una nuova prova, in cui, oltre ad adoperare un diverso gas inerte cercai di accrescere gli espedienti, intesi ad assicurare l'assenza di ogni traccia di ossigeno ⁽²⁾. Anzitutto tenni al buio, ma all'aria, in acqua marina spesso rinnovata, un blocco di 28 C. s. *depressus*, dal 10 al 23 aprile. Il dispositivo per l'esperimento fu il seguente: un pallone contenente NH_4Cl in soluzione, e in cui si faceva penetrare a goccia a goccia, mediante un tubo di sicurezza a rubinetto, una soluzione diluita di $NaNO_2$, riscaldando a moderato calore. Il gas passava lentamente in un sistema di purificazione e lavaggio, essenzialmente consistente in soluzioni di idrato e permanganato potassico, nonchè in una lunga canna di vetro, piena di trucioli di rame e contenuta in un tubo di terra refrattaria, che si riscaldava fortemente. L'azoto, così ottenuto, prima di arrivare nella campana sperimentale, veniva fatto gorgogliare lentamente attraverso una soluzione di pirogallolo e di KOH , perchè lasciasse qualche ultima eventuale traccia di ossigeno.

Il dispositivo, che doveva contenere i soggetti da esperimento, era formato da una vasca e da una campana come nella prova n. II. Nella campana però penetravano quattro tubi, a tenuta perfetta, dei quali due avevano la funzione spiegata nell'esperienza precedente (portare azoto e scaricarne continuamente l'eccesso). Con tutte le possibili precauzioni, la campana fu riempita d'acqua marina; questa venne scacciata poi dal gas. Il tubo di efflusso si fece pescare in soluzione di pirogallolo alcalino ⁽³⁾. Tolto allora

(1) FLORIS, op. cit.

(2) In consimili esperimenti ognuno sa quanto sia difficoltoso ottenere e mantenere un ambiente di gas puro, specialmente se un po' vasto, ed esente da ogni, per quanto minima, traccia di ossigeno molecolare.

(3) Si capisce, che questa era tenuta in bottiglia, al riparo dall'atmosfera esterna. Il gas refluo dalla campana vi gorgogliava e usciva da un altro tubo, pescante in olio di vaselina.

l'eccesso di acqua dalla vaschetta, si mise in funzione il terzo dei quattro tubi; dirò brevemente, senza accennare a tutte le precauzioni prese, che per mezzo di esso si mandò nell'interno della campana notevole quantità di olio di vaselina, mentre cautamente si eliminava l'acqua, finchè questa venne sostituita dall'olio, sia dentro, che fuori della campana. Indi il tubo si tappò accuratamente. Mediante il quarto tubo si riempì con pirogallato di sodio un vaso, che si era previamente introdotto nella campana sperimentale e di cui il detto tubo arrivava a toccare il fondo⁽¹⁾.

Il dispositivo per mantenere i Cirripedi al buio perfetto fu analogo a quello dell'esperienza precedente.

La prova, iniziata il 23 aprile, ad ore 12, fu interrotta alla stessa ora del 9 maggio, cioè dopo 16 giorni di permanenza in azoto puro. Il gas si era rinnovato a giorni alterni, lasciandolo affluire ogni volta per circa 4 ore. All'apertura della cassetta, i Cirripedi furono trovati vivi, non anabiotici, e capaci di movimenti spontanei; su 28 individui solo tre erano morti.

Esperienza IV. — Il dispositivo fu sostanzialmente identico al precedente. La variazione più importante consistette nella sostituzione dell'acqua con idrogeno, dentro la campana, e con mercurio, ulteriormente, entro la vaschetta. Il *Kipp*, con tutto il sistema di lavaggio e purificazione, si fece funzionare in modo lentissimo ma ininterrottamente per 15 giorni (28 maggio-12 giugno). I soggetti sottoposti all'esperimento erano 18; all'apertura della camera sperimentale ne furono trovati vivi, non anabiotici e capaci ancora di deboli movimenti spontanei, 14.

Le tre ultime esperienze (II-IV), poichè l'ambiente costantemente fu costituito da gas inerte, che possiamo praticamente considerare del tutto puro ed esente da tracce di ossigeno; poichè la funzione clorofilliana delle alghe rivestenti il guscio, se pure ancor possibile in gas inerti, fu impedita da continua e assoluta oscurità; mi autorizzano ad affermare che gli individui di *C. s. depressus* godano proprietà anossibiotica spiccatissima.

Sul valore biologico di tale interessante carattere, come sul ricambio respiratorio, durante la privazione di ossigeno, riferirò altrove.

(1) Il vaso in parola aveva bocca larghissima e rimaneva aperto. Prima di introdurvi il pirogallato, era evidentemente pieno di acqua marina; ma questa fu aspirata mediante lo stesso tubo, con il quale si fece ulteriormente arrivare la soluzione di acido pirogallico e l'idrato potassico. In tutte le operazioni fu rigorosamente impedito il minimo accesso di aria dall'esterno, mantenendo il tubo sempre pieno di liquido.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Potenze di ricupero e di accrescimento di occhi ciclopi di embrioni « a litio » di Rana esculenta* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GABRIELLA PASTEGA, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Da molti anni è noto, soprattutto per gli studi di Stockard (1906-14), Leplat (1913-20) e Cotronei (dal 1915 in poi), che, sottoponendo uova di Anfibi ed altri Vertebrati (Releostei), in fase gastrulare, all'azione di determinati sali, (specialmente di magnesio e di litio) si turba facilmente lo sviluppo embrionale di questi animali. Le larve così ottenute hanno avuto il nome di « larve a litio » termine usato da Herbst per gli Echinodermi.

Cotronei osserva che le malformazioni compatibili con lo sviluppo embrionale causate dai sali di litio sono cefaliche e hanno come limite l'estremità anteriore della corda dorsale; ciò che lo induce ad ammettere che nella morfogenesi vi sono due forze direttive (corda dorsale e parte precordale del neurasse) che presiedono al normale sviluppo degli organi da esse sostenuti.

Una delle malformazioni più caratteristiche delle « larve a litio » ⁽³⁾ è la ciclopia che, essendo però sempre accompagnata da imperforazioni boccali, non può essere seguita nel suo ulteriore destino, venendo l'embrione a morire al termine dell'assorbimento del vitello.

Cotronei cercò già molti anni or sono, con esperienze d'innesti e di altro genere, di far seguire queste larve nel loro sviluppo, senza riuscire però con « larve a litio » affette da ciclopia.

Per suo consiglio ho ripreso l'argomento proponendomi di studiare col metodo di trapianti se sono rimaste in potenza le intrinseche attività di sviluppo e di accrescimento dell'occhio (e per esso degli altri organi cefalici) inibite in uno stadio molto precoce da una azione paralizzante e poi dalla costrizione che si viene a perpetuare, anche in stadi successivi, inibendo lo svolgersi di ogni eventuale azione di ricupero da parte dell'abbozzo ciclope.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1932.

(3) La parola « larva » nello studio degli Anfibi può suscitare confusioni. Per il Cotronei è importante distinguere lo sviluppo embrionale collegato all'assunzione del vitello da quello larvale che si inizia quando l'animale comincia a mangiare. I chimismi dei due periodi sono profondamente differenti.

Le esperienze sono state condotte nella stagione aprile-luglio 1930 e marzo-luglio 1931. Le uova di *Rana esculenta*, trattate in fase di gastrulazione con una soluzione di cloruro di litio $m/10$ per un tempo variabile tra 20 e 24 ore in relazione alla temperatura, venivano operate allo stadio di bottone codale. L'abbozzo ciclope era trapiantato nella regione ventrale di un ospite normale allo stesso stadio. I donatori erano conservati per il controllo istologico. Mi limito in questa Nota, che sarà presto seguita dal lavoro in esteso col la documentazione delle microfotografie, a una breve esposizione dei risultati.

Gli abbozzi ciclopi trapiantati hanno subito un accrescimento più o meno grande: accrescimento che è stato valutato caso per caso sia rispetto alla grandezza di un occhio ciclope *in situ*, cioè al massimo sviluppo cui può giungere in un embrione « a litio » naturale, sia rispetto alla grandezza dell'occhio normale dell'ospite; grandezza che dipende dallo stato di nutrizione dell'ospite stesso.

Si è trovata infatti, una stretta relazione tra l'accrescimento dell'ospite e quello del trapiantato.

Tenendo poi presente che, sottoponendo le uova di Anfibi anuri all'azione di determinati sali, si ottengono nell'ulteriore sviluppo tutti gli stadi di passaggio tra occhi fusi in vari gradi fino all'anoftalmia (Leplat, Cotronei, ecc.), alcuni casi da me ottenuti, in cui si riscontrano occhi piccoli, pieni, senza cristallino nè nervo e tutti contornati da *tapetum*, si possono riferire ad un grado notevolissimo di inibizione del territorio oculare in rapporto ad una riduzione fortissima della parte più anteriore dell'encefalo (Cotronei). In questi casi però si nota pur sempre un accrescimento, tenendo presenti le dimensioni massime e minime degli occhi ciclopi *in situ* e tenendo presente che qui si tratta di massima inibizione.

Ne deriva che l'accrescimento di occhi ciclopi trapiantati è ancora condizionato alla massa del territorio oculare, cioè al grado di inibizione da esso sofferto. E infatti in tutti gli altri casi noi possiamo osservare il ripetersi di queste modalità.

Nei casi nei quali la grandezza dell'abbozzo ciclope (e quindi derivato dalla fusione di due occhi) trapiantato ha quasi raggiunto quella dell'occhio del rispettivo ospite, si può vedere che l'inibizione di esso, pur non raggiungendo quella dei casi prima descritti, è stata notevole, sì che l'occhio sviluppatosi mostra appena qualche segno di dualità (per esempio due cristallini) e una notevole regolazione della propria forma verso quella di un occhio normale.

Nei casi invece ove l'occhio trapiantato è cresciuto più dell'occhio normale dell'ospite ed in modo notevolissimo rispetto ai controlli « a litio » al massimo del loro sviluppo, si nota un grado minore di fusione dei due originari abbozzi oculari (della presenza di due aperture pupillari fino alle fusioni di calici, pur ben distinti ed evidenti).

In conclusione la presente Nota sta a dimostrare le notevoli potenze di ricupero che l'abbozzo ciclope di embrioni a litio di *Rana esculenta* estrinseca nelle nuove condizioni sperimentali da me realizzate col trapianto di esso in embrioni normali. Infatti l'occhio ciclope trapiantato si accresce di molto.

La grandezza cui sono giunti gli occhi ciclopi trapiantati dimostra ancora che essa è in funzione della originaria massa del territorio oculare (che a sua volta è in relazione al grado di inibizione sofferto dagli abbozzi) e dell'accrescimento degli ospiti, accrescimento che, a sua volta, dipende dallo stato di nutrizione di essi.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1932 (Anno X).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Fisica. — *Ancora su di una nuova esperienza fotoelettrica.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA.

In una Nota precedente ho riferito sul modo di comportarsi di pellicole semitrasparenti di argento depositate su lastre di vetro, sotto l'azione di un intenso fascio di raggi pulsante, servendomi del dispositivo ivi descritto. Analoghe esperienze ho ripetuto adoperando pellicole di altri metalli, come ora dirò.

Platino. — Vetri platinati a fuoco, del commercio, notevolmente trasparenti, tagliati nella solita misura di cm. 1×5 , presentano resistenza elettrica maggiore dei vetri argentati. Con una tensione di 8 volt, la corrente che circola in essi è di 0.2 ampère. Sperimentando con la lampada a mercurio, si rileva che, a differenza dell'argento, l'effetto non si affievolisce notevolmente, per l'interposizione (lungo il percorso dei raggi concentrati mediante lenti di quarzo) di lastre di vetro comune. L'effetto perciò, non è strettamente peculiare dei raggi con $\lambda < 3000 \text{ \AA}$. Adoperando la lampada ad incandescenza, l'effetto, inteso come intensità del suono al telefono, si accresce marcatamente; più di quanto cioè non avvenga con l'argento. Ancora più intenso è il suono, quando si ricopra lo strato di platino di nerofumo. Anzi,

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1932.

così operando, si può sentire un debolissimo suono al telefono, inserendo questo direttamente nel circuito del metallo.

In sostanza, il comportamento del platino, giudicato dal risultato di tali esperienze, sarebbe più facilmente riportabile ad un semplice effetto termico della luce, salvo quanto sarà detto in seguito.

Nelle stesse esperienze, ho potuto accertarmi che lo spostamento di fase φ , di cui ho detto nella Nota precedente, è dello stesso ordine di grandezza di quello trovato per l'argento. A proposito di tale determinazione, appariva interessante, per le ragioni che saranno dette in seguito, di osservare se il valore di φ fosse indipendente dalla natura della sorgente. Esperienze eseguite sia con la lampada a mercurio, che con quella a incandescenza, sia ancora facendo assorbire, mediante bacinelle piene di acqua (anche con pareti di quarzo), le radiazioni più calde od u. r., non hanno dato sensibile variazione nella determinazione di φ . Probabilmente, si deve attribuire tale risultato negativo, alla piccola precisione del congegno da me realizzato finora. D'altro canto, di proposito ho eseguito tale ricerca col platino, che dà un effetto assai più cospicuo nel campo delle radiazioni visibili ed u. r.

Oro. — Ho preparato lastre con tale metallo, incollando foglioline semitrasparenti in verde del commercio, sui soliti vetri. La loro resistenza è tale, che sotto 4 volt si ha una corrente di 0.5 ampère. Lo spessore di tali roglioline, dedotto dal loro peso, è di μ 0.12. Il comportamento dell'Au è in certo modo analogo a quello del Pt; quantunque l'effetto in genere, si appalesi alquanto più debole. Non si ha perciò spiccata selettività per l'u. v.

Stagno. — Lamine di circa μ 1.4 (che sono naturalmente del tutto opache alla luce), incollate su vetro, hanno dato risultati paragonabili a quelli ottenuti con Pt e Au, quantunque più deboli. Questa esperienza, oltre a dimostrare l'attività dello stagno per l'effetto, è notevole perchè fa vedere come tale effetto non sia proprio legato alla condizione di semitrasparenza dello strato metallico. Ciò è confermato dal fatto che anche lamine sottili di *stagnola* (spessore μ 8) danno ancora un sensibile suono al telefono. Questi fatti mi hanno indotto a ripetere le esperienze con l'Ag adoperando anzichè pellicole ottenute per via chimica, lamine sottili del commercio con spessori dell'ordine del micron. L'effetto è stato così, ancora constatato, con caratteristiche simili a quelle già riportate nella Nota precedente, ma in misura assai più debole.

Alluminio. — Le esperienze sono state eseguite con lamine di 1.7 e 2.8 micron, incollate su vetro; esse, sotto una tensione di 4 volt, si lasciano attraversare da correnti di 1 ampère o poco più. Servendosi della lampada a mercurio, nelle condizioni già specificate, non si sente alcun suono al telefono. L'alluminio sembra dunque inattivo; per quanto il suo spessore sia piuttosto ridotto (μ 1.7) di fronte, p. es., allo stagno, che dà l'effetto ancora con spessori di μ 8. Sostituendo alla lampada a mercurio quella ad incan-

descenza, si constata un effetto, per altro piuttosto debole. Lo spostamento di fase φ sembra maggiore di 45° . Ricoprendo la pellicola di Al con nerofumo, il suono al telefono è udibile alquanto con la lampada a mercurio e nettamente con quella a incandescenza. In tali condizioni, eseguendo la solita compensazione, si trovano per φ dei valori che appariscono forse senz'altro maggiori del solito, cioè prossimi a 90° . Ma tale asserzione, per quanto fu detto, merita anch'essa conferma, da ricercarsi con dispositivi più perfezionati.

Zinco. — Esperienze con lo Zn presentavano un certo interesse, per le particolari attività fotoelettriche di questo metallo. Di esso, sono state preparate lamine non più sottili di qualche decina di μ , masticiate sul vetro; ma esse non hanno dato effetto sensibile. Occorrerà ripetere tali esperienze con lamine più sottili, prima di decidere sul vero comportamento di tale metallo.

*
* *

Riassumendo i risultati sperimentali riportati nella Nota precedente e in questa, si può dire che l'effetto in parola si constata per tutti i metalli predetti, ma con modalità notevolmente differenti. L'Ag presenta la caratteristica sensibilità per le radiazioni u. v.; l'Al e forse anche lo Zn non sono sensibili a tali radiazioni; tutti i metalli presentano poi, sensibilità più o meno marcata per le altre radiazioni. L'uso del nerofumo, deve, con tutta probabilità, modificare la natura dell'effetto osservato, riportandolo senz'altro ad un fenomeno indiretto, data la opacità (per altro non completa) di tale sostanza; quantunque non rimane per ora comprensibile il fatto che l'argento così annerito, sia sempre più sensibile alle radiazioni u. v. di piccola λ , dell'arco a mercurio.

Ci si può domandare ora, se non sia possibile riportare l'effetto osservato, con le sue molteplici caratteristiche, ad una semplice variazione di resistenza, sotto l'azione termica delle radiazioni. Certamente è da ammettere, che tale *ipotesi termica* sia, almeno in parte, attendibile; ma si può anche pensare che un effetto da essa risultante possa sommarsi con una azione della luce, sinora sconosciuta; sulla conducibilità dei metalli (*ipotesi elettro-ottica*). Secondo tali vedute, ciò che si osserva risulterebbe dalla somma di due effetti che potrebbero avere *senso, fase, intensità* anche differenti; essi, solo con accurate ricerche sperimentali, potrebbero venire discriminati. Vediamo ora quale attendibilità possa avere l'*ipotesi elettro-ottica*. Per quanto essa non pare possa discendere dalle moderne ipotesi della fisica teorica, sarebbe da ammettere che un effetto da essa dipendente debba manifestarsi con estrema prontezza (dell'ordine di 10^{-8} secondi). Per cui, tanto che la luce dia luogo ad un aumento che ad una diminuzione della resistenza del metallo, non si dovrebbe constatare alcuno spostamento di fase φ . Ma tale conclusione non porta per ora alcun elemento decisivo contro l'ipo-

tesi elettro-ottica, inquantochè, i valori di φ osservati sinora, sia pure in modo grossolano, potrebbero risultare dalla somma degli effetti corrispondenti alle due ipotesi. Secondo quella termica infatti, come è noto e come ricorderò meglio in appresso, è da ammettersi che si abbia sempre un ritardo di fase di valore piuttosto cospicuo. D'altro canto, l'opportunità di ricorrere, sia pure con ogni prudenza, alla ammissibilità dell'ipotesi elettro-ottica, può essere suggerita da due fatti osservati: la sensibilità selettiva dell'Ag per l'u. v., e la insensibilità dell'Al per le stesse radiazioni. Se si volesse spiegare l'effetto della luce u. v. con $\lambda < 3000 \text{ \AA}$, sull'Ag (comparato con quello delle altre radiazioni contenute nell'arco a mercurio, che, come si è visto, è nullo o trascurabile) mediante l'ipotesi termica, bisognerebbe ammettere che l'energia assorbita dall'Ag per le grandi λ , sia trascurabile. Ora, è pur vero che l'Ag assorbe soltanto dal 7 al 14 % circa dalle varie λ visibili, e dal 10 al 65 % di quelle $< 3000 \text{ \AA}$, mentre ha una zona di trasparenza nelle λ intermedie; ma non è facile dire come si distribuisca l'energia per tutte le varie λ , nel caso delle esperienze descritte. È d'altra parte di difficile comprensione come, accrescendo il potere assorbente per le λ visibili, col ricoprire l'Ag di nerofumo, perduri la sensibilità selettiva per l'u. v.

Il secondo fatto accennato, la insensibilità cioè dell'Al, corrobora inoltre la attendibilità dell'ipotesi elettro-ottica. Per quanto tale metallo abbia probabilmente un potere assorbente, per le piccole λ , minore dell'Ag, non appare sinora giustificato il suo eccezionale comportamento nei riguardi dell'effetto in parola.

Tenendo dunque conto dei vari dubbi più sopra espressi, non si vede sinora il modo di interpretare con tutta sicurezza quanto è stato osservato; per cui, battendo altra via, vogliamo cercare di renderci conto quantitativo di un eventuale effetto dipendente dalla ammissione della pura ipotesi termica. Il descritto dispositivo fa cadere sulla pellicola metallica una certa quantità di energia raggiante, variabile col tempo. La legge di variazione può ammettersi sinusoidale e pulsante tra zero e $2q$, intendendo con ciò riferirsi ad energia che cade sull'unità di superficie e nell'unità di tempo. Nella valutazione di tale grandezza, per quanto difficile dal punto di vista sperimentale, si tien conto soltanto dell'energia raggiante realmente assorbita dal metallo, prescindendo cioè tanto da quella riflessa o diffusa, che da quella passata per trasparenza. L'ipotesi sinusoidale è lecita, potendosi opportunamente foggare sia la forma della sorgente luminosa, che quella dei fori del disco girante; si può con ciò anche riuscire a far sì che solo in determinati istanti (inizio di ciascun periodo) la illuminazione della pellicola sia esattamente nulla. Sodisfatte tali condizioni, possiamo scrivere che in ogni istante vige la relazione:

$$(I) \quad dq = q(1 + \cos \omega t) dt,$$

in cui ω è la pulsazione dipendente dalla frequenza n di interruzione del

fascio luminoso. Tale quantità di energia, variabile con legge armonica, dà luogo ad un treno di onde calorifiche, che si propagano attraverso la massa della pellicola metallica e del vetro di sostegno di essa. Dicendo k la conducibilità interna del vetro, ρ la sua densità, c il suo calore specifico, è noto come la lunghezza d'onda l sia espressa dalla relazione:

$$l = 2 \sqrt{\frac{\pi k}{n \rho c}};$$

e nel nostro caso, ammettendo $k = 0.002$ u. C. G. S., $\rho = 2.5$, $c = 0.2$, $n = 500$, si ha $l = 100 \mu$. Inoltre, si sa come tali onde sieno molto fortemente smorzate; tanto che già dopo una o due lunghezze d'onda, a partire dalla superficie del vetro ricoperta dallo strato metallico, la loro ampiezza è praticamente nulla. A considerare in modo così semplice il fenomeno, ci autorizza anche il fatto che lo spessore della pellicola metallica (0.1μ circa per l'Ag) è trascurabile di fronte a l e a quello del vetro (mm. 1.5). Per cui, nella massa di questo, normalmente alla sua superficie, si deve verificare il passaggio di un flusso calorifico, che è pulsante solo sino ad una piccola profondità, e che poi diventa praticamente costante. Perchè tale calore esca fuori dalla faccia vitrea opposta, occorre che questa assuma una temperatura T_0 , superiore a quella dell'aria ambiente. Tale uscita di calore dipende dai coefficienti di conducibilità esterna del vetro e di conducibilità dell'aria, entrambi di incerta determinazione, come, di conseguenza, è incerta la valutazione di T_0 . Ma nel caso delle descritte esperienze, è facile comprendere che T_0 è certamente ben superiore alla differenza termica media tra la faccia vitrea e la metallica; per cui quest'ultima, durante l'arrivo della luce pulsante è in media ad una temperatura poco diversa da T_0 . Le due facce perciò, danno luogo verso l'esterno, a due flussi termici all'incirca eguali (in media). Si conclude che il flusso q si debba dividere in due parti all'incirca eguali, e che quello che entra nel vetro è meglio espresso dalla relazione:

$$(2) \quad dq = \frac{1}{2} q (1 + \cos \omega t) dt,$$

dove q rappresenta sempre la quantità di energia raggiante media assorbita nell'unità di tempo dall'unità di superficie metallica. Stabilita tale relazione, si tratta di determinare come vari la temperatura della faccia metallica. Il problema si risolve applicando le note leggi della propagazione del calore, e debbo alla cortesia del prof. D. Graffi, la esecuzione di tali calcoli. Dicendo T quella temperatura, essa è espressa con ottima approssimazione da:

$$(3) \quad T = T_0 + \frac{q d}{2k} + \frac{q}{2\sqrt{\omega c \rho k}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Per la discussione nostra, ha importanza il terzo termine, che esprime la parte variabile col tempo, di T . Si vede che essa rappresenta un incremento termico periodico, che è in ritardo di fase $\varphi = \frac{\pi}{4}$, sul flusso calorifico entrante nella lamina metallica. Ora, nelle mie esperienze, mi è parso di trovare talvolta valori di φ alquanto minori. Sotto tale riguardo, sarà interessante ripeterle con dispositivi più perfezionati, prima di fare altre deduzioni.

La (3) potrebbe permettere inoltre, di procedere alla valutazione dell'ampiezza della parte pulsante di T . Si tratta anzitutto di valutare q . Nel caso dell'argento, si è visto che sono principalmente attive le $\lambda < 3000 \text{ \AA}$. Ora, dal dispositivo sperimentale e dai dati incerti che ho potuto raccogliere sull'argomento, sembrerebbe che per tali λ , nel caso dell'arco a mercurio, debba ritenersi $q \approx 0.05 \text{ watt}$, cioè circa $0.01 \text{ p. c. per cmq. e a } 1''$. Sostituendo nella (3) tale valore, insieme con gli altri prima indicati, e tenendo conto che $d = \text{cm. } 0.15$, si ha:

$$T = T_0 + 0^{\circ}.75 + 0^{\circ}.001 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Per le ragioni già dette, non si è tentata la valutazione di T_0 , il che del resto non ha interesse. Tale relazione ci dice che la temperatura della pellicola di argento, sotto l'azione delle radiazioni u. v. emesse dell'arco pulserebbe di $\frac{1}{1000}$ circa di grado in più o in meno, rispetto al suo valore medio. A ciò corrisponde, ammettendo il comune valore per il coefficiente termico della resistenza, una pulsazione di questa, circa dieci volte più piccola di quella osservata nelle descritte esperienze. Ciò confermerebbe dunque l'attendibilità dell'ipotesi elettro-ottica; e a tale conclusione si può arrivare anche, ricordando che per l'alluminio, che ha coefficiente termico di resistenza alquanto maggiore di quello dell'argento, non si è constatato effetto alcuno, con la lampada a mercurio. Tale fatto starebbe a indicare che quell'ipotesi porterebbe ad ammettere un effetto che è peculiare dell'Ag, e non è presentato dall'Al. Se ora si estendono le precedenti considerazioni quantitative alle esperienze eseguite con la lampada ad incandescenza, od anche in generale a tutti gli altri metalli all'infuori dell'Ag e dell'Al, è meno attendibile la formulazione dell'ipotesi elettro-ottica; giacchè o il flusso calorifico dovuto a λ più lunghe è notevolmente maggiore di quello più sopra ammesso, od anche quei metalli presentano poteri assorbenti per tali λ , più notevoli.

Peraltro, un'altra riserva va fatta a favore dell'ipotesi elettro-ottica. Occorrerà infatti tener conto dei valori effettivi dei coefficienti termici di resistenza delle pellicole metalliche. Tali coefficienti, per le ricerche di diversi autori, possono infatti presentare marcate differenze con quelli di campioni di metalli con sezione notevole: in alcuni casi, essi possono essere

addirittura nulli od anche negativi. Nel caso poi di pellicole aderenti a lastre di vetro, grosse di fronte alla lunghezza d'onda termica, tali pellicole non sono libere di dilatarsi sotto i singoli impulsi termici; e questo fatto può anche influire sul valore dei coefficienti termici di resistenza.

Termino questa Nota, accennando ad una esperienza complementare. Se l'ipotesi termica bastasse a spiegare i fatti osservati, si dovrebbe constatare secondo la (3), una variazione nella intensità dell'effetto al variare della conducibilità termica del sostegno della pellicola metallica. Un dispositivo che in certo modo realizza tale concetto è il seguente. La lamina di Ag è immersa in acqua contenuta in un tubo di quarzo fuso trasparente; l'acqua può scorrere o star ferma. La luce u. v. come è noto, traversa tanto il quarzo che l'acqua. Ripetendo con tale pellicola l'esperienza, essa riesce ancora, e l'intensità del suono al telefono rimane immutata sia con acqua ferma che con acqua in moto. Evidentemente il caso dell'acqua in moto deve corrispondere a quello dell'aumentata conducibilità termica.

Concludendo, dirò che mi è parso opportuno rendere di pubblica ragione sin d'ora i numerosi fatti descritti, per quanto essi dovranno formare oggetto di ulteriore studio sperimentale e teorico. In base a tale studio si potrà giudicare a suo tempo della definitiva attendibilità o meno delle formulate ipotesi.

Fisica. — *Sulle bande di oscillazione e rotazione dell'ammoniaca.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. E. FERMI.

La molecola di ammoniaca, NH_3 , ha, come è noto, una configurazione a piramide triangolare regolare, di cui il vertice principale è occupato dall'atomo di azoto, mentre i tre vertici del triangolo base sono occupati dai tre atomi di idrogeno. Conformemente a questa struttura l'ammoniaca ha quattro frequenze fondamentali, di cui due sono doppiamente degeneri, mentre le altre due sono semplici. Queste due ultime corrispondono a forme di vibrazione in cui la molecola conserva sempre la simmetria di piramide regolare; mentre si hanno variazioni dell'altezza e del lato di base della piramide. Le due frequenze semplici hanno approssimativamente i valori di 950 e 3330 cm^{-1} ; e la prima di queste, di cui particolarmente ci interesseremo in questo lavoro, corrisponde a un movimento per cui, con approssimazione sufficiente, può ritenersi che vari solo l'altezza della piramide, mentre le dimensioni del triangolo di base restano invariate. Come coordinata per descrivere questa oscillazione potremo dunque prendere la distanza x dell'atomo di azoto dal triangolo dei tre idrogeni; ora è evidente che l'atomo di azoto ha due posizioni di equilibrio rispetto al triangolo degli idrogeni,

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1932.

situate simmetricamente rispetto al piano di questo; in conseguenza l'energia potenziale, $U(x)$ considerata come funzione di x , sarà una funzione pari di x con due minimi corrispondenti alle due posizioni di equilibrio, per $x = \pm x_0$ (fig. 1). Ciò ha per conseguenza ⁽¹⁾ che i livelli di oscillazione della molecola vengono ad essere doppi; lo sdoppiamento è dovuto alla possibilità che ha l'atomo di azoto di attraversare il piano occupato dagli idrogeni passando dall'intorno di una delle due posizioni di equilibrio all'intorno dell'altra. Per questo l'atomo deve oltrepassare una barriera di potenziale il

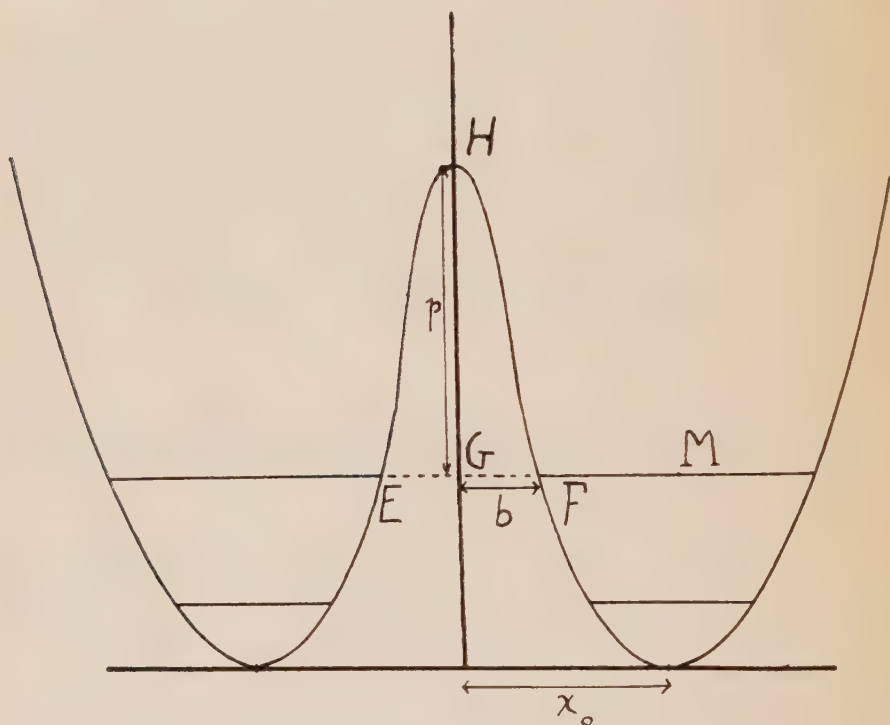


Fig. 1.

cui culmine si trova in corrispondenza di $x = 0$; la separazione di due livelli è poi data, come è noto, dalla frequenza con cui avviene il passaggio dell'atomo attraverso alla barriera di potenziale. Essa andrà perciò aumentando nei successivi livelli di oscillazione, poichè la loro energia andrà sempre più approssimandosi alla sommità della barriera di potenziale.

In conseguenza di questa struttura dei livelli di oscillazione, tutte le righe di oscillazione e di rotazione vengono ad essere doppie; come si osserva effettivamente p. es. nella banda situata a circa 950 cm^{-1} , in cui le righe di rotazione presentano uno sdoppiamento di circa 30 cm^{-1} .

(1) D. M. DENNISON e J. D. HARDY, «Phys. Rev.», 39, p. 938 (1932).

Lo scopo di questo lavoro è di studiare quale effetto sia esercitato dalla rotazione della molecola sopra lo sdoppiamento; sperimentalmente si osserva infatti che esso non è costante nei diversi termini di rotazione, ma va decrescendo col crescere del numero quantico di rotazione riducendosi dal valore iniziale di circa 33 cm^{-1} fino al valore di circa 23 cm^{-1} corrispondente all'undicesimo livello di rotazione (1).

L'effetto della rotazione sopra lo sdoppiamento può qualitativamente interpretarsi osservando che, quando la molecola ruota, la forza centrifuga tende ad allontanare l'atomo di azoto del triangolo dei tre idrogeni; per modo che essa viene ad ostacolare il passaggio dell'atomo di azoto attraverso al triangolo dei tre idrogeni, agendo come una elevazione supplementare della barriera di potenziale che separa le due posizioni di equilibrio simmetriche. Ne risulta un abbassamento della probabilità di scambio tra le due posizioni di equilibrio, e quindi una diminuzione dello sdoppiamento, tanto maggiore quanto più rapida è la rotazione.

Questo modello schematico del fenomeno è dunque qualitativamente in accordo con quanto si osserva sperimentalmente. Ci proponiamo ora di far vedere che anche l'ordine di grandezza previsto dalla teoria per l'entità dell'effetto corrisponde bene a quanto si osserva.

Per determinare completamente la forma e le dimensioni della piramide triangolare che rappresenta la molecola di ammoniaca, occorrerebbe conoscerne i momenti principali di inerzia. Questi, per simmetria, si riducono a due soli: A e B, dove con B si è indicato il momento relativo all'asse di figura e con A il momento relativo a una retta passante per il centro di gravità e perpendicolare all'asse di simmetria. Di questi due momenti uno solo è noto dallo spettro di bande: da esso risulta $A = 2.80 \cdot 10^{-40}$. L'altro momento B può soltanto valutarsi con considerazioni indirette e, secondo Dennison, si deve prendere all'incirca $B = 4.76 \cdot 10^{-40}$. Nei calcoli seguenti, nei quali del resto ci interessano soltanto gli ordini di grandezza, ci appoggeremo sopra questi dati. Da essi risulta il lato del triangolo base della piramide

$$a = 1.69 \cdot 10^{-8}$$

e l'altezza della piramide

$$x_0 = 0.32 \cdot 10^{-8}.$$

Se supponiamo che la molecola si deformi, conservando la base invariata mentre varia l'altezza x , il momento di inerzia B non varierà; mentre il momento A sarà una funzione di x . Con considerazioni elementarissime si trova

$$(1) \quad A = 2.38 \cdot 10^{-40} + 4.10 \cdot 10^{-24} x^2 = A_0 + m x^2$$

(1) E. F. BARKER, «Phys. Rev.», 33, p. 684 (1929); i risultati sperimentali di Barker sono stati riordinati da P. M. BADGER, «Phys. Rev.», 35, p. 1038 (1930).

dove $m = 4.10 \cdot 10^{-24}$ è la massa ridotta dall'azoto rispetto al triangolo dei tre idrogeni.

Siccome la molecola ha ellisse d'inerzia di rotazione, la sua energia di rotazione sarà data, come è noto, da

$$(2) \quad W_R = \frac{h^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{J(J+1)}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \Omega^2 \right\}$$

dove J ed $\Omega \leq J$ sono numeri interi che rappresentano il momento totale della molecola e il momento di rotazione rispetto all'asse di figura, misurati in unità $h/2\pi$.

Per valori fissati di J e Ω , l'energia di rotazione viene dunque ad essere, secondo (1) e (2), una funzione della x . Ora si trova facilmente che, in prima approssimazione, la forza che si esercita tra il piano dei tre idrogeni e l'atomo di azoto, mentre la molecola è in rotazione, può considerarsi derivata da una energia potenziale:

$$(3) \quad V(x) = U(x) + W_R(x) + \text{costante}$$

ottenuta aggiungendo all'energia potenziale $U(x)$ che si ha nella molecola ferma, l'energia (2) della rotazione; ciò equivale sostanzialmente a tener conto della forza centrifuga. Come massa vibrante dovremo poi prendere la massa ridotta m tra la massa dell'azoto e quella dei tre idrogeni.

Consideriamo dapprima l'oscillazione della molecola quando essa non ruota. Se come valor medio della frequenza di oscillazione prendiamo 950 cm^{-1} , il primo livello eccitato di oscillazione avrà una energia di $\frac{3}{2} 950 = 1425 \text{ cm}^{-1}$, pari a $2.8 \cdot 10^{-13}$ erg, superiore all'energia che avrebbe la molecola se i suoi nuclei fossero fermi nella posizione di equilibrio. D'altra parte l'energia potenziale della forza di richiamo, per oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio x_0 , può mettersi nella forma

$$(4) \quad U = 2\pi^2 m \nu^2 (x - x_0)^2 = 65700 (x - x_0)^2.$$

Segue dunque che l'ampiezza M della vibrazione che si avrebbe secondo la teoria classica per il primo livello di oscillazione è

$$\sqrt{\frac{2.8 \cdot 10^{-13}}{65700}} = 0.206 \cdot 10^{-8}.$$

Secondo la teoria classica si potrebbero avere due vibrazioni perfettamente equivalenti attorno alle due posizioni di equilibrio simmetriche rispetto al piano dei tre idrogeni; secondo la meccanica ondulatoria esiste invece una probabilità finita per il passaggio tra queste due forme di oscillazione attraversando la barriera di potenziate EHF che le separa. La semi-

larghezza $GF = b$ della barriera di potenziale è data evidentemente dalla semi distanza x_0 delle due posizioni di equilibrio, diminuita della ampiezza dell'oscillazione classica. Essa è cioè nel caso nostro

$$(5) \quad b = 0.32 \cdot 10^{-8} - 0.206 \cdot 10^{-8} = 0.114 \cdot 10^{-8}.$$

Per valutare anche l'altezza $p = GH$ della barriera di potenziale, possiamo utilizzare il dato che la separazione dovuta alla possibilità dell'azoto di attraversare la barriera di potenziale, quando $J = 0$, è di circa 33 cm^{-1} ; ciò vuol dire che i passaggi dell'azoto da uno all'altro degli intorni delle due posizioni di equilibrio simmetriche avvengono con una frequenza di 33 cm^{-1} . Naturalmente, per un calcolo teorico di questa frequenza, sarebbe necessario conoscere esattamente la forma della barriera di potenziale; per una semplice valutazione dell'ordine di grandezza, quale è quella che qui ci interessa, ci basterà invece supporre arbitrariamente che la barriera di potenziale abbia forma di parabola dato che essa certamente non si discosterà di molto da tale configurazione. Prenderemo dunque come forma della barriera la seguente:

$$(6) \quad g(x) = p - \frac{p}{b^2} x^2, \quad |x| \leq b.$$

Per il nostro calcolo grossolano, possiamo calcolare la frequenza $\delta\nu$ con cui avvengono i passaggi attraverso alla barriera di potenziale con la formula

$$(7) \quad \delta\nu = \nu e^{-\sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int_{-b}^b \sqrt{g(x)} dx} \quad (h = \text{costante di Planck});$$

nè d'altra parte avrebbe molto scopo fare il calcolo con maggiore esattezza data l'incertezza sopra la forma effettiva della barriera di potenziale. Tenendo presente la (6) ed effettuando l'integrale si trova

$$(8) \quad \frac{\delta\nu}{\nu} = e^{-\frac{\pi^2 b}{J} \sqrt{\frac{2m}{J}}}$$

ponendo in questa formula $\delta\nu = 33 \text{ cm}^{-1}$, $\nu = 950 \text{ cm}^{-1}$ e ponendo per b , m ed h i loro valori numerici si ricava l'altezza p della barriera di potenziale. Essa risulta

$$p = 4.6 \cdot 10^{-13} \text{ erg} = 2350 \text{ cm}^{-1}.$$

Per calcolare l'effetto della rotazione della molecola, sostituiamo in (2) l'espressione (1) del momento di inerzia A , e sviluppiamo rispetto alle potenze di x , arrestandoci ai termini in x^2 . Troviamo allora

$$(9) \quad W_R = \frac{h^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{J(J+1)}{A_0} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A_0} \right) \Omega^2 \right\} - \frac{h^2 m [J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2} x^2.$$

Sostituiamo questa espressione nella (3), e disponiamo della costante arbitraria in modo che nelle due posizioni di equilibrio U e V siano eguali tra di loro, in modo che, in prima approssimazione, non vari il livello energetico. Poniamo dunque:

$$(10) \quad V(x) = U(x) + \frac{h^2 m [J(J+1) - \Omega^2]}{8 \pi^2 A_0^2} (x_0^2 - x^2)$$

l'ultimo termine di questa formula rappresenta l'elevazione della barriera di potenziale dovuta all'effetto della rotazione. Per calcolare la separazione δv_R dei termini dovuta all'attraversamento della barriera di potenziale, potremo applicare ancora una formula analoga alla (7) dove però sotto il radicale si dovrà porre la somma di $g(x)$ e dell'ultimo termine di (10). Troviamo cioè

$$(11) \quad \delta v_R = v_e - \sqrt{\frac{8 \pi^2 m}{h^2} \int \sqrt{g(x) + \frac{h^2 m [J(J+1) - \Omega^2]}{8 \pi^2 A_0^2} (x_0^2 - x^2)} dx}$$

e sviluppando il radicale col trascurare i quadrati del termine aggiunto a $g(x)$ troviamo infine, tenendo presente la (7) e la (6)

$$(12) \quad \delta v_R = \delta v_e - \frac{h m^{3/2}}{4 \pi \sqrt{2} A_0^2} \frac{b}{\sqrt{p}} \int_{-b}^b \frac{x_0^2 - x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx \cdot [J(J+1) - \Omega^2]$$

da cui, effettuando la quadratura,

$$(13) \quad \delta v_R = \delta v_e - \frac{h m^{3/2}}{4 \sqrt{2} A_0^2} \frac{b}{\sqrt{p}} \left(x_0^2 - \frac{b^2}{2} \right) [J(J+1) - \Omega^2]$$

Possiamo infine, nella nostra approssimazione, sviluppare l'esponenziale scrivendo

$$(14) \quad \delta v_R = \delta v_e - \delta v_e \frac{h m^{3/2}}{4 \sqrt{2} A_0^2} \frac{b}{\sqrt{p}} \left(x_0^2 - \frac{b^2}{2} \right) [J(J+1) - \Omega^2]$$

Ponendo per le varie grandezze i loro valori numerici ed esprimendo le frequenze in cm^{-1} , si trova

$$(15) \quad \delta v_R = 33 - 0,083 [J(J+1) - \Omega^2]$$

che ci esprime la separazione del termine con numeri quantici di rotazione J ed Ω .

Per quanto si riferisce al confronto con l'esperienza, si osservi che, finchè si prescinda dalla separazione qui discussa, dovuta alla possibilità di

oltrepassare la barriera di potenziale, termini che differiscono soltanto per il valore di Ω vengono a dar luogo a righe coincidenti, poichè vale la regola di selezione $\Delta\Omega = 0$. Risulta invece da (15) che le righe corrispondenti a termini che differiscono soltanto per il valore di Ω sono un po' spostate le une rispetto alle altre. In pratica il potere risultativo non è però sufficiente per osservare queste separazioni, e si osservano solamente gli addensamenti di queste righe che, come facilmente si vede, hanno luogo in corrispondenza di $\Omega = 0$. Ciò che in pratica si può vedere è dunque soltanto la separazione che si ottiene ponendo nella (15) $\Omega = 0$. Cioè

$$(16) \quad \delta\nu_J = 33 - 0,083 J(J + 1).$$

La separazione calcolata con questa formula per i successivi termini di rotazione coincide molto bene con quella che si osserva sperimentalmente. P. es per $J = 11$, che è il massimo numero quantico per cui si hanno osservazioni, risulta dalla (16) $\delta\nu_{11} = 22$ mentre sperimentalmente si trova una separazione di 23 cm^{-1} .

Naturalmente fenomeni del tipo di quello qui studiato per il primo termine eccitato della frequenza 950, si hanno anche negli altri termini, ma essi sono meno bene studiati, parte per la loro piccolezza e parte per la debole intensità delle bande ad essi corrispondenti. In particolare anche il termine fondamentale deve presentare una separazione analoga. Anzi la determinazione che abbiamo fatta della altezza della barriera di potenziale che separa le due posizioni di equilibrio, permette di fare una valutazione dell'ordine di grandezza di questa separazione: esso risulta all'incirca di 1 cm^{-1} .

Chimica. — *Velocità di dissoluzione di allumine industriali nella criolite fusa* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio N. PARRAVANO e di O. D'AGOSTINO.

Le allumine che provengono dalla demolizione di edifici molecolari differenti presentano proprietà diverse. Queste dipendono dai composti da cui le allumine prendono origine e dalle condizioni nelle quali si effettua la scomposizione di essi ⁽³⁾.

Per l'interesse che la proprietà può avere in pratica, si è voluto studiare la velocità con cui le tre allumine fino ad oggi impiegate per la fabbricazione dell'alluminio, e cioè quelle: Bayer, Haglund, Blanc, si dissolvono nella criolite fusa.

L'allumina Bayer proviene dalla calcinazione dell'idrossido cristallino (Bayerite) a circa 1200°-1300°. Quando si riscalda la bayerite, già a 500°-600° si ottiene un ossido, γ Al_2O_3 , di densità elevata, nettamente cristallino, ben agglomerato, che alla temperatura di calcinazione nei forni industriali è completamente trasformato nell'ossido stabile, α Al_2O_3 .

L'allumina Haglund si forma da bagni fusi ed ha proprietà paragonabili a quelle del corindone, e cioè, pure avendo la stessa struttura cristallina del prodotto Bayer (α Al_2O_3), si presenta in cristalli di maggiori dimensioni ed è più agglomerata.

L'allumina Blanc ⁽⁴⁾ si differenzia nettamente dai due tipi descritti. Essa si origina dalla demolizione termica degli idrati del cloruro o del nitrato di alluminio, e per la bassa temperatura alla quale ha luogo la scomposizione non ha gli atomi ordinati in un assetto reticolare stabile. Il prodotto ha grande superficie specifica, notevole potere adsorbente, e marcata reagibilità con acidi e con alcali. Con l'esame röntgenografico non si mettono in evidenza caratteristiche di cristallinità; tuttavia esso è otticamente anisotropo.

Fra 650° e 900° l'allumina Blanc subisce una trasformazione accompagnata da sviluppo di calore. Si origina un prodotto con un assetto cristallino più netto e con densità, reale ed apparente, notevolmente maggiore.

Con ulteriore riscaldamento si arriva all'assetto dell'ossido stabile passando per una fase esagonale o romboedrica che differisce dall' α Al_2O_3 per una maggiore distanza fra gli atomi del reticolo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1932.

(3) N. PARRAVANO, *L'allumina Blanc*, «Memorie della R. Accademia d'Italia», vol. I, 1930.

(4) N. PARRAVANO, loc. cit.

La trasformazione è irreversibile e la sua entità dipende dalla temperatura e dalla durata del riscaldamento.

— La velocità di dissoluzione di un solido è funzione, fra l'altro, della estensione della superficie di contatto e quindi del grado di dispersità della sostanza che si considera.

Il processo si compie in due stadi:

- a) passaggio di materia dal solido al liquido;
- b) ripartizione uniforme del soluto nel solvente.

Per forme diverse di una stessa sostanza, rispetto a uno stesso solvente, quando si sia assicurata la costanza della seconda condizione (ad es. agitando sempre allo stesso modo) la velocità di dissoluzione dipende dall'energia di attivazione ⁽¹⁾ nel passaggio di materia dal solido al liquido, energia legata alla struttura superficiale (spigoli e vertici) ed a quella interna (deformazioni reticolari, maggiore distanza fra gli atomi del reticolo).

È da prevedersi pertanto che, fra le tre allumine prese in esame, alla Blanc debba spettare una maggiore velocità di dissoluzione nei fusi di criolite quando si ammetta che questa velocità sia superiore a quella di trasformazione nell'ossido α stabile.

Ed infatti, se in un fuso di criolite mantenuto a 1050° si introducono le tre allumine nella stessa quantità e nella stessa granitura, e si agita sempre allo stesso modo, si osserva che il tempo necessario affinché il liquido, diventato torbido per l'aggiunta dell'ossido, torni di nuovo trasparente, è nel caso dell'allumina Blanc notevolmente minore che per le altre due.

Si è voluto precisare meglio la differenza, e si è misurato a questo scopo come varia, in funzione del tempo, la conduttività di bagni di criolite ai quali sono state aggiunte quantità determinate di allumina.

Il metodo è stato già impiegato con successo per studiare la velocità di dissoluzione di sostanze solide ⁽²⁾.

— K. Arndt e W. Kalass ⁽³⁾ hanno eseguito misure di conduttività su bagni di criolite contenenti allumina. Dai risultati di questi Autori si ricava che la variazione di conduttività del fuso di criolite per aggiunta di allumina è molto piccola, per modo che non poteva pensarsi per le misure in questione ad un ordinario dispositivo a ponte di Kohlrausch, tanto più che, da una parte l'ascoltazione telefonica sarebbe stata disturbata dai rumori della manovra dell'agitatore, e dall'altra era necessario seguire con continuità l'andamento del fenomeno.

(1) W. FEITKNECHT, *Ueber topochemische Umsetzungen fester Stoffe in Flüssigkeiten*, «Fortschritte der Chemie, Physik und Physikalischen Chemie», vol. 21 (1930).

(2) BUDNIKOFF, «Z. anorg. Chem.», 125, 257 (1922); 191, 79 (1930); «Tonind.-Zeit.», 51, 737 (1927).

(3) «Zeit. Elektroch.», 30, 12 (1924).

Si è operato perciò a questo modo.

Si è impiegata una cella costituita da un recipiente cilindrico di platino mantenuto al centro di un forno Heraeus. Due piastrine di platino ($10 \times 20 \times 1$ mm.) costituivano gli elettrodi ed erano sostenute da grossi fili dello stesso metallo, i quali per quasi tutta la loro lunghezza erano rivestiti con porcellana dura per assicurarne l'isolamento e per fissare l'assieme allo stativo dell'apparecchio.

Fra gli elettrodi si trovava l'agitatore di platino che ruotava sempre con la stessa velocità.

La temperatura del forno veniva regolata automaticamente da un termoregolatore potenziometrico Leeds e Northrup comandato da un termoelemento Pt-Pt-Rh la cui saldatura era immersa nel fuso di criolite.

Per la misura di conduttività si è adoperato un dispositivo a ponte costituito nella maniera seguente.

In derivazione sulla resistenza di confronto è stato collocato un grosso condensatore variabile a spine per compensare le forti correnti di sfasamento prodotte dalla capacità del sistema. Il ponte era alimentato da un oscillatore a valvola termoionica che forniva una tensione di forma definita e costante di circa 1100-1200 periodi. Sul reocordo era derivato, in luogo del telefono e a mezzo di un trasformatore di modulazione per trasmissioni radiotelefoniche del rapporto $1/25$, un voltmetro a valvole munito di 2 stadi di preamplificazione. Nel circuito anodico della valvola voltmetrica era inserito un voltmetro di 3 v - 1000 ohm usato come milliamperometro (3 milliamperes fondo scala - 150 divisioni).

Chiuso il ramo incognito del ponte su una resistenza di 0.3-0.1 ohm ed equilibrati i bracci, era possibile rilevare, nelle condizioni nelle quali era messo a punto l'apparecchio, una variazione di resistenza dell'ordine di 0.001 ohm. Per una variazione massima della resistenza di 0.01 ohm, ed agendo opportunamente sul potenziale di griglia e sul potenziale anodico della valvola voltmetrica, si poteva far variare entro larghi limiti la sensibilità dello strumento pur rimanendo lineare il rapporto fra gli spostamenti dell'ago e la variazione di resistenza.

Prima di procedere alle esperienze ci siamo accertati con prove in bianco che, nelle condizioni in cui si operava, la resistenza del fuso di criolite rimaneva la stessa dal principio alla fine della prova.

Si è regolata la temperatura di esperienza a 1050° .

Raggiunto il regime veniva anzitutto equilibrato il ponte prendendo nota della resistenza iniziale della criolite e quindi, agendo opportunamente sul condensatore di compensazione e sul potenziale di griglia della valvola voltmetrica, si portava l'ago del milliamperometro ad una divisione stabilita. Successivamente si versava l'allumina per mezzo di un tubo di porcellana, e si seguiva la posizione dell'ago del milliamperometro.

Sono stati aggiunti ogni volta 15 grammi di allumina (passata al setaccio di 4900 maglie per cm²) in un bagno di 100 grammi di criolite naturale.

Per questa concentrazione, alla temperatura di 1050° alla quale si è sperimentato, il diagramma di stato del sistema allumina-criolite ⁽¹⁾ dimostra che esiste soltanto liquido.

In un primo momento l'aggiunta di allumina provocava un forte aumento di resistenza dovuto all'abbassamento della temperatura del bagno ed alla eterogeneità di esso.

Nella tabella seguente e nei diagrammi della figura sono riportate le resistenze, a partire da quando la temperatura tornava a stabilizzarsi al valore primitivo di 1050°, il che si verificava dopo 2-4 minuti.

Resistenza del fuso puro di criolite a 1050°

0.1682 ohm.

		Resistenze in ohm delle soluzioni a 1050° con allumina:		
		BLANC	BAYER	HAGLUND
dopo	2 m.	0.1947	—	—
»	3 »	0.1807	0.2107	—
»	4 »	0.1757	0.1957	0.2117
»	5 »	0.1757	0.1837	0.2057
»	6 »	0.1757	0.1782	0.1982
»	7 »	0.1757	0.1767	0.1907
»	8 »	0.1762	0.1767	0.1832
»	9 »	0.1767	0.1672	0.1792
»	10 »	0.1767	0.1772	0.1787
»	11 »	0.1767	0.1772	0.1782

I valori sono ciascuno la media di tre esperienze molto concordanti.

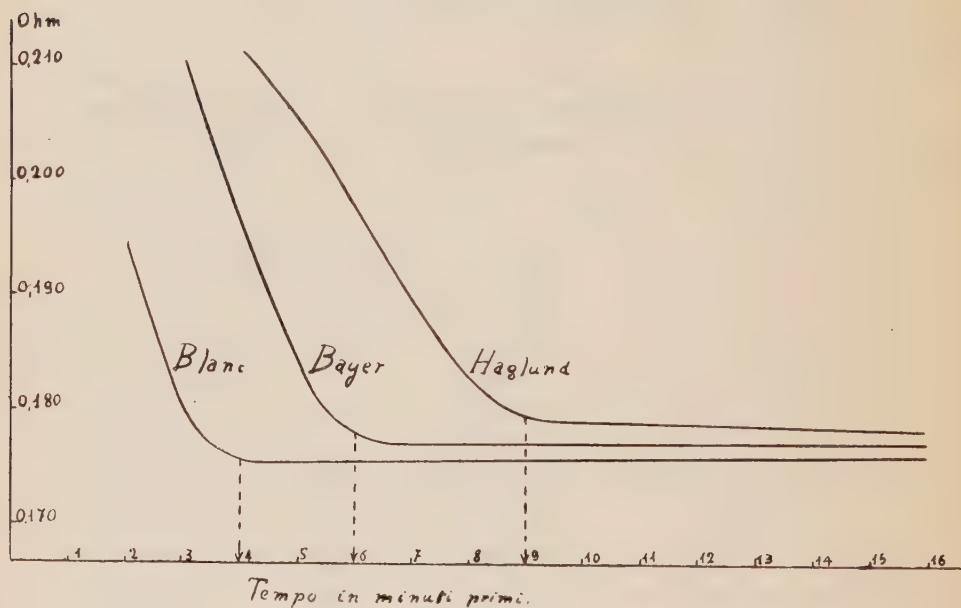
Dalla figura si vede che, ristabilitasi la temperatura, la resistenza del bagno si va abbassando più o meno rapidamente a seconda del tipo di allumina fino ad assumere un valore costante. In questo periodo di variazione rapida si effettua la dissoluzione dell'allumina sospesa.

A partire perciò dall'inizio dell'esperienza sono occorsi all'incirca: quattro minuti per la Blanc, sei per la Bayer, e nove per la Haglund per passare in soluzione.

(1) PASCAL e JOUNIAUX, « Bull. Soc. Chim. », 13, 439 (1913); R. LORENZ, A. JABS e W. EITEL, « Z. anorg. Chem. », 83, 39 (1913); G. A. ROUSH e M. MIYAKE, « Trans. Am. Electr. Soc. », 48, 99 (1925).

La resistenza iniziale della criolite è di 0.1682 ohm, e dopo la dissoluzione dell'allumina essa diventa 0.1767-0.1782 ohm. E cioè la presenza dell'allumina accresce la resistenza del bagno.

Questo risultato concorda con quanto hanno trovato Arndt e Kalass⁽¹⁾ secondo i quali la conducibilità diminuisce linearmente con l'aumentare del contenuto in allumina.



Dai valori ottenuti, questi autori hanno calcolato per estrapolazione che la conducibilità del bagno diverrebbe nulla in corrispondenza del 100 % di Al_2O_3 , ed hanno considerato perciò l'allumina contenuta nel bagno come soluto non dissociabile.

— Sebbene numerose cause perturbatrici tolgano rigore quantitativo al metodo seguito per stabilire la diversa velocità di dissoluzione delle tre allumine nei bagni di criolite, i risultati ottenuti permettono nettamente di fare il confronto che ci eravamo proposti.

Delle tre allumine studiate risulta infatti che quella che passa più facilmente in soluzione è la Blanc, e quella che si discioglie più difficilmente è la Haglund.

(1) Loc. cit.

Geologia. — *Una interpretazione tettonica del promontorio occidentale del Golfo della Spezia.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ROVERETO.

Esamino e cerco di spiegare, valendomi di Note mie e di altri, in particolar modo di quelle di D. Zaccagna, con i concetti che ho di recente introdotti e seguiti, studiando la formazione ofiolitifera dell'Appennino, la più curiosa ed eccezionale consistenza tettonica della Liguria, quella del promontorio occidentale del Golfo della Spezia.

Consta, questo promontorio, di una serie, in prevalenza monoclinale, di terreni mesozoici, che si può chiamare *serie normale*, dal trias al senoniano, compreso il neocomiano e il titonico: è la serie delle Apuane e, se si vuole, della *falda toscana*, come io l'ho distinta.

La serie normale è compresa in un anticlinale di macigno eocenico, del livello più profondo, il quale può essere, o non, in falda.

Nei sinclinali laterali a questo anticlinale si ha una serie scistoso-ofiolitifera, cretacea — questa creticità è sempre stata sostenuta dal Sacco, ma con altre limitazioni — avente tutt'altri termini (ciò si intende per il cretaceo, poichè il resto non è presente) della serie normale: la contrapposizione di queste due serie è solo spiegabile con l'arrivo di una falda, di quella che ho denominata *falda ligure-toscana*; come pure, unicamente con l'ipotesi della falda è spiegabile la presenza nei sinclinali di terreni più antichi di quelli degli anticlinali, poichè la falda è arrivata quando il macigno degli anticlinali, che forma ora finestre, era già depositato.

Il parossismo orogenico ha però luogo dopo l'arrivo della falda, e comprende cretaceo ed eocene: questo, che è inferiore, si inflette, unitamente alla copertura, per mezzo di anticlinali, quasi sempre ribaltati.

Nel fianco di uno degli anticlinali maggiori, quello di Val di Vara-Spezia, si è manifestata una piega-faglia inversa, dovuta a spinte tangenziali, e non radiali, durante la fase finale del periodo orogenico. Difatti, la metà per lungo del nocciuolo anticlinalico, costituito da mesozoico ha, pur essendo a tetto, risalito su di un piano di macigno funzionante da muro, macigno che era una delle gambe dell'anticlinale: il piano di faglia è risultato conforme, ossia inclinato come gli strati: l'entità del rigetto non è calcolabile, ma deve essere notevole, almeno eguale allo spessore della serie mesozoica.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1932.

Così, veniva spinta verso l'esterno la serie mesozoica normale del promontorio occidentale del golfo spezzino, che all'affioramento in piano risultava poi come una lama appuntita, la metà di un brachianticlinale.

L'esame di alcuni particolari precisa meglio questa sintesi.

Di contro a Carrodano, sul prolungamento condotto idealmente verso nord-est della lama mesozoica, si trova il primo indizio, agli altri autori sfuggito, del singolare movimento della lama, ossia si ha una piccola massa di calcare neocomiano, che è cinta da una parte da scisti policromi del senoniano, ed è evidentemente isolata nello scisto ofiolitifero, quindi *massa estrusa*, divelta da un sottostrato.

La *teoria dell'estrusione*, come concreta nata di recente, soprattutto per spiegare la dispersione di masse rocciose isolate dove si veniva a negare l'esistenza di falde, come nei Pirenei, è simile, ma non eguale, a quella del diapirismo. Si è dato a poco, a poco, a quest'ultimo un significato assai più ampio di quello originario; ma che ora va ristretto, poichè bisogna limitarlo a indicare lo spostamento e la penetrazione di cupole e lame, in particolar modo dovute a precipitazioni chimiche e chimico-organiche, prive quindi di un sottostrato continuo: l'estrusione, invece, è la risalienza e il viaggio isolato di masse di qualsiasi natura, che io avevo già distinto come *intrusioni tettoniche* (*Trattato*, p. 276), che sono state divelte e allontanate da un sottostrato, e corrisponde a un concetto che nelle regioni con serie di rocce a plasticità variata è applicabile di sovente. Così, avrò prossimamente occasione di usarne, tanto per lame di calcare dolomitico esistenti nella serie antracolitica in falda della Liguria Occidentale, quanto per masse di serpentine di età non precisata, e di calcare eocenico, isolate nella serie neogenica di Crea e di altri luoghi della Collina di Torino.

Susseguono due notevoli lenti, e altre minori, di serpentine (le cosiddette localmente *gronde* del Monte Gronde, di Lago e del Termine), comprese nel loro imballaggio scistoso, allineate, ma in un modo meno regolare di quanto risulta dai rilievi esistenti, che appaiono come se fossero provenienti dal disotto e in zona anticlinale, mentre, come ho ora detto, si usa sempre trovarle nelle zone sinclinali. Ho lungamente cercato una spiegazione a questo fatto, dopo avere escluso che si tratti di estrusione, o di *Klippen*, dato che le ofioliti sono già di per sè isolate e spostate da una falda, che per questo ho detta a *truciolì* e a *doppio viaggio*, come in altro fascicolo di questi « Rendiconti » ho ultimamente esposto, e sono provenienti da placcoliti, secondo vuole altra recente teoria, quella di Steinmann, che è da preferirsi a quella che le considera frammenti di laccoliti.

La spiegazione da me trovata sarebbe, che una striscia della formazione ofiolitifera, si è incuneata lungo il piano di scorrimento, diventando così un *cuneo di faglia*.

Dopo le lenti di ofioliti si ha, un po' spostato verso il sud-ovest, più di quanto apparisce sulle carte geologiche, che sono a scala relativamente

piccola, il principio della punta della lama mesozoica, con l'isola di calcare neocomiano di Cassana, e la cintura degli scisti senoniani, scisti che poi più non si interrompono, e tengono unito il giacimento di Cassana a tutto il restante. Qui sorge il problema: la lama è di estrusione, oppure è radicata? Essa è compresa nella formazione basale dell'eocene, della quale non si ha prova sicura che sia in falda; quindi può darsi che, un trasporto per falda non si sia avuto. In quanto all'estrusione, ossia all'estirpazione l'isolamento e il viaggio di tutta una massa così allungata e ristretta, si può ricorrere, per decidere, alla *petroettonica*, ossia al riconoscimento dalle condizioni di assetto delle rocce in relazione con l'entità dei movimenti avvenuti, come io ho fatto, tra i primi, del 1917, nella introduzione allo studio dell'eocene ligure. Ora abbiamo, che i calcari e le altre rocce della lama offrono banchi ben distinti, talvolta di straordinaria dirittura, con il sistema di fratturazione usuale e proprio a ogni calcare di differente età, senza milonitizzazioni particolari, nè altre condizioni che testimonino uno sconvolgimento conseguente da un trasporto isolato: quindi la lama è per me localmente radicata, e se si considera che sia in falda (sarebbe la *falda toscana*), fa parte di questa, senza estrusione.

Caratteristica è l'appuntatura della lama, che si determina in modo graduale per assottigliamento e sparizione della serie interessata, dalla parte del piano di faglia: quando la punta è ben aguzza si hanno le masse estruse e le disperse a truciolo. Bisogna dire, che lo scorrimento è stato di gran danno al tetto, e che da questo durante lo spostamento, si sono staccate delle masse di notevoli dimensioni.

Le masse ofiolitiche tra la valle del Pignone e quella del Riccò, pressochè abbracciate dall'eocene, ma contigue alla cicatrice, bisogna anch'esse considerarle penetrate nella massa del macigno, per effetto dello sconcerto conseguente dalla faglia; un'altra immediata e successiva informe cupola di mesozoico (nei dintorni di Ponzo), in eguale posizione, si direbbe una piega minore, compresa fra il piano di scorrimento principale ed uno secondario.

Un ultimo movimento avvertibile rispetto alla lama sono le pressioni tangenziali che, dopo la determinazione della stessa, hanno reso irregolare la parte poggiata sul piano di scorrimento, mentre dal lato opposto il contorno si è mantenuto diritto e integro. La dirittura della lama da questa parte è inoltre parallela al confine esterno della fascia di macigno che l'accompagna, confine anch'esso quasi rettilineo, salvo le rientranze di affioramento secondo le incisioni dei corsi d'acqua, dalle Ferriere di Carrodano a Corniglia, e ciò è ancora una prova che lo stabilimento della lama e l'ondulazione delle pieghe sono fenomeni pressochè contemporanei.

La influenza morfologica della lama sulle forme dei dintorni di La Spezia e del suo golfo è del tutto riflessa o indiretta, perchè, dato che si aveva con essa una zona resistente, e a conformazione particolare, ciò ha avuto risalto, è stato messo in evidenza dall'erosione: man mano che questa

scoperchiava e intaccava i calcari mesozoici, si orientavano le valli, si determinava tutta la costola montuosa a ponente del Golfo, e con questa il promontorio del Golfo stesso, che a sua volta assumeva la forma di una lama di coltello. Altri movimenti, collegati con le ripieghe del villafranchiano, di cui ho già discusso nel mio vecchio lavoro « *Geomorfologia delle Valli Liguri* », determinavano e mantenevano la rientranza costiera, dando luogo a una sorta di *vallone dalmato*, e riducevano a lago, e poi deviavano, la valle della Vara, che in origine faceva parte del golfo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les polynômes orthogonaux à deux variables.* Nota ⁽¹⁾ di M. GHERMANESCO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Les polynômes orthogonaux à deux ou plusieurs variables n'ont pas encore fait l'objet d'une étude systématique qui ait pour point de départ leur propriété fondamentale. On en a étudié des classes, rencontrées en particulier des fonctions connues, comme c'est le cas des fonctions hypergéométriques à deux (Appell) ou à plusieurs variables (Lauricella) ou en partant des fonctions génératrices, données à l'avance, comme c'est le cas des polynômes d'Hermite et leurs généralisations, fonctions qui constituent une généralisation purement algébrique des analogues du cas des polynômes à une seule variable. La propriété d'orthogonalité y était retrouvée ensuite.

Nous voulons essayer une théorie systématique des polynômes orthogonaux à deux variables (l'extension au cas des plusieurs ne présentant que des difficultés d'écriture) en prenant pour point de départ la propriété d'orthogonalité-même. Nous donnons dans cette Note les premiers résultats obtenus, en nous réservant le droit d'y revenir.

1. Soit D un domaine plan fermé, limité par une ou plusieurs arcs de courbe et tel qu'un parallèle à l'un des axes ne le rencontre qu'en deux points seulement. Soit encore $\varphi(x, y)$ une fonction continue et positive dans D. Nous définirons la suite de polynômes

$$(A) \quad P_{00}, P_{10}, P_{01}, \dots, P_{mn} \dots$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1932.

par les conditions d'orthogonalité

$$(1) \quad \iint_D \varphi(x, y) P_{m', n'}(x, y) P_{m, n}(x, y) dx dy = 0 \quad m' + n' < m + n$$

$$(2) \quad \iint_D \varphi(x, y) P_{m, n}^2(x, y) dx dy = I_{m, n} \neq 0$$

qu'on peut remplacer par les suivantes

$$(3) \quad \iint_D \varphi(x, y) x^p y^r P_{m, n}(x, y) dx dy = 0 \quad p + r < m + n$$

$$(4) \quad \iint_D \varphi(x, y) x^m y^n P_{m, n}(x, y) dx dy = K_{m, n} \neq 0.$$

Les relations (3) déterminent le polynôme $P_{m, n}$ à un facteur constant près, qu'on précise de façon que le coefficient de $x^m y^n$ soit égal à l'unité. Introduisons les notations

$$(5) \quad g_{pr} = \iint_D \varphi(x, y) x^p y^r dx dy \quad g_{pr} \neq g_{rp}$$

g_{pr} sera le *moment* de la fonction $\varphi(x, y)$ relativement au domaine D, expression analogue à celle connue pour le cas d'une seule variable.

Cela étant, le polynôme P_{mn} a pour expression

$$(B) \quad P_{mn} = \frac{1}{\Delta_{mn}} \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots & x^{m+n} & \dots & y^{m+n} \\ g_{00} & g_{10} & g_{01} & g_{20} & g_{11} & g_{02} & \dots & g_{m+n,0} & \dots & g_{0,m+n} \\ g_{10} & g_{20} & g_{11} & g_{30} & g_{21} & g_{12} & \dots & g_{m+n+1,0} & \dots & g_{1,m+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{0,m+n} & g_{1,m+n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{0,2m+2n} \end{vmatrix}$$

Δ_{mn} étant le mineur correspondant à $x^m y^n$.

Le polynôme P_{mn} , ainsi déterminé est unique, car en supposant l'existence de deux polynômes, remplissant les mêmes conditions, on aurait, d'après (3)

$$\iint_D \varphi(x, y) Q_{pr}(x, y) [P_{m, n}(x, y) - P'_{mn}(x, y)] dx dy = 0$$

Q_{pr} étant un polynôme de $(m+n)^e$ degré au plus, ne contenant pas de terme en $x^m y^n$. Or, il y a en même pour le polynôme $P_{mn} - P'_{mn}$ donc, en prenant

$$Q = P_{mn} - P'_{mn}$$

on aurait

$$\iint \varphi(x, y) [P_{mn} - P'_{mn}]^2 dx dy = 0$$

égalité impossible, vu que tous les éléments de l'intégrale sont positifs.

Les intégrales $I_{m,n}$, $K_{m,n}$ sont égales, car la relation (2) devient, en tenant compte de (3) et (4)

$$I_{mn} = \iint_D \varphi(x, y) x^m y^n P_{m,n} dx dy = K_{mn}.$$

2. Le polynôme $P_{mn}(x, y)$ peut être mis sous la forme d'une dérivée partielle du $(m+n)^e$ ordre, savoir

$$(C) \quad P_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{\varphi(x, y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [u^m v^n \psi_{mn}(x, y)]$$

u, v étant des polynômes du deuxième degré en x et y , s'annulant sur D , le premier ayant deux racines pour x et l'autre deux racines pour y ; ψ_{mn} est une fonction continue et finie dans D , pouvant être la même pour tous les polynômes P_{mn} et en particulier $\psi_{mn} = 1$.

Cas particulier. — 1° Si le domaine se réduit au triangle déterminé par les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

on a

$$u = x(1 - x - y), \quad v = y(1 - x - y)$$

donc

$$P_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^m y^n (1 - x - y)^{m+n} \psi_{m,n}(x, y)]$$

qui pour

$$\varphi(x, y) = \psi_{mn}(x, y) = x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}$$

se réduisent aux polynômes $\mathcal{F}_{mn}(x, y)$ définis par P. Appell comme généralisation des polynômes de Jacobi; si $\alpha = \gamma + \gamma'$ on retrouve la classe de polynômes F_{mn} , définie également par P. Appell.

2° Si le domaine D se réduit au cercle $x^2 + y^2 = 1$, on obtient les polynômes d'Hermite et leurs généralisations; on a

$$u = v = 1 - x^2 - y^2$$

donc

$$P_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [(1-x^2-y^2)^{m+n} \psi_{mn}].$$

Pour $\psi_{mn} = \varphi(x,y) = (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}$ on retrouve la classe de polynômes de M. A. Angelesco ⁽¹⁾, qui comprend $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ les polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite.

3° Si la domaine D se réduit à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$ et de l'ellipse $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1$ ($a < 1 < b$) on obtient la classe de polynômes

$$P_{mn} = \frac{A_{mn}}{\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [(1-x^2-y^2)^m (1-a^2 x^2-b^2 y^2)^n \psi_{mn}]$$

qui comprend les classes particulières $\psi_{mn} = \varphi = 1$, et

$$\psi_{mn} = \varphi(x,y) = (1-x^2-y^2)^\lambda (1-a^2 x^2-b^2 y^2)^\mu.$$

4° Si le domaine D se réduit à la région

$$x > 0, \quad y > 0$$

on a

$$u = x, \quad v = y \quad \psi_{mn} = e^{-\frac{1}{2}\Psi(x,y)} \Psi^*(x,y)$$

$\Psi(x,y)$ étant une forme quadratique, définie et positive, en x et y ; on obtient la classe de polynômes

$$P_{mn} = \frac{A_{mn}}{\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^m y^n e^{-\frac{1}{2}\Psi(x,y)} \Psi_{m,n}^*(x,y)]$$

qui constitue une généralisation des polynômes de Kummer.

5° Signalons encore une classe spéciale de polynômes

$$P_{2m,2n} = \frac{A_{mn}}{\varphi(x,y)} \cdot \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^m y^n (1-x^2-y^2)^{m+n} \psi_{mn}(x,y)]$$

qu'on peut considérer comme généralisant une classe de polynômes, due aussi à P. Appell ⁽²⁾

$$P_{2n}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [x^n (1-x^2)^n]$$

qui l'a définie comme généralisation des polynômes de Legendre.

(1) A. ANGELESCO, « Thèse », Paris, 1916.

(2) « Archiv Math. u. Physik », 3^e série, 1901, p. 70. Voir aussi Une généralisation due à M. P. HUMBERT, « Nouv. An. », 1919, t. XIX, 4^e série, p. 443.

3. L'intégrale $I_{m,n}$ peut être calculée par une autre voie, à l'aide de l'expression (C) du polynôme $P_{m,n}$. On a en effet

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \iint_D \varphi(x, y) P_{m,n}^2 dx dy = A_{mn} \iint_D P_{mn} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [u^m v^n \psi_{m,n}] dx dy \\ &= A_{mn} \iint_D u^m v^n \psi_{m,n} \frac{D^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} P_{mn} dx dy \\ &= m! n! A_{mn} \iint_D u^m v^n \psi_{mn} dx dy. \end{aligned}$$

On a aussi

$$(D) \quad u^m v^n \psi_{mn} = \frac{1}{A_{mn} (m-1)! (n-1)!} \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y (x-s)^{m-1} (y-t)^{n-1} \varphi(s, t) P_{m,n}(s, t) ds dt$$

et sur cette expression on démontre aisément que ψ_{mn} est finie dans D et sur D .

Si $\psi_{mn} = \varphi(x, y)$, la relation (D) équivaut à une infinité d'équations intégrales, dont $\varphi(x, y)$ est l'intégrale commune.

4. Dans le cas $\psi_{mn} = \varphi$ les polynômes P_{mn} admettent une fonction génératrice qu'on obtient à l'aide de la série de Lagrange. Soient ξ, η les racines du système d'équations

$$f_1 = \xi - x - \alpha u(\xi, \eta) = 0 \quad f_2 = \eta - y - \beta v(\xi, \eta) = 0$$

se réduisant respectivement à x et à y pour $\alpha = 0, \beta = 0$; on a

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(\xi, \eta)} = 1 - \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \alpha \beta \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \mu(\xi, \eta).$$

La formule de Lagrange nous donnera

$$(E) \quad \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\varphi(x, y) \mu(\xi, \eta)} = \sum_m \sum_n \frac{\alpha^m \beta^n}{A_{mn} m! n!} P_{mn}(x, y)$$

on a une série dont la valabilité doit être, bien entendu, précisée dans chaque cas à part.

5. A côté des polynômes P_{mn} on peut mettre en évidence encore quelques classes spéciales de polynômes orthogonaux, dont l'importance est fondamentale surtout quand il s'agit du développement d'une fonction $F(x, y)$ en série de polynômes P_{mn} .

Considérons les polynômes $Q_{mn}(x, y)$ dont le seul terme du $(m+n)^e$ degré soit $x^m y^n$, définis par les relations, analogues à (3) et (4)

$$(7) \quad \iint_D \varphi(x, y) x^p y^r Q_{mn}(x, y) dx dy = 0 \quad p + r < m + n$$

$$(8) \quad \iint_D \varphi(x, y) x^m y^n Q_{mn}(x, y) dx dy = J_{m,n} \neq 0.$$

On obtient l'expression du polynôme Q_{mn} en suprimant les colonnes correspondant aux termes du $(m+n)^e$ degré, sauf un seul, dans l'expression du polynôme P_{mn} . Nous dirons que les polynômes Q_{mn} sont *associés* aux polynômes P_{mn} .

Considérons le polynôme G_{mn} , du $(m+n)^e$ degré, dont le seul terme du $(m+n)^e$ degré soit encore $x^m y^n$, mais dont les autres contiennent x et y à des puissances respectivement au plus égales à m et à n . Un tel polynôme contient $(m+1)(n+1)$ termes et il est évidemment plus simple que le polynôme Q_{mn} .

On peut définir encore d'autres polynômes: par exemple un polynôme X_{mn} qui ne contienne aucun terme en x^p seul et un polynôme Y_{mn} qui ne contienne aucun terme en y^r seul.

Nous nous arrêterons pour le moment sur les polynômes Q_{mn} et G_{mn} dont les propriétés sont plus remarquables.

En effet, on établit sans peine les relations

$$(9) \quad \iint_D \varphi(x, y) P_{mn} Q_{m'n'} dx dy = 0$$

tant que $m' \neq m$, $n' \neq n$, de même que

$$(10) \quad \iint_D \varphi(x, y) P_{mn} G_{m'n'} dx dy = 0$$

dans les mêmes conditions. Ces relations sont des simples conséquences de la relation (3). On trouve aussi

$$\iint \varphi(x, y) P_{mn} Q_{mn} dx dy = \iint \varphi(x, y) P_{mn} G_{mn} dx dy = \iint \varphi(x, y) P_{mn} x^m y^n dx dy = I_{m,n}$$

en supposant bien entendu — ce qui d'ailleurs est nécessaire pour la détermination complète de ces polynômes — que le coefficient du terme du $(m+n)^e$ degré soit égal à l'unité dans Q_{mn} et G_{mn} .

Les polynômes Q_{mn} et G_{mn} servent pour la détermination des coefficients du développement d'une fonction $F(x, y)$ en série de polynômes P_{mn} ; en effet, supposons le développement

$$F(x, y) = \sum_m \sum_n A_{ij} P_{ij}$$

on a, d'après

$$I_{ij} A_{ij} = \iint \varphi(x, y) F(x, y) \left\{ \begin{matrix} Q_{ij} \\ G_{ij} \end{matrix} dx dy \right.$$

de sorte qu'on peut écrire

$$(7) \quad F(x, y) = \iint_D \varphi(s, t) F(s, t) \sum_m \sum_n \frac{P_{mn}(x, y) R_{mn}(s, t)}{I_{mn}} ds dt$$

R_{mn} devant être remplacé par Q_{mn} ou G_{mn} .

Matematica. — *La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique.* — II. *Applications de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique.*⁽¹⁾ Nota di HANS HAMBURGER, presentata⁽²⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

10. On se donne un vecteur \mathbf{n} de longueur 1 dont les trois composantes sont des fonctions de deux paramètres u, v . Nous supposons en outre que les courbes $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, définies par le vecteur $\mathbf{n}(u, v)$, forment un système orthogonal. On peut tâcher alors de déterminer toutes les surfaces $\mathbf{x}(u, v)$, dont les lignes de courbure $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ ont pour image sphérique le système de courbes donné $\mathbf{n}(u, v)$. C'est ce que nous nommons le problème de la représentation sphérique lié au système de courbes $\mathbf{n}(u, v)$.

11. Soit $\mathbf{x}(u, v)$ une solution particulière de ce problème et soit π un plan qui passe par l'origine du système des coordonnées, \mathbf{p} le vecteur normal de π .

Nous soumettons les deux systèmes de courbes $\mathbf{x}(u, v)$ et $\mathbf{n}(u, v)$ à une transformation de Ribaucour simultanée en posant

$$(6) \quad \mathbf{X}(u, v) = \{ \mathbf{x}, \mathbf{p} - \mathbf{n} \}_{c_1} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{p}\mathbf{x})(\mathbf{p} - \mathbf{n})^{-1}, c_1 = \mathbf{p}\mathbf{x}(u_0 v_0)$$

$$(7) \quad \mathbf{N}(u, v) = \{ \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{n} \}_{c_2} = \mathbf{n} - 2(\mathbf{p}\mathbf{n})(\mathbf{p} - \mathbf{n})^{-1}, c_2 = \mathbf{p}\mathbf{n}(u_0 v_0).$$

(1) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(2) Voir la Note I, « Rendiconti R. Accad. Lincei », vol XV, serie 6^a, p. 936. Dans ce qui suit, nous faisons usage des définitions et des abréviations symboliques introduites dans la Note I, et nous citerons les numéros des formules et des § de la Note I.

On remarque alors :

1° que les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{N} sont situés dans le plan π ;

2° que les deux systèmes de courbes planes $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ représentés par les vecteurs $\mathbf{X}(u, v)$ et $\mathbf{N}(u, v)$, sont des systèmes orthogonaux et que spécialement le système $\mathbf{N}(u, v)$ se déduit du système de courbes sphériques $\mathbf{n}(u, v)$ par une projection stéréographique dans le plan π ; car la formule (7) nous donne immédiatement

$$(8) \quad \frac{\mathbf{N} - \mathbf{p}}{2} = (\mathbf{n} - \mathbf{p})^{-1}.$$

3° que les deux systèmes de courbes $\mathbf{X}(u, v)$ et $\mathbf{N}(u, v)$ ont des tangentes parallèles en des points correspondants. Dans ce qui suit, nous appellerons deux systèmes orthogonaux de courbes planes $\mathbf{X}(u, v)$ et $\mathbf{N}(u, v)$ parallèles, si les deux vecteurs tangents $\mathbf{X}_u(u, v)$ et $\mathbf{N}_u(u, v)$ sont parallèles entre eux.

12. La transformation de Ribaucour définie dans les formules (6) et (7) nous permet de substituer au problème de la représentation sphérique lié à $\mathbf{n}(u, v)$ le problème plus simple de déterminer tous les systèmes de courbes planes $\mathbf{X}(u, v)$ parallèles au système $\mathbf{N}(u, v)$, déduit de $\mathbf{n}(u, v)$ par projection stéréographique. En effet, si l'on pose

$$(9) \quad \mathbf{x}(u, v) = \{ \mathbf{X}, \mathbf{N} - \mathbf{p} \}_c,$$

c étant une constante arbitraire et $\mathbf{X}(u, v)$ un système quelconque parallèle au système $\mathbf{N}(u, v)$, on obtient la solution la plus générale du problème de la représentation sphérique lié au système de courbes $\mathbf{n}(u, v)$. On le démontre en s'appuyant sur (8) et sur la formule (2) du § 6, I qui nous donne l'inversion de l'équation (6).

13. Si l'on pose

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{X}'(u, v) = \{ \mathbf{x}, \mathbf{p} + \mathbf{n} \}_{c'_1} & , \quad c'_1 = \mathbf{x}(u_0, v_0) \mathbf{p} \\ \mathbf{N}'(u, v) = \{ \mathbf{n}, \mathbf{p} + \mathbf{n} \}_{c'_2} & , \quad c'_2 = \mathbf{n}(u_0, v_0) \mathbf{p} \end{cases}$$

on obtient également deux systèmes de courbes planes $\mathbf{X}'(u, v)$ et $\mathbf{N}'(u, v)$ parallèles entre elles, ayant les trois mêmes propriétés énoncées que les systèmes $\mathbf{X}(u, v)$ et $\mathbf{N}(u, v)$. (Voir § 11).

En outre, on a comme inversion des équations (10)

$$\mathbf{x}(u, v) = \{ \mathbf{X}', \mathbf{p} + \mathbf{N}' \}_c.$$

14. Pour trouver l'équation différentielle, dont les intégrales déterminent tous les systèmes de courbes $\mathbf{X}(u, v)$ parallèles au système $\mathbf{N}(u, v)$,

on introduit les deux composantes $\overset{\circ}{X}(u, v)$, $\overset{\circ}{Y}(u, v)$ du vecteur $\mathbf{N}(u, v)$ et l'angle $\vartheta(u, v)$ que la tangente aux courbes $v = \text{const.}$ forme avec l'axe des abscisses, de sorte qu'on a

$$\frac{\overset{\circ}{X}_u}{\sqrt{\overset{\circ}{N}_u^2}} = \cos \vartheta, \quad \frac{\overset{\circ}{Y}_u}{\sqrt{\overset{\circ}{N}_u^2}} = \sin \vartheta.$$

Ensuite on pose

$$\omega = e^{-i\vartheta}$$

$$\overset{\circ}{\zeta} = \overset{\circ}{X} + i\overset{\circ}{Y}, \quad \zeta = X + iY,$$

X et Y étant les composantes du vecteur \mathbf{X} . On reconnaît alors sans difficulté que toute intégrale ζ , satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$(11) \quad D(\zeta) = \zeta_{uv} + \frac{\omega_v}{\omega} \zeta_u + \frac{\omega_u}{\omega} \zeta_v = 0$$

détermine un système de courbes $\mathbf{X}(u, v)$ parallèle au système donné $\mathbf{N}(u, v)$, pourvu que les deux quantités $\omega\zeta_u$ et $i\omega\zeta_v$ soient réelles. Enfin on vérifie immédiatement qu'on a aussi

$$(12) \quad D(\overset{\circ}{\zeta}) = 0.$$

15. L'équation (10) admet encore une simplification. En substituant

$$Z = \omega\zeta,$$

$D(\zeta) = 0$ est remplacée par l'équation de Moutard

$$(13) \quad M(Z) = Z_{uv} - \frac{\omega_{uv}}{\omega} Z = 0.$$

On doit à Darboux d'avoir ramené la solution du problème de la représentation sphérique à l'intégration de l'équation différentielle (13)⁽¹⁾. Mais son interprétation géométrique qui s'appuie sur l'introduction des coordonnées sphériques complexes de Bonnet, nous semble moins évidente et plus artificielle que la nôtre.

16. On remarque que les coefficients de l'équation différentielle $D(\zeta) = 0$ (ou de $M(Z) = 0$) dépendent exclusivement de l'angle ϑ et non de la quantité $\overset{\circ}{\zeta}$ (ou de $\overset{\circ}{Z}$), qui d'après la formule (12) est elle-même une intégrale de $D(\overset{\circ}{\zeta}) = 0$ (ou de $M(\overset{\circ}{Z}) = 0$). Il s'ensuit donc que $D(\zeta) = 0$ donne les solutions d'une série infinie de problèmes de représentation sphérique, problèmes qu'on obtient tous en déterminant un système orthogonal

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. IV, Paris (1898), pp. 169-170.

de courbes $\mathbf{n}(u, v)$ sur la sphère de rayon 1 par la projection stéréographique d'un système de courbes planes déterminé par une intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle (11). Nous dirons que tout problème de représentation sphérique de cette série infinie est lié à la fonction $\vartheta(u, v)$, où ϑ est l'angle tangent des courbes $v = \text{const.}$ du système de courbes planes, obtenu par projection stéréographique du système donné de courbes sphériques.

17. Soient

$$z_1 = X_1 + iY_1, \quad z_2 = X_2 + iY_2$$

deux intégrales particulières de l'équation différentielle (11) et soient $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ les deux vecteurs dont les composantes respectives sont X_1, Y_1 et X_2, Y_2 .

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{ \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 - \mathbf{p} \}_c, \\ \mathbf{n} - \mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{X}_2 - \mathbf{p}}{2} \right)^{-1}, \\ \mathbf{x}^* &= \{ \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1 - \mathbf{p} \}_c, \\ \mathbf{n}^* - \mathbf{p} &= \left(\frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{p}}{2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

c étant une constante arbitraire, la surface $\mathbf{x}(u, v)$ est d'après les équations (8) et (9) une solution du problème de la représentation sphérique lié au système orthogonal de courbes sphériques $\mathbf{n}(u, v)$, tandis que la surface $\mathbf{x}^*(u, v)$ est une solution du problème lié au système $\mathbf{n}^*(u, v)$.

Or on peut se poser la question de savoir quel est le rapport entre les deux surfaces $\mathbf{x}(u, v)$ et $\mathbf{x}^*(u, v)$. En s'appuyant sur le théorème 3 du § 7, I, on vérifie par un calcul assez simple qu'on a

$$(14) \quad (\mathbf{x}^* - \mathbf{n}^*)^{-1} = \frac{\mathbf{m} - \mathbf{p}}{2} - (\mathbf{x} - \mathbf{n})^{-1}$$

\mathbf{m} étant le vecteur normal de la surface $(\mathbf{x} - \mathbf{n})^{-1}$. L'interprétation géométrique de l'équation (14) montre que les deux surfaces

$$(\mathbf{x}^* - \mathbf{n}^*)^{-1} \quad \text{et} \quad (\mathbf{x} - \mathbf{n})^{-1}$$

sont des surfaces parallèles au sens strict du mot (v. la définition à la fin du § 1, I).

18. Quand on a deux vecteurs $\mathbf{X}(u, v), \mathbf{Y}(u, v)$ situés dans le plan π et représentant deux systèmes orthogonaux de courbes planes parallèles entre eux, on peut définir le symbole

$$\widehat{\mathbf{X}}(u, v) = \{ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \}_c = \mathbf{X} - 2 \left(c + \int_{u_0}^{uv} \mathbf{Y} d\mathbf{X} \right) \mathbf{Y}^{-1},$$

puisque $\mathbf{Y}d\mathbf{X}$ est une différentielle totale. Nous disons que le système de courbes planes $\widehat{\mathbf{X}}(u, v)$, qui est un système orthogonal, se déduit du système $\mathbf{X}(u, v)$ par une transformation plane de Ribaucour. Pour interpréter géométriquement cette transformation, on part du fait qu'on peut toujours déterminer deux fonctions $R_1(u, v)$, $R_2(u, v)$ de manière qu'on ait

$$(15) \quad \begin{cases} \mathbf{X} + R_1 \mathbf{N}_1 = \widehat{\mathbf{X}} + R_1 \widehat{\mathbf{N}}_1 \\ \mathbf{X} + R_2 \mathbf{N}_2 = \widehat{\mathbf{X}} + R_2 \widehat{\mathbf{N}}_2 \end{cases}$$

\mathbf{N}_1 et $\widehat{\mathbf{N}}_1$ étant les vecteurs normaux respectifs des courbes $v = \text{const.}$ des systèmes $\mathbf{X}(u, v)$ et $\widehat{\mathbf{X}}(u, v)$, \mathbf{N}_2 et $\widehat{\mathbf{N}}_2$ les vecteurs normaux respectifs des courbes $u = \text{const.}$ des systèmes $\mathbf{X}(u, v)$ et $\widehat{\mathbf{X}}(u, v)$. Les formules (15) montrent que deux courbes correspondantes $u = \text{const.}$ (ou $v = \text{const.}$) des systèmes $\mathbf{X}(u, v)$ et $\widehat{\mathbf{X}}(u, v)$ peuvent être regardées comme les deux branches de l'enveloppe d'une famille de cercles.

19. On reconnaît facilement que le symbole $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}_c$ a une signification double, ainsi que le symbole $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}_c$. (v. le théorème 1 du § 4, I).

THÉORÈME 1^{bis}. Si dans le symbole $\widehat{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}_c$, en conservant \mathbf{X} , on fait parcourir à c toutes les valeurs constantes arbitraires et à $\mathbf{Y}(u, v)$ tous les systèmes de courbes planes parallèles au système $\mathbf{X}(u, v)$, on obtient tous les systèmes de courbes $\widehat{\mathbf{X}}(u, v)$ transformés de Ribaucour du système $\mathbf{X}(u, v)$.

Si au contraire, en conservant $\mathbf{Y}(u, v)$ on fait parcourir à c toutes les valeurs constantes arbitraires et à $\mathbf{X}(u, v)$ tous les systèmes de courbes planes parallèles au système $\mathbf{Y}(u, v)$, on obtient tous les systèmes de courbes planes $\widehat{\mathbf{X}}(u, v)$ parallèles au système $\mathbf{Y}^{-1}(u, v)$.

20. On peut faire usage de l'interprétation géométrique du symbole $\widehat{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}, \mathbf{N}\}_c$ pour mettre en relation un théorème connu de Moutard et la transformation plane de Ribaucour, définie dans le § 18. Soit $\tilde{\gamma} = X + iY$ l'intégrale générale de l'équation différentielle (11) $D(\tilde{\gamma}) = 0$ et $\tilde{\gamma} = \hat{X} + i\hat{Y}$ une intégrale particulière de $D(\tilde{\gamma}) = 0$, \hat{X} , \hat{Y} étant les deux composantes du vecteur plan \mathbf{N} .

$$Z = \omega\tilde{\gamma} \quad , \quad \hat{Z} = \omega\hat{\gamma}$$

sont alors les intégrales générales ou particulières de l'équation de Moutard (13).

Posons

$$\hat{\omega} = -\omega \frac{\bar{\hat{Z}}}{\hat{Z}} = -\omega \frac{\bar{\tilde{\gamma}}}{\tilde{\gamma}} = e^{-i\vartheta}$$

$\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}$ etc. étant les quantités conjuguées complexes de $\omega, \bar{\omega}$, etc. Si l'on désigne par $\widehat{D}(\widehat{\bar{\omega}}) = 0$, $\widehat{M}(\widehat{Z}) = 0$ les équations aux dérivées partielles, qu'on obtient en substituant $\widehat{\bar{\omega}}$ à ω dans les équations $D(\bar{\omega}) = 0$ et $M(Z) = 0$, on a

$$\widehat{D}\left(\frac{1}{\widehat{\bar{\omega}}}\right) = 0, \quad \widehat{M}\left(\frac{1}{\widehat{Z}}\right) = 0.$$

En outre, on observera que $\frac{1}{\widehat{\bar{\omega}}} = \frac{\bar{\bar{\omega}}}{\bar{\omega}}$ détermine le système de courbes planes $N^{-1}(u, v)$.

On doit à Moutard une formule connue pour l'intégrale générale \widehat{Z} de l'équation $\widehat{M}(\widehat{Z}) = 0$ (1)

$$\widehat{Z} = \frac{1}{\widehat{Z}} \left(2c + \int_{u_0 v_0}^{uv} (\widehat{Z} Z_u - Z \widehat{Z}_u) du - (\widehat{Z} Z_v - Z \widehat{Z}_v) dv \right).$$

On en déduit immédiatement que

$$(16) \quad \widehat{\bar{\omega}} = -\frac{1}{\widehat{\bar{\omega}}} \left(2c + \int_{u_0 v_0}^{uv} (\widehat{\bar{\omega}} \bar{\bar{\omega}}_u - \bar{\bar{\omega}} \widehat{\bar{\omega}}_u) du + (\widehat{\bar{\omega}} \bar{\bar{\omega}}_v - \bar{\bar{\omega}} \widehat{\bar{\omega}}_v) dv \right)$$

est l'intégrale générale de $\widehat{D}(\widehat{\bar{\omega}}) = 0$.

En se référant à l'équation $\widehat{D}\left(\frac{1}{\widehat{\bar{\omega}}}\right) = 0$, on reconnaît d'après les développements du § 14, que l'intégrale générale $\widehat{\bar{\omega}} = \widehat{X} + i\widehat{Y}$ détermine tous les systèmes de courbes planes parallèles au système $N^{-1}(u, v)$. Or suivant le théorème 1^{bis} du § 19 on a

$$(17) \quad \widehat{X} = \{X, N\}_c$$

pour tous les systèmes parallèles au système N^{-1} . Donc, \widehat{X} et \widehat{Y} étant les deux composantes du vecteur plan \widehat{X} , la formule (16) de Moutard pour $\widehat{\bar{\omega}} = \widehat{X} + i\widehat{Y}$ donne le même résultat que la formule (17) de la transformation de Ribaucour. Du reste, on vérifie par un calcul facile que les deux équations (16) et (17) se transforment l'une dans l'autre. Donc, dans le cas de la représentation sphérique, la formule de Moutard peut être interprétée comme une transformation plane de Ribaucour.

(1) V. p. ex. DARBOUX, loc. cit., vol. II, 2^{ième} édit., Paris (1914), pp. 158-160.

Matematica. (Geometria). — *Encore sur les invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$).*
Nota ⁽¹⁾ di V. HLAVATÝ, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Cette Note constitue dans un certain sens la suite de la Note publiée dans ce périodique ⁽²⁾. Nous y voulons introduire avant tout explicitement les invariants I_2, \dots, I_n pour en construire après l'expression $L = L(I)$ qui nous servira dans la troisième Note à la recherche de l'arc projectif d'une courbe générale.

1. En tenant compte des propriétés des invariants I_q , citées à la fin de I, on constate facilement que l'invariant $I_q(a)$ doit contenir avant tout les produits tels que

$$a_{m_1}^{r_1} a_{m_2}^{r_2} \cdots a_{m_s}^{r_s},$$

où

$$\sum_i m_i r_i = q,$$

ainsi que les produits tels que

$$a'_k a_{m_{k1}}^{r_{k1}} a_{m_{k2}}^{r_{k2}} \cdots a_{m_{ks}}^{r_{ks}} a_{m_{ks}}^{r_{ks}},$$

où

$$k = 1, \dots, q-1, \quad \sum_i m_{ki} r_{ki} = q - k - 1.$$

Il n'y a d'autres expressions qui pourraient intervenir dans la construction de l'invariant I_q . Or, en désignant par c les constantes à calculer, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_q(a) = & a_q + \sum_s a_{m_1}^{r_1} a_{m_2}^{r_2} \cdots a_{m_s}^{r_s} c_{m_1 \dots m_s} + \\ & + \sum_k^{q-1} \left(a'_k \sum_i a_{m_{k1}}^{r_{k1}} a_{m_{k2}}^{r_{k2}} \cdots a_{m_{kt}}^{r_{kt}} c_{m_{k1} \dots m_{kt}} \right) \end{aligned}$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1932.

(2) *Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$).* « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. XVI, serie 6^a, p. 109, citée simplement I. Quant à la dénomination, voir I.

avec

$$\sum_i^s m_i r_i = q, \quad \sum_i^t m_{ki} r_{ki} = q - k - 1.$$

Les constantes c résultent de l'identité

$$(I) \quad I_q(a) \equiv (a_0 + P_0)_q + \sum_2^q [(a_0 + P_0)_{m_1}]^{r_1} [(a_0 + P_0)_{m_2}]^{r_2} \cdots [(a_0 + P_0)_{m_s}]^{r_s} c_{m_1} \cdots m_s \\ + \sum_k^{q-1} \left\{ [(a_0 + P_0)_k] \sum_t^{q-k-1} [(a_0 + P_0)_{m_{k1}}]^{r_{k1}} [(a_0 + P_0)_{m_{k2}}]^{r_{k2}} \cdots [(a_0 + P_0)_{m_{kt}}]^{r_{kt}} c_{m_{k1}} \cdots m_{kt} \right\}$$

En tenant compte de ce q'en raison de I(5) et I(9)

$$*a_q = \sum_j^q \binom{q}{j} a_{q-j} P_j \\ *a'_{q-1} = \sum_j^{q-1} \binom{q-1}{j} a'_{q-1-j} P_j + \sum_j^{q-1} \binom{q-1}{j} a_{q-1-j} (P_{j+1} - P_j P_j),$$

on constate facilement qu'il n'y a que deux coefficients (à savoir a_q et a'_{q-1}) qui interviennent dans I_q et entraînent en même temps dans (1) l'expression P_q . Il s'ensuit que l'invariant I_q est nécessairement de la forme

$$(2) \quad I_q = a_q - a'_{q-1} + \cdots$$

où les membres omis (du poids q) ne contiennent ni a_q ni a'_{q-1} .

En procédant de cette manière on obtient

$$I_2 = a_2 - a'_1 - a_1^2 \\ I_3 = a_3 - a'_2 + 2a_1 a'_1 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3$$

et ainsi de suite.

Remarque: Le nombre des équations déduites de (1) pour les constantes c dépasse en général le nombre de ces constantes. Mais l'existence des invariants I_q étant démontrée, ces équations doivent être à fortiori compatibles.

2. La formule (2) nous apprend que les invariants I_2, \dots, I_n sont linéairement indépendants. Or, ces invariants étant donnés, on en peut calculer pas à pas les coefficients a_2, \dots, a_n en fonction de a_1 (et de ses dérivées). Cela étant, prenons pour a_1 n'importe quelle fonction (holomorphe) et envisageons le système

$$(3) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + \binom{n}{1} a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \binom{n}{2} a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \cdots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

dont l'intégrale générale soit x . D'après ce que nous avons dit plus haut le changement de a_1 en $*a_1$ d'après

$$*a_1 = a_1 + P_1 \quad \left(P_1 = \frac{dp}{dt} : p \right)$$

a pour conséquence le changement de a_h en $*a_h$ d'après I(6) (tandis que les I_2, \dots, I_n ne changent pas) et le système différentiel correspondant

$$(3^*) \quad \frac{d^n *x}{dt^n} + \binom{n}{1} *a_1 \frac{d^{n-1} *x}{dt^{n-1}} + \binom{n}{2} *a_2 \frac{d^{n-2} *x}{dt^{n-2}} + \dots + \binom{n}{1} *a_{n-1} \frac{d *x}{dt} + *a_n *x = 0$$

a pour l'intégrale $*x$ donnée par

$$x = p *x.$$

Nous sommes ainsi parvenus au théorème suivant:

Théorème I: Les invariants I_2, \dots, I_n (exprimés en fonction du paramètre arbitraire t) déterminent complètement⁽¹⁾ une courbe dans P_{n-1} dont le point mobile a pour coordonnées homogènes x_u ($u = 1, \dots, n$), l'intégrale générale du système (3). Le changement de la fonction arbitraire a_1 en $*a_1$ d'après

$$*a_1 = a_1 + f(t)$$

(f étant n'importe quelle fonction du paramètre t) a pour conséquence le changement de x en $*x$ d'après

$$*x = x e^{-\int f dt} \text{ const.}$$

Ce théorème sera notre point de départ pour la recherche des courbures projectives et de l'arc projectif d'une courbe générale dans P_{n-1} . C'est ce que nous ferons dans la troisième Note. Pour le moment nous servirons des invariants I_2, \dots, I_{n-1} , pour en construire l'expression L , mentionnée plus haut.

3. Supposons tout d'abord que n soit pair ($n > 2$). Le cas échéant l'ensemble des coefficients constants

$$c_{ij} = -c_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

au déterminant $\neq 0$ définit un « système nul ». Nous entendons par cela l'ensemble des droites qui en passant par le point général x de l'espace P_{n-1} , sont situées en même temps dans l'hyperplan ξ corrélatif au point x :

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

(1) Plus précisément: Complètement à moins des transformations homographiques générales aux coefficients constants.

Nous dirons qu'une courbe appartient au système nul si ses tangentes lui appartiennent. Cherchons maintenant la condition nécessaire pour qu'une courbe générale appartienne à un système nul. En introduisant les symboles

$$[u, v] = \sum_{i,j}^n c_{ij} \frac{d^u x_i}{dt^u} \frac{d^v x_j}{dt^v}$$

on voit qu'une telle courbe satisfait à l'équation

$$s_0 = [0, 1] = 0$$

qui contient $\binom{n}{2}$ constantes homogènes $c_{ij} = -c_{ji}$ à éliminer. Nous effectuerons cette élimination en substituant les valeurs de c tirées de

$$s_0 = 0, \quad s_1 \equiv \frac{ds_0}{dt} = 0, \dots, s_{\binom{n}{2}-2} \equiv \frac{d^{\binom{n}{2}-2} s_0}{dt^{\binom{n}{2}-2}} = 0$$

dans

$$s_{\binom{n}{2}-1} \equiv \frac{d^{\binom{n}{2}-1} s_0}{dt^{\binom{n}{2}-1}} = 0$$

qui devient ainsi à fortiori une identité. Evidemment les premières $n-1$ équations sont de la forme

$$(4) \quad s_{w-1} = [0, w] + \sum_{u,v}^{w-1} m_{uv} [u, v] = 0$$

où

$$w = 1, \dots, n-1, \quad u, v = 1, \dots, w-1, \quad u+v=w$$

et m sont des constantes numériques faciles à trouver. La n -ième équation est en raison de (3) de la forme

$$(5) \quad s_{n-1} \equiv -[0, n-1] n a_1 + \sum g_{0uv} [u, v] = 0$$

où

$$u, v = 0, \dots, n-1; \quad u+v \leq n$$

et les g sont cette fois des fonctions des coefficients a_2, \dots, a_n qui ne contiennent pas a_1 . En tenant compte de l'équation (3) on trouve que les g sont en même temps des fonctions entières et rationnelles des coefficients mentionnés. Si l'on désigne par p_{uv} le poids de g_{0uv} on doit avoir

$$p_{uv} + u + v = n$$

car s_{n-1} est une fonction isobare du poids n . Analogiquement on obtient

$$(6) \quad s_n \equiv -[0, n-1] n a'_1 + \sum g_{1uv} [u, v] = 0$$

avec

$$u, v = 0, \dots, n-1 \quad ; \quad u + v \leq n + 1$$

où les fonctions entières et rationnelles g des coefficients a ne contiennent pas a'_1 . En poursuivant ce procédé jusqu'à la fin on obtient

$$(7) \quad s_{\binom{n}{2}-1} \equiv -[0, n-1] n \frac{d^N a_1}{dt^N} + \sum g_{Nuv} [u, v] = 0$$

avec

$$u, v = 0, \dots, n-1 \quad u + v \leq N + n = \binom{n}{2}, \quad N = \binom{n}{2} - 1 - (n-1) = \frac{n(n-3)}{2},$$

où les fonctions entières et rationnelles g des coefficients a ne contiennent pas $\frac{d^N a_1}{dt^N}$. Or ce n'est qu'une fois qu'intervient $\frac{d^N a_1}{dt^N}$ dans les équations (4) — (7), à savoir dans la dernière et de plus elle est multipliée par $-n[0, n-1]$. Dans ce qui suit nous supposons

$$[0, n-1] \neq 0,$$

ce qui ne restreint pas évidemment la généralité du problème, car cette inégalité reste satisfaite même si l'on effectue le changement général du facteur (I, 3). D'autre part, l'élimination des constantes homogènes $c_{ij} = -c_{ji}$ équivaut manifestement à l'élimination des symboles homogènes $[u, v]$ ($u, v = 0, \dots, n$) de (4) — (7). D'après ce que nous venons de constater sur la structures des équations (4) — (7), cette élimination peut s'effectuer en exprimant avant tout les symboles en question moyennant $[0, n-1]$ (ce qui n'exige que les équations (4) — (6)) et en substituant ces valeurs dans la dernière équation, c'est-à-dire dans (7). On obtient ainsi au lieu de (7)

$$(8) \quad [0, n-1] J(a) = 0,$$

où J est une fonction des coefficients a :

$$(9) \quad J(a) = -n \frac{d^N a_1}{dt^N} + \dots \left(N = \frac{n(n-3)}{2} \right).$$

Ici les membres omis ne contiennent plus $\frac{d^N a_1}{dt^N}$. Or la condition nécessaire pour qu'une courbe appartienne au système nul est

$$(10) \quad J(a) = 0.$$

Cette propriété géométrique ne dépend ni du changement du facteur ((3) I) ni du choix spécial du paramètre, ainsi que l'équation (10) est non

seulement invariante par rapport à ((3) I), mais aussi par rapport au changement du paramètre. Envisageons tout d'abord l'invariance envers ((3) I). On doit donc avoir avant tout pendant la transformation ((3) I)

$$J(*a) = J(a) F,$$

où F est un facteur à déterminer. En tenant compte de l'équation

$$\frac{d^N *a_1}{dt^N} = \frac{d^N a_1}{dt^N} + \frac{d^N P_1}{dt^N}$$

(qui est la conséquence de (I, (5)₁) et de (9), on trouve

$$F = 1.$$

Il s'ensuit que J est invariant par rapport au changement du facteur

$$J(*a) = J(a).$$

D'autre part, nous savons (Théorème I) que les invariant I_2, \dots, I_n caractérisent complètement⁽¹⁾ une courbe dans P_{n-1} (même si elle appartient à un système nul). Il s'ensuit que l'on a nécessairement

$$J(a) = L(I_2, \dots, I_n)$$

et en particulier que J est une fonction de

$$\frac{d^{N-1} I_2}{dt^{N-1}}.$$

Parce que $s_{\binom{n}{2}-1}$ est isobare du poids $\binom{n}{2}$ et de plus

$$s_{\binom{n}{2}-1} = [0, n-1] L,$$

il s'ensuit que L est isobare du poids $N+1 = \binom{n-1}{2}$.

La condition nécessaire pour qu'une courbe appartienne à un système nul dans P_{n-1} (pour n pair) est $L=0$, où L est un invariant isobare du poids $\binom{n-1}{2}$.

Si la courbe en question n'appartient à aucun système nul, on a $s_0 \neq 0$ et par conséquent aussi $L \neq 0$.

Dans la Note qui suivra nous tiendrons compte de ce résultat pour trouver l'arc projectif ainsi que les courbures projectives de la courbe en question.

(1) Loc. cit.

Matematica. — *Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue.* — III. *Funzioni periodiche.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata ⁽¹⁾ dal corrisp. G. A. CROCCO.

1. *Integrazione delle funzioni periodiche.* — Senza restrizione della generalità possiamo supporre che un periodo della funzione considerata coincida con l'intervallo $(0, c - 0)$, oppure con quello $(-c, c - 0)$; se nel detto intervallo è $y = f(x)$ la sua espressione analitica, come espressione della funzione periodica corrispondente si ha

$$(1) \quad y = f(c \text{Fr}(x|c)) \quad , \quad y = f(cR(x|c; i)).$$

Supponiamo pure che $f(x)$ sia priva di punti isolati, continua a destra e integrabile, cosicchè, anche se in successivi intervalli di uno stesso periodo abbia espressioni analitiche diverse ⁽²⁾; si possa per l'intervallo corrispondente ad un intero periodo, assegnare di essa l'integrale con i metodi esposti nella Nota precedente.

Le funzioni periodiche di questo tipo possono, nei riguardi della integrazione, essere distinte in due classi diverse secondo che il loro integrale esteso ad un intero periodo: *a)* ha il valore zero; *b)* è diverso da zero.

Per le funzioni della prima classe l'integrale è anch'esso una funzione periodica che riprende il valore zero all'estremo di ogni periodo; cosicchè se è $Y = F(x)$ l'integrale della funzione data $y = f(x)$, con il valore zero ai due estremi del periodo, l'integrale cercato è

$$(2') \quad Y = F[c \text{Fr}(x|c)]$$

$$(2'') \quad Y = F(cR(x|c; -1)).$$

Per le funzioni della seconda classe invece l'integrale non può essere una funzione periodica: tuttavia esso si può risolvere nella somma di una funzione periodica e di una costante discontinua, periodicamente variabile, la cui variazione, nell'estremo destro del periodo, è uguale al valore ω dell'integrale esteso ad un periodo. Si ha perciò come integrale ⁽³⁾.

$$(3) \quad Y = F(c \text{Fr}(x|c)) + \omega I(x|c) + C$$

$$(4) \quad Y = F(cR(x|c; -1)) + \omega I(x|2c) + C$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1932.

(2) Per la rappresentazione in forma finita delle funzioni periodiche di questa specie si veda la mia Nota «R. C.», vol. XXXII, aprile 1923, pp. 381-385 e più diffusamente l'altro mio scritto «Elettrotecnica», vol. XI, 1924, nn. 19, 20, 21, in nessuno dei quali è però ancora fatto uso del simbolo R_x per la funzione di Riemann.

(3) La (3) è stata già indicata in una mia comunicazione al Congresso dei Matematici (Bologna, 1928), vol. IV, pp. 221-231.

e si scorge che qui la funzione periodicamente variabile sta per il gruppo delle costanti interne.

Qui appresso indicheremo gl'integrali delle forme fondamentali delle funzioni periodiche, e cioè delle funzioni poligonali, dell'una e dell'altra classe.

2. *Caratteristiche delle funzioni poligonali.* — Poichè le funzioni poligonali qui considerate hanno un valore costante o variano linearmente negli intervalli nei quali sono continue, e qui supponiamo che siano continue a destra, le loro derivate, che sono nulle o hanno anch'esse valori costanti nei detti intervalli, non bastano a definirle completamente; occorre perciò conoscere il valore del salto nei punti di discontinuità e della variazione di direzione, rotazione della tangente, nei punti angolosi.

Si può incorporare nella espressione della derivata l'indicazione del salto, che è uguale alla variazione V della funzione nel punto di discontinuità, scrivendo per la derivata

$$(5) \quad y' = \frac{Vy + dy}{dx}.$$

Questa espressione coincide con quella ordinaria della derivata nei punti dove la funzione è continua, ($Vy = 0$) e prende invece la forma $\frac{Vy + 0}{0}$ indicando con la parte non nulla Vy del numeratore il valore salto nei punti di discontinuità. Così ad esempio per le due funzioni:

$$(6) \quad y = \text{sem sgn}(x; 1) \quad , \quad y = (1 + x) \text{ sem sgn}(x; 1)$$

si possono scrivere le derivate in tal modo completate

$$(7) \quad y' = \text{Punt } x (\text{sgn}^2 x)^{-1} \quad , \quad y' = \text{sem sgn}(x; 1) (\text{sgn}^2 x)^{-1}$$

che valgono anche per il punto di discontinuità, indicando in esso col loro numeratore ($= 1$) il valore del salto.

Nei punti angolosi la rotazione della tangente è definita dalla differenza fra la derivata destra D_d e quella sinistra D_s ossia dalla variazione della derivata Vy' che è nulla nell'interno degli intervalli nei quali la funzione è continua. Così per la funzione $y = x \text{ sgn } x$ si ha

$$(8) \quad Vy' = D_d - D_s = 2 \text{ Punt } x.$$

Per definire completamente le funzioni poligonali occorre perciò di esse conoscere la derivata completata, secondo la (5) e la variazione della derivata secondo la (8).

3. *Funzioni periodiche della prima classe.* — Sono funzioni periodiche il cui integrale esteso a tutto il periodo è nullo, le funzioni poligonali elementari: $\text{Fal}(x; |i|)$, $\text{Falint}(x; |i|)^{(1)}$, $\text{R}(x; |i|)$, $\text{Plg } x$.

Le prime tre di queste funzioni sono continue soltanto a destra e presentano dei punti di discontinuità nei quali la derivata sinistra diventa infinita; la quarta è continua ma presenta dei punti angolosi nei quali si ha una variazione della derivata, differenza fra la derivata destra e quella sinistra.

Qui appresso indicando per brevità con y la funzione, con y' la sua derivata, con D_d, D_s la derivata destra e sinistra, completata quest'ultima con il valore dei salti se occorre, con $V = V_d + V_s$ la variazione locale, che rappresenta il saldo nei punti di discontinuità, con Vy' la variazione della derivata, con SVy la sommazione dei salti, daremo di ogni funzione gli elementi necessari a definirla, insieme l'integrale di essa.

$$(9) \quad \text{Fal}(x; |i|) \cdot - Vy = 2 \text{ Punt Fr } x \text{ Plg } 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$D_d y = 0, \quad D_s y = 2 \text{ Punt Fr } x \text{ Plg } 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (\text{sgn Fr } x)^{-1}$$

$$SVy = 1 + \text{Fal}(x; |i|), \quad \int y dx = \text{Plg } x \text{ Fal}(x; 2; |i|)$$

$$(10) \quad \text{Falint}(x; |i|) \cdot - Vy = \text{Punt Fr } x \text{ Fal} \left(\frac{x + 1}{2}; |i| \right)$$

$$D_d y = 0, \quad D_s y = \text{Punt Fr } x \text{ Fal} \left(\frac{x + 1}{2}; |i| \right) (\text{sgn Fr } x)^{-1}$$

$$SVy = \text{Falint } x, \quad \int y dx = \text{Trap} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$(11) \quad \text{R}(x; |i|) \cdot - Vy = -2 \text{ Punt R}(x + 1; |i|), \quad D_d y = 1$$

$$D_s y = \{ \text{sgn}^2 \text{R}(x + 1; |i|) - 2 \text{ Punt R}(x + 1; |i|) \} [\text{sgn}^2 \text{R}(x + 1; |i|)]^{-1}$$

$$\int y dx = \frac{1}{2} (\text{R}(x; |i|))^2$$

$$(12) \quad \text{Plg } x \cdot - D_d y = \text{Fal}(x; |i|), \quad D_s y = \text{Fal}(x; |i|)$$

$$Vy' = 2 \text{ Plg } x \text{ Punt Plg}(x + 1)$$

$$\int y dx = \frac{1}{2} \left\{ [\text{R}(x; |i|)^2 - 1] \text{ Fal} \left(\frac{x + 1}{2} \right) \right\}.$$

(1) Indico con $\text{Falint } x$ il fattore alternante intermittente che prende in ogni periodo i valori 1, 0, -1, 0.

4. *Funzioni periodiche della seconda classe.* — Sono funzioni periodiche il cui integrale esteso a tutto il periodo è diverso da zero e che quindi danno luogo ad una costante interna periodicamente variabile: $\text{Fint } x$, $\text{Fr } x$, $\text{Cm } x$, $\text{R}(x; |i) \text{sgn R}(x; |i) = \text{Plg } x \text{Fal}(x | 2; |i)^{(1)}$.

Con le notazioni del paragrafo precedente si ha per queste funzioni:

$$(13) \quad \text{Fint}(x; |i) \cdot - \forall y = \text{Punt Fr } x \text{Plg}(2x - 1)$$

$$D_d y = 0, \quad D_s y = \text{Punt Fr } x \text{Plg}(2x - 1) (\text{sgn Fr } x)^{-1}$$

$$\text{SV} y = \text{Fint}(x; |i), \quad \int y dx = \text{Fint } x \text{Fr } x + \text{I}(x + 1)/2$$

$$(14) \quad \text{Fr } x \cdot - \forall y = - \text{Punt Fr } x$$

$$D_d y = 1, \quad D_s y = (1 - 2 \text{Punt Fr } x) (\text{sgn Fr } x)^{-1}$$

$$\int y dx = \frac{1}{2} (\text{Fr } x)^2 + \frac{1}{2} \text{I} x$$

$$(15) \quad \text{Cm } x \cdot - \forall y = \text{Punt Fr } x, \quad D_d y = 1, \quad D_s y = - (\text{sgn Fr } x)^{-1}$$

$$\int y dx = \text{Fr } x - \frac{1}{2} (\text{Fr } x)^2 + \frac{1}{2} \text{I} x$$

$$(16) \quad \text{R}(x; |i) \text{Fal}(x; |i) \cdot - D_d y = \text{Fal}(x; |i)$$

$$D_s y = \text{Fal}(x; |i), \quad \forall y' = 2 \text{Punt Fr } x \text{Plg}(2x - 1)$$

$$\int y dx = \frac{1}{2} (\text{R}(x + 1; |i))^2 \text{Fal}(x; |i) + \text{I} x / 2.$$

(1) È questa la poligonoide raddrizzata cioè (10) § 3 l'integrale di $\text{Fal } x$.

Matematica. — *Tensori emisimmetrici coniugati.* Nota⁽¹⁾ di
MARIA PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota pubblicata nella « *Physikalische Zeitschrift* » del 1928⁽²⁾, il prof. K. Hattori pone le basi di una teoria unitaria gravitazionale ed elettromagnetica fondandosi sull'ipotesi seguente: alla V_4 riemanniana si sostituisca una varietà di egual elemento lineare ma di diversa connessione, ed i parametri di tale connessione si costruiscano come i simboli di Christoffel, servendosi però, invece che dei coefficienti a_{ik} della metrica, delle componenti di un generale tensore doppio, la cui parte simmetrica coincide con a_{ik} .

Le equazioni di campo che ottiene non si presentano però sotto la forma ordinaria, ma vengono ridotte ad essa mediante un'ingegnosa trasformazione, basata su due proposizioni relative a tensori emisimmetrici. Per esse ad ogni tensore triplo emisimmetrico di V_4 si può far corrispondere un vettore e ad ogni tensore doppio un altro tensore doppio con le componenti proporzionali.

Non credo privo di interesse il mostrare come le due proposizioni ricordate rientrino in una più generale, che si ottiene immediatamente con la considerazione del tensore ϵ . Per essa ad ogni tensore emisimmetrico $(n-m)^{plo}$ di una varietà ad n dimensioni si può far corrispondere un tensore m^{plo} con le componenti proporzionali. Li chiamo *tensori coniugati*. Tale proposizione permette di riguardare sotto un duplice aspetto ogni equazione relativa a tensori emisimmetrici, e ciò, come ha mostrato K. Hattori nel caso considerato, può avere interesse anche dal lato fisico.

Mi propongo poi di mostrare come la considerazione sistematica dei tensori coniugati permetta di far discendere da un'unica proposizione proprietà su tensori emisimmetrici, contenuti nella citata Nota di K. Hattori, o conosciute per altra via.

Per ragioni di spazio, rimando la dimostrazione di tale proposizione ad una seconda Nota.

In questa mi limito ad introdurre la nozione di tensori coniugati e a dimostrare che, a meno eventualmente del segno, la relazione di coniugio è reciproca.

Nella Nota seguente darò, per un tensore qualunque, la nozione di rotore completo (che si ottiene per contrazione dal rotore di un tensore, come venne introdotto dal prof. Cisotti) e ne metterò in evidenza due notevoli proprietà. Mostrerò poi che, a meno di un fattore numerico, la di-

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1932.

(2) K. HATTORI, *Ueber eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität* (« *Phys. Zeitschrift* », Bd. 29, pp. 538-549).

vergenza di un tensore emisimmetrico coincide col rotore completo del coniugato⁽¹⁾: è questa la proposizione a cui sopra ho accennato.

Indicherò infine come la considerazione dei tensori coniugati si possa estendere anche al caso di tensori dotati di parziali emisimmetrie.

I. — IL CONIUGATO DI UN TENSORE EMISIMMETRICO.

Sia data una varietà riemanniana ad n dimensioni, definita dalla metrica:

$$(1) \quad ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k \quad (2).$$

Consideriamo in essa un tensore emisimmetrico. Per definizione lo scambio di due qualunque indici in una sua componente covariante o controvariante ne muta solamente il segno. Ne discende, come è noto, che sono nulle tutte le componenti con almeno due indici eguali. Ne discende ancora che il numero degli indici di ogni componente dovrà essere $\leq n$ (perchè, se ciò non fosse, almeno due indici sarebbero eguali).

Escludiamo il caso dell'eguaglianza. Consideriamo cioè tensori $(n-1)^{pi}$, $(n-2)^{pi}$, ... ecc.

Facciamo l'osservazione preliminare che in generale, per un tensore emisimmetrico $(n-m)^{pio}$ il numero delle componenti indipendenti è $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$. Esso è eguale cioè al numero delle componenti indipendenti di un tensore emisimmetrico m^{pio} .

Ciò premesso, indicando con $T_{h_1 h_2 \dots h_{n-m}}$ le componenti covarianti di un tensore emisimmetrico \mathbf{T} , chiamiamo suo coniugato il tensore \mathbf{U} che ha le componenti controvarianti definite nel modo seguente:

$$(2) \quad U^{i_1 i_2 \dots i_m} = \frac{1}{(n-m)!} \epsilon^{h_1 h_2 \dots h_{n-m} i_1 i_2 \dots i_m} T_{h_1 h_2 \dots h_{n-m}} = \\ = (-1)^c \frac{T_{k_1 k_2 \dots k_{n-m}}}{\sqrt{a}}$$

dove $k_1 \dots k_{n-m} i_1 i_2 \dots i_m$ è una permutazione dei numeri $1, 2, \dots, n$, e c è un numero pari o dispari secondo che è pari o dispari la classe di tale permutazione.

Il terzo membro della (2) è una conseguenza della definizione del tensore ϵ ⁽³⁾ e della emisimmetria del tensore \mathbf{T} . Basta infatti pensare che,

(1) In una recentissima Nota del prof. CISOTTI è contenuta una formola che esprime questa stessa proposizione per il caso particolare $n=3$, $m=1$ (*Sui tensori doppi a divergenza unica*, questi « Rendiconti », vol. XV, serie 6^a, giugno 1932, pp. 835-839, form. (5)).

(2) Tutti gli indici che si considerano variano da 1 ad n .

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, Stock, 1925), p. 180, oppure dello stesso Autore *The absolute differential Calculus* (London, 1927), p. 158.

nella sommatoria del secondo membro rispetto agli indici $h_1 h_2 \dots h_{n-m}$ i soli termini non nulli sono quelli in cui tali indici hanno i valori $k_1 k_2 \dots k_{n-m}$, nell'ordine scritto, o in un altro ordine qualunque, sono cioè $(n-m)!$, e che lo scambio di due qualunque di questi indici fa mutar segno tanto alla corrispondente componente di ε che a quella di \mathbf{T} e quindi lascia inalterato il loro prodotto.

Osserviamo che la posizione contenuta nelle (2) si potrebbe fare anche per \mathbf{T} tensore qualunque; ma in tal caso nel terzo membro di (2), al posto di una sola componente di \mathbf{T} , si avrebbe quella combinazione lineare delle componenti ad indici diversi che vien chiamata la *parte emisimmetrica del tensore* ⁽¹⁾. E, se il tensore fosse simmetrico, si avrebbe lo zero. Ha quindi solo interesse il caso dei tensori emisimmetrici.

Tornando ad essi, consideriamo in particolare il vettore coniugato di un tensore $(n-1)^{plo}$:

$$(2') \quad U^i = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{h_1 h_2 \dots h_{n-1} i} T_{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} = (-1)^c \frac{T_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}}}{\sqrt{a}}$$

e il tensore doppio coniugato di un tensore $(n-2)^{plo}$:

$$(2'') \quad U^{i_1 i_2} = \frac{1}{(n-2)!} \varepsilon^{h_1 h_2 \dots h_{n-2} i_1 i_2} T_{h_1 h_2 \dots h_{n-2}} = (-1)^c \frac{T_{k_1 k_2 \dots k_{n-2}}}{\sqrt{a}}.$$

Per $n=4$ sono i due casi considerati da K. Hattori ⁽²⁾.

Per le componenti covarianti del tensore \mathbf{U} si ha, ovviamente:

$$(3) \quad \begin{aligned} U_{i_1 i_2 \dots i_m} &= \frac{1}{(n-m)!} \varepsilon_{h_1 h_2 \dots h_{n-m} i_1 i_2 \dots i_m} T^{h_1 h_2 \dots h_{n-m}} \\ &= (-1)^c \sqrt{a} T^{k_1 k_2 \dots k_{n-m}}. \end{aligned}$$

2. — RICHIAMI RELATIVI AL TENSORE ε .

Indichiamo con $\delta_{k_1 k_2 \dots k_s}^{h_1 h_2 \dots h_s}$ le componenti miste di un tensore $(2s)^{plo}$ così definite: tutte le volte che gli indici di covarianza sono tutti distinti tra loro e gli indici di controvarianza coincidono coi primi, presi nello stesso ordine o in un ordine diverso, la corrispondente componente non è nulla, in tutti gli altri casi è nulla. Quando una componente è diversa da zero, essa vale 1 o -1 secondo che $h_1 h_2 \dots h_s$ è una permutazione di classe

(1) Cfr. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, Springer, 1924), p. 25.

(2) Loc. cit., n. 6.

pari o dispari rispetto a $k_1 k_2 \dots k_s$ presa come fondamentale, e cioè secondo che è pari o dispari la classe della sostituzione $\begin{pmatrix} h_1 h_2 \dots h_s \\ k_1 k_2 \dots k_s \end{pmatrix} (1)$.

Si ha allora per il tensore ϵ la seguente identità:

$$(4) \quad \epsilon^{h_1 k_2 \dots h_{n-m} i_1 i_2 \dots i_m} \epsilon_{k_1 k_2 \dots k_{n-m} i_1 i_2 \dots i_m} = m! \delta_{k_1 k_2 \dots k_{n-m}}^{h_1 h_2 \dots h_{n-m}} \quad (2)$$

di cui rileviamo il caso particolare:

$$(4') \quad \epsilon^{h_1 \dots h_{n-1} i} \epsilon_{k_1 \dots k_{n-1} i} = \delta_{k_1 \dots k_{n-1}}^{h_1 \dots h_{n-1}} \quad (3).$$

3. — RECIPROCIÀ TRA TENSORI CONIUGATI.

Osserviamo i primi e terzi membri di (2) e (3). Da essi si può dedurre che, a meno eventualmente del segno, il coniugato del coniugato coincide col tensore primitivo. Allo stesso risultato si giunge, in modo più espressivo e completo, servendosi dei secondi membri di (2) e (3).

Incominciamo dal caso particolare di un vettore, coniugato di un tensore $(n-1)^{plo}$, e costruiamone il tensore coniugato. Si ha, per (4'):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{ik_1 \dots k_{n-1}} U^i &= \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{ik_1 \dots k_{n-1}} \epsilon^{h_1 \dots h_{n-1} i} T_{h_1 \dots h_{n-1}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \epsilon_{k_1 \dots k_{n-1} i} \epsilon^{h_1 \dots h_{n-1} i} T_{h_1 \dots h_{n-1}} \quad (4) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta_{k_1 \dots k_{n-1}}^{h_1 \dots h_{n-1}} T_{h_1 \dots h_{n-1}} = (-1)^{n-1} T_{k_1 \dots k_{n-1}} \end{aligned}$$

(1) I simboli $\delta_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_s}$ sono le δ di Kroneker generalizzate (cfr. O. VEBLEN, *Invariants of quadratic differential forms*, London, 1927, p. 3). È facile verificarne il carattere tensoriale che, del resto, risulta dalla (4).

Esse sono legate alle unità nel prodotto d'ordine s , introdotte dal prof. B. Finzi per il calcolo dei sistemi multipli (cfr. B. FINZI, *Calcolo dei sistemi multipli. Derivazione isotropa*, questi «Rendiconti», vol. XII, serie 6^a, 1930, pp. 631-639) dalla formola seguente:

$$\delta_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_s} = S_{h_1 \dots h_s} \delta_{h_1 \dots h_s k_1 \dots k_s} \text{ dove col simbolo } S \text{ si indica una somma di } s! \text{ termini}$$

corrispondenti a tutte le permutazioni degli indici $h_1 h_2 \dots h_s$, ogni termine essendo preso col segno $+$ o $-$ secondo che è pari o dispari la classe della permutazione che si considera, rispetto a $h_1 h_2 \dots h_s$ presa come fondamentale.

(2) La (4) è contenuta nell'Opera sopra citata di O. VEBLEN (p. 9), dove però le ϵ si immaginano costruite per una varietà euclidea riferita a coordinate cartesiane ortogonali. Essa fu dimostrata nel caso generale da LIPKA (*Sui sistemi E nel circolo differenziale assoluto*, questi «Rendiconti», 1922, pp. 242-245), che al posto delle δ di Kroneker generalizzate sostituisce un determinante formato con le solite δ , evidentemente equivalente.

(3) Per $n=3$ v. anche T. LEVI-CIVITA, 2° loc. cit., p. 200, oppure dello stesso Autore: *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, Zanichelli, 1928, p. 174).

(4) Basta infatti osservare che per portare l'indice i ad occupare l'ultimo posto, bisogna fare $n-1$ scambi.

Il coniugato del vettore \mathbf{U} coincide quindi col tensore \mathbf{T} se n è dispari, altrimenti coincide col suo opposto.

Facciamo ora, in generale, il coniugato del tensore $m^{\text{plo}} \mathbf{U}$ ed applichiamo la (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \epsilon_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_{n-m}} U^{i_1 \dots i_m} &= \frac{1}{(n-m)! m!} \epsilon_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_{n-m}} \epsilon^{h_1 \dots h_{n-m} i_1 \dots i_m} T_{h_1 \dots h_{n-m}} \\ &= \frac{(-1)^{m(n-m)}}{(n-m)! m!} \epsilon_{k_1 \dots k_{n-m} i_1 \dots i_m} \epsilon^{h_1 \dots h_{n-m} i_1 \dots i_m} T_{h_1 \dots h_{n-m}} \quad (1) \\ &= \frac{(-1)^{m(n-m)}}{(n-m)!} \delta_{k_1 \dots k_{n-m}}^{h_1 \dots h_{n-m}} T_{h_1 \dots h_{n-m}} = (-1)^{m(n-m)} T_{k_1 \dots k_{n-m}}. \end{aligned}$$

Il coniugato di \mathbf{U} coincide quindi col tensore primitivo \mathbf{T} se dei due numeri m ed $n-m$ almeno uno è pari, in caso contrario coincide con l'opposto di \mathbf{T} . Ma se sono entrambi dispari i due numeri m ed $n-m$ sarà pari n . Possiamo quindi concludere:

Il coniugato del coniugato coincide col tensore primitivo a meno eventualmente del segno. Ciò si presenta per i tensori dispari di varietà a un numero pari di dimensioni.

Meccanica. — *Elasticità vincolata e sua schematizzazione matematica.* Nota ⁽²⁾ di E. VOLTERRA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Voglio accennare ad un nuovo metodo di studio delle deformazioni dei solidi elastici, che credo fecondo di risultati per le applicazioni pratiche, conducendo in modo sistematico e semplice alla soluzione di vari problemi di statica elastica ⁽³⁾.

Il metodo, che possiamo chiamare di *elasticità vincolata* è basato sulla speciale ipotesi, frutto dell'intuizione, che in molti casi gli spostamenti dei corpi elastici avvengano con grande approssimazione, come se esistessero degli speciali vincoli interni. Sono appunto tali vincoli interni che, togliendo una certa libertà al sistema, producono la semplificazione dal punto di vista analitico e permettono al calcolo di procedere poi, compatibilmente colla ipotesi preliminare, nella maniera la più rigorosa.

Così, per riferirci alle più importanti applicazioni pratiche, nel caso di una trave prismatica o di un arco, vige, con approssimazione sufficiente da

(1) Basta infatti osservare che per portare gli indici $i_1 \dots i_m$ ad occupare gli ultimi posti, bisogna fare, per ciascuno di essi, $n-m$ scambi.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1932.

(3) Ved. E. VOLTERRA, *Elasticità libera ed elasticità vincolata. Applicazioni del concetto di elasticità vincolata* (Congresso Internazionale di Matematica di Zurigo, settembre 1932).

poterlo assumere come vincolo geometrico, un principio di conservazione delle sezioni piane, normali alle generatrici. Basta ammettere tale vincolo per ridurre il grado di libertà del sistema e semplificare nello stesso tempo la soluzione analitica del problema.

Riferiamo la trave prismatica ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y, s . L'asse s coincida coll'asse del prisma (passi cioè pei baricentri delle sezioni normali) gli assi x ed y coincidano cogli assi principali di inerzia delle sezioni normali. Poniamo le componenti u, v, w dello spostamento sotto la forma:

$$(1) \quad \begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v = b_1 + b_2 x + b_3 y \\ w = c_1 + c_2 x + c_3 y \end{cases}$$

ove $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ sono nove funzioni della variabile s che si tratta di determinare. Volendo studiare le deformazioni di un sistema così vincolato, in assenza di forze esterne, ammetteremo come naturale che l'equilibrio interno corrisponda ad un minimo del lavoro di deformazione (integrale del potenziale elastico locale esteso al sistema di cui si tratta). Questo dà luogo alle nove equazioni differenziali seguenti, ordinarie, omogenee, a coefficienti costanti, determinatrici delle nove funzioni incognite nella variabile s :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a_1}{ds^2} + \frac{dc_2}{ds} = 0 \\ (L + 2K) a_2 - K \rho_y^2 \frac{d^2 a_2}{ds^2} + L b_3 + L \frac{dc_1}{ds} = 0 \\ a_3 - \rho_x^2 \frac{d^2 a_3}{ds^2} + b_2 = 0 \\ \frac{d^2 b_1}{ds^2} + \frac{dc_3}{ds} = 0 \\ a_3 + b_2 - \rho_y^2 \frac{d^2 b_2}{ds^2} = 0 \\ La_2 + (L + 2K) b_3 - K \rho_x^2 \frac{d^2 b_3}{ds^2} + L \frac{dc_1}{ds} = 0 \\ L \frac{da_2}{ds} + L \frac{db_3}{ds} + (L + 2K) \frac{d^2 c_1}{ds^2} = 0 \\ K \frac{da_1}{ds} + K c_2 - (L + 2K) \rho_y^2 \frac{d^2 c_2}{ds^2} = 0 \\ K \frac{db_1}{ds} + K c_3 - (L + 2K) \rho_x^2 \frac{d^2 c_3}{ds^2} = 0. \end{cases}$$

In esse L e K rappresentano due costanti elastiche, ρ_x e ρ_y sono i raggi di inerzia delle sezioni normali all'asse s rispetto agli assi x ed y .

Nello studio dell'equilibrio di un arco circolare si ottengono nove equazioni del tipo della (2), in esse inoltre compare il raggio della fibra media dell'arco.

Volendo studiare le deformazioni del corpo per effetto di forze esterne, agenti su di esso, da supporre in un primo tempo distribuite in due o tre dimensioni (forze di massa oppure sforzi superficiali), dopo di aver espresso le componenti dello spostamento sotto la forma (1), poniamo come condizione di equilibrio interno quella fornita dal principio dei lavori virtuali (variazione del potenziale elastico totale eguale al lavoro delle forze esterne). Arriviamo in questo caso ad equazioni differenziali non più omogenee, ma con secondo membro.

È anche possibile, con opportuno passaggio al limite, lo studio degli effetti di forze concentrate. Basta ricorrere al seguente artificio: supporre ripartito un carico variabile, nullo dappertutto meno che in una certa regione che si fa diminuire indefinitamente, facendo contemporaneamente crescere in quella regione il carico. Al limite si giunge ad un carico concentrato. Nella soluzione ho cercato di esprimere l'integrale in modo da fare risultare l'azione del carico in un punto, qualunque fosse la sua posizione.

Il metodo, che ho adoperato, presenta qualche analogia con quello del De Saint-Venant: in uno si parte da ipotesi speciali sulle tensioni, nell'altro da ipotesi speciali sugli spostamenti. Non pretendo però che il mio metodo raggiunga il grado di perfezione dell'altro, perchè, mentre il De Saint-Venant mette le cose in modo da soddisfare alle equazioni generali dell'elasticità in modo rigoroso (solo se ne allontana nelle condizioni ai limiti), il metodo da me esposto non raggiunge tale risultato, ma in generale, di pochissimo, se ne allontana. Resta però fin da principio pienamente distinta la parte che spetta alle ipotesi bene esplicitate dei vincoli geometrici di partenza, donde il nome di *elasticità vincolata* e la parte che si svolge in appresso nella maniera analitica, la più rigorosa.

In talune questioni ordinariamente trattate dalla tecnica, si alternano e si mescolano in un insieme non facilmente districabile le ipotesi speciali dovute più o meno all'intuizione ed i calcoli rigorosi e ne derivano sviluppi analitici in generale sottili, ma il più delle volte sproporzionati al grado di esattezza che si vuole e si deve raggiungere.

Mi propongo di mostrare con esempi concreti in prossime Note come il metodo ora esposto possa rendere utilissimi servigi appunto in tali casi.

Meccanica. — *Sulla correzione einsteiniana del tempo in un moto planetario.* Nota ⁽¹⁾ di M. CIMINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Premessa. — In una recente Nota ⁽²⁾ abbiamo avuto occasione di applicare un principio di equivalenza, dato dal Levi-Civita per lo studio in seconda approssimazione del moto einsteiniano di un corpo di massa infinitamente piccola sottoposto all'azione di un campo gravitazionale generato da una distribuzione di masse dotate di simmetria sferica, allo scopo di ricavare la legge delle aree nella forma che compete a tale moto *considerato nell'ordinario spazio euclideo*. Ora vogliamo dedurre, valendoci ancora di questo principio di equivalenza, una legge del tempo cosmico ed i periodi di rivoluzione, anomalistica e siderale, sempre per un moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo. Ricordiamo perciò quanto si ottenne nella suddetta Nota, rimandando ad essa per l'esplicazione di tutti i simboli usati.

Detta A_1 una costante positiva, doppio della velocità areolare in un ausiliario moto newtoniano, e t_1 il tempo (ordinario) di questo ausiliario moto newtoniano, dalla:

$$(1) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt_1} = A_1$$

essendo in virtù del principio di equivalenza suddetto (ed in seconda approssimazione):

$$dt = dt_1 \left(1 + \frac{4 U_0}{c^2} \right),$$

si ha:

$$(2) \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = A_1 \left(1 - \frac{4 U_0}{c^2} \right)$$

(ove t è il tempo cosmico del moto einsteiniano), la quale può ritenersi come l'integrale delle aree del moto einsteiniano considerato in un ordinario spazio euclideo, nel quale lo spazio einsteiniano sia conformemente rappresentato.

§ 1. — Possiamo sfruttare ancora il principio di equivalenza del Levi-Civita valendoci della (2) allo scopo di assegnare una legge del moto,

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1932.

(2) M. CIMINO, *Sulla legge delle aree di un moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo*, questi « Rendiconti ».

valida nell'ordinario spazio euclideo, e che risulterà molto simile a quella classica kepleriana pel moto ellittico.

Passando dal riferimento (θ, ρ) al riferimento (ω, ρ) , consideriamo ivi la:

$$(1') \quad \rho^2 \frac{d\omega}{dt_1} = A$$

ove A è la costante delle aree del moto newtoniano ausiliario nel riferimento (ω, ρ) , (legata del resto, come si vide, alla A_1); passando poi in questo riferimento alle anomalie eccentriche φ e ponendo:

$$(3) \quad n_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{a_1^3}}$$

(ove a_1 è il semi-grand'asse nello spazio euclideo) avremo classicamente l'equazione di Keplero sotto forma differenziale:

$$(4) \quad n_1 dt_1 = (1 - e_1 \cos \varphi) d\varphi.$$

La (3) può anche scriversi (colla solita approssimazione):

$$n_1 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{a_1^3}} \left(1 + \frac{2E}{c^2} \right) = n_0 \left(1 - \frac{\kappa_0}{a_1 c^2} \right)$$

ove si è posto per brevità:

$$n_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{a_1^3}}.$$

Applicando allora alla (4) il suddetto principio di equivalenza, cioè sostituendovi, al posto di dt_1 , il suo valore $dt / \left(1 + \frac{U_0}{c^2} \right)$, otterremo l'equazione differenziale del tempo cosmico, *valida nell'ordinario spazio euclideo*:

$$\begin{aligned} n_0 \left(1 - \frac{\kappa_0}{a_1 c^2} \right) dt &= (1 - e_1 \cos \varphi) d\varphi + (1 - e_1 \cos \varphi) \frac{4\kappa_0}{\rho c^2} d\varphi = \\ &= \left(1 + \frac{4\kappa_0}{a_1 c^2} \right) d\varphi - e_1 \cos \varphi \cdot d\varphi \end{aligned}$$

e, nella solita approssimazione:

$$(5) \quad n_0 dt = \left(1 + \frac{5\kappa_0}{a_1 c^2} \right) d\varphi - e_1 \left(1 + \frac{\kappa_0}{a_1 c^2} \right) \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Integrando avremo la relazione in termini finiti (essendo t_0 il valore iniziale di t):

$$(6) \quad n_0 \left(1 - \frac{5\kappa_0}{a_1 c^2} \right) (t - t_0) = \varphi - e_1 \left(1 - \frac{4\kappa_0}{a_1 c^2} \right) \sin \varphi$$

che scriveremo brevemente:

$$(6') \quad \bar{n} (t - t_0) = \varphi - \bar{e} \sin \varphi.$$

§ 2. — Se ora facciamo variare φ da 0 a 2π , il corpo potenziato si sposta dal perielio (minima distanza dal centro di forza) al perielio nuovamente; dunque la durata di una rivoluzione anomalistica del moto einsteiniano nell'ordinario spazio euclideo è:

$$(7) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\kappa_0}} \left[1 + \frac{5\kappa_0}{a_1 c^2} \right].$$

Per dedurre la durata di una rivoluzione siderale partendo da un generico valore φ dell'anomalia eccentrica, dobbiamo sottrarre a T_1 l'intervallo di tempo τ che intercorre mentre l'anomalia eccentrica si sposta dal valore $\varphi - S_\varphi$ al valore φ , essendo S_φ l'angolo del quale avanza l'anomalia eccentrica φ durante una rivoluzione anomalistica, rispetto al riferimento (θ, ρ) . Avremo, partendo dal valore φ dell'anomalia eccentrica, in virtù della (6'):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\bar{n}} \{ \varphi - (\varphi - S_\varphi) - \bar{e} \sin \varphi + \bar{e} \sin (\varphi - S_\varphi) \} = \\ &= \frac{1}{\bar{n}} \{ S_\varphi - \bar{e} (\sin \varphi - \sin \varphi \cos S_\varphi + \cos \varphi \sin S_\varphi) \} \end{aligned}$$

e, in seconda approssimazione:

$$(8) \quad \tau = \frac{1}{\bar{n}} S_\varphi (1 - \bar{e} \cos \varphi).$$

Ci resta a calcolare S_φ . Parliamo dalla relazione classica⁽¹⁾:

$$\rho \sin \omega = a_1 \sqrt{1 - e_1^2} \cdot \sin \varphi$$

essendo ρ il raggio vettore corrispondente al valore φ dell'anomalia eccentrica; e notando che all'angolo S_φ corrisponde nelle anomalie vere l'avanzo del perielio S_p , avremo in seconda approssimazione:

$$S_\varphi = \frac{1 - e_1 \cos \varphi}{\sqrt{1 - e_1^2}} \cdot S_p.$$

Esplicitando allora nella (8) i simboli \bar{n} ed \bar{e} , e ricordando l'espressione in seconda approssimazione di S_p , avremo nella stessa approssimazione:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\kappa_0}} \cdot \frac{3\kappa_0}{a_1 c^2} \cdot \frac{(1 - e_1 \cos \varphi)^2}{(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) Cfr., ad'es., F. TISSERAND, *Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1889, t. I, p. 103.

e quindi il periodo di rivoluzione siderale:

$$(9) \quad T_2 = T_1 - \tau = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\kappa_0}} \left[1 + \frac{5\kappa_0}{a_1 c^2} - \frac{3\kappa_0}{a_1 c^2} \cdot \frac{(1 - e_1 \cos \varphi)^2}{(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

e passando alle anomalie vere:

$$(9') \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\kappa_0}} \left[1 + \frac{5\kappa_0}{a_1 c^2} - \frac{3\kappa_0}{a_1 c^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{(1 + e_1 \cos \omega)^2} \right].$$

Si vede pertanto come tale periodo, al contrario di T_1 , dipende dal raggio vettore iniziale.

Ripetiamo ancora, a scanso di equivoci, che la (7) e la (9') valgono per il moto einsteiniano considerato in un ordinario spazio euclideo. Che se si calcolassero infatti T_1 e T_2 partendo dall'integrale (12'a), considerato nella precedente Nota, si otterrebbe rispettivamente (e siamo nello spazio einsteiniano!):

$$(10) \quad \begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{a}_1^3}{\kappa_0}} \left[1 + \frac{3\kappa_0}{\bar{a}_1 c^2} \right] \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{a}_1^3}{\kappa_0}} \left[1 + \frac{3\kappa_0}{\bar{a}_1 c^2} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{(1 + e_1 \cos \omega)^2} \right) \right]^{(1)} \end{cases}$$

ove \bar{a}_1 è la a_1 misurata nello spazio einsteiniano⁽²⁾.

§ 3. — Nelle ordinarie osservazioni astronomiche ci si riferisce costantemente ad uno spazio euclideo, sia nel considerare in tale spazio le effettive orbite dei corpi celesti, sia nell'uso degli strumenti di osservazione. Ora risulta che in un eventuale confronto dei periodi di rivoluzione dei pianeti osservati con quelli calcolati in base ai principi della teoria della Relatività (onde porre in luce il divario con i valori calcolati in base alla legge newtoniana) occorre riferirsi alle nostre (7) e (9) anzichè alle (10).

La (9') o la seconda del (10), indifferentemente, permettono poi di calcolare la differenza che passa tra la durata di una rivoluzione che abbia inizio per un valore ω dell'anomalia vera e quella che abbia inizio per un valore $\omega + \pi$ dell'anomalia stessa⁽³⁾.

(1) Cfr. J. CHAZY, *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1928. Tome I, pp. 80-85.

(2) Non basta nella (6) esprimere a_1 per mezzo di \bar{a}_1 mediante la (13), considerata nella Nota precedente, per avere la legge del tempo nello spazio einsteiniano; in effetti, prima di applicare il principio di equivalenza, occorrerebbe trasformare la (4) in termini dello spazio einsteiniano.

(3) Non sarà inutile rilevare esplicitamente che nella (9'), dato il suo ordine dichiarato di approssimazione, si può sostituire materialmente all'anomalia ω l'anomalia θ del riferimento fisso; quindi quanto si va dicendo vale anche per le anomalie θ .

Lo Chazy ⁽¹⁾ ha eseguito questo calcolo per due passaggi consecutivi, rispettivamente di novembre e di maggio, di Mercurio sul disco del Sole, trovando in tale caso un valore della differenza dell'ordine del decimo di secondo, valore non verificabile allo stato attuale della precisione delle osservazioni. Noi termineremo questa Nota osservando che se si riuscisse a porre in luce in un qualunque sistema gravitazionale un tale divario, ciò costituirebbe una prova di natura *qualitativa* a favore della validità della Relatività generale, *per ottenere la quale non occorre conoscere in sostanza alcun elemento dell'orbita.*

Meccanica. — *Régularisation des chocs binaires pour des forces proportionnelles à l'inverse d'une puissance quelconque de la distance.* Nota ⁽²⁾ di M. KIVELIOVITCH, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Considérons n points matériels qui s'attirent suivant la loi $\frac{\alpha m_i m_j}{(r_{ij})^{k+1}}$, m_i et m_j désignant les masses des deux particules, r_{ij} leur distance mutuelle et α une constante. Supposons qu'on veut étudier le choc binaire entre les particules P_0 et P_1 . Pour cela rapportons le mouvement à des axes fixes passant par P_0 . Prenons comme variables les variables canoniques de Jacobi, c.-à.-d. on rapporte le mouvement de P_1 à P_0 , de P_2 au centre de gravité g_1 de P_0 et P_1 , de P_3 au centre de gravité g_2 de P_2 et P_1 e. t. c.

On aura le système suivant d'équations différentielles:

$$(I) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p'_i} \quad ; \quad \frac{dp'_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x'_i} \\ \frac{dx''_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p''_i} \quad ; \quad \frac{dp''_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x''_i} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i^{(n-1)}} \quad ; \quad \frac{dp_i^{(n-1)}}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_i^{(n-1)}} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(III) \quad F = \mu \sum_1 p_i^2 + \mu' \sum p_i'^2 + \dots + \mu^{(n-1)} \sum (p_i^{(n-1)})^2 - \frac{\alpha m_0 m}{r^k} - \alpha \sum_1^{n-1} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^k} = E,$$

(1) Loc. cit., p. 133.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1932.

où les coefficients constants μ dépendent de masses; $r = \overline{P_0 P_1}$; E est la constante des forces vives, dont nous supposons que sa valeur, est fixée d'avance;

les (x_i, p_i) désignant les coordonnées canoniques de P_1 ;

$$\begin{array}{ccccccc} (x'_i, p'_i) & \cdot & \text{»} & & \text{»} & & \text{»} & P_2 \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

Pour le choc $P_0 P_1$ au temps t_0 on a $x_i = r = 0$, et, comme les coordonnées canoniques des autres particules $P_2 \dots P_{n-1}$ sont régulières pendant le choc $P_0 P_1$, analogue au cas de l'attraction newtonienne, on a, d'après l'intégrale des forces vives,

$$\lim_{r=0} \left(r^k \mu \sum_i^3 p_i^2 \right) = \alpha m_0 m$$

ce qui exclut le cas d'une force repulsive car $r^k \sum p_i^2$ étant des quantités essentiellement positives, il faut que $\alpha > 0$. Pour régulariser le système (I) au voisinage du choc $P_0 P$ considérons les changements des variables suivants:

$$a) \quad (I) \quad dt = r^k du \quad \text{avec} \quad u = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_0$$

b) la transformation canonique

$$(2) \quad x_i = y_i q^2 - 2 \frac{k y q + 2 y \sum_j^3 y_j q_j \cdot q^{k-1}}{y q^{k-1} + 2 k \sum_j^3 y_j \frac{q_j}{q}} \cdot q_i = y_i q^2 - A q q_i$$

et

$$(3) \quad p_i = \frac{y_i}{q^k} + \frac{q_i}{q^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\left(y^2 = \sum_i^3 y_i^2, \quad q^2 = \sum_i^3 q_i^2 \right)$$

cette transformation est canonique, car

$$x_i = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad y_j = -\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial q_j} \quad \Omega = \Sigma (q^k p_i - q^{k-2} q_i)^2 = 1.$$

c) Changeons, en outre, la fonction canonique F en

$$(4) \quad H = r^k (F - E) = 0$$

ce qui ne change pas notre système, car E est fixée d'avance.

On trouve finalement le système suivant :

$$(IV) \quad \frac{dy_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{dq_i}{du} = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(V) \quad \begin{aligned} \frac{dx'_i}{du} &= \frac{\partial H}{\partial p'_i} \quad ; \quad \frac{dp'_i}{du} = - \frac{\partial H}{\partial x'_i} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Le choc $P_0 P_1$ se produit pour $u = 0$, $q = 0$ et $y^2 \neq 0$. Cherchons le développement de H suivant les puissances croissantes de q .

Comme

$$r^2 = y^2 q^4 + A^2 q^4 - 2 \sum_i y_i q_j \cdot q^3 = q^4 R^2$$

$$\Sigma p_i^2 = p^2 = \frac{y^2}{q^{2k}} + \frac{I}{q^2} + \frac{2 \Sigma y_j q_j}{q^{k+2}} = \frac{I}{q^{2k}} \Pi^2$$

Π et R finies pour q tendant vers zero donc

$$H = r^k (F - E) = R^k \Pi^2 y^k - k m_0 m + q^{2k} L \equiv 0.$$

Le système (IV) est régulier au voisinage d'un choc binaire, $q = 0$, c-à-d $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ les y_i n'étant pas toutes nulles à la fois.

On peut donc développer au voisinage de $u = 0$ les

$$y_i, q_i, x'_i, \dots, x_i^{(n-1)} \quad , \quad p'_i, \dots, p_i^{(n-1)}$$

suivant les puissances croissantes et entières des valeurs initiales

$$y_i^0, x_i'^0, \dots, x_i^{(n-1)0} \quad , \quad p_i'^0, \dots, p_i^{(n-1)0}.$$

On aura finalement les développements:

$$(VI) \quad \left\{ \begin{aligned} y_i - y_i^0 &= u Y_i (y_j^0, x_j'^0, \dots, x_j^{(n-1)0} \quad , \quad p_j'^0, \dots, p_j^{(n-1)0} / u) \\ x'_i - x_i'^0 &= u X'_i (\dots\dots\dots) \\ &\dots\dots\dots \\ x_i^{(n-1)} - x_i^{(n-1)0} &= u X_i^{(n-1)} (\dots\dots\dots) \\ p'_i - p_i'^0 &= u P'_i (\dots\dots\dots) \\ &\dots\dots\dots \\ p_i^{(n-1)} - p_i^{(n-1)0} &= u P_i^{(n-1)} (\dots\dots\dots) \end{aligned} \right.$$

et

$$(VII) \quad q_i = u Q_i (y_j^0, x_j'^0, \dots, x_j^{(n-1)0} \quad , \quad p_j', \dots, p_j^{(n-1)0} / u) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

En échangeant dans les équations (VI) u et $u_0 = 0$ on trouve

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i^0 - y_i = u \bar{Y}_i(y_j, x'_j, \dots, x_j^{(n-1)}), \quad p'_j, \dots, p_j^{(n-1)} \\ x_i'^0 - x'_i = u \bar{X}'_i(\dots) \\ \dots \\ x_i^{(n-1)0} - x_i^{(n-1)} = u \bar{X}_i^{(n-1)}(\dots) \\ p_i'^0 - p'_i = u \bar{P}'_i(\dots) \\ \dots \\ p_j^{(n-1)0} - p_j^{(n-1)} = u \bar{P}_i^{(n-1)}(\dots) \end{array} \right. \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

en remplaçant ces valeurs de $y_i^0, x_i'^0, \dots, x_i^{(n-1)0}, p_i'^0, \dots, p_i^{(n-1)0}$ dans (VII) on trouve finalement:

$$(VIII) \quad q_i = u \bar{Q}_i(y_i, x'_i, \dots, x_i^{(n-1)}, p'_i, \dots, p_i^{(n-1)})/u$$

en éliminant entre ces trois équations u on trouve deux relations entre les variables $y_i, q_i, x'_i, \dots, p_i^{(n-1)}$: deux conditions entre les variables initiales à l'instant u pour qu'un choc se produise à l'instant $u = 0$ (Dans le cas du plan on aura une seule relation).

Il est facile de démontrer, par analogie avec le cas de l'attraction newtonienne, que les équations (VIII) peuvent être mises sous la forme

$$(IX) \quad q_i = A y_i + \sum_{j=1}^{n-1} B_j x_i^{(j)} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j p_i^{(j)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les A, B_j et C_j sont des séries entières de u , fonctions symétriques en $y_i, x_i^{(j)}$ et $p_i^{(j)}$ et invariables par la permutation circulaire des indices i .

Donc chaque choc nécessite un système des trois équations du type (IX).

Astronomia. — *Metodo II° per il calcolo d'orbita di una binaria visuale.* Nota ⁽¹⁾ di E. MARTIN, presentata dal Socio G. SILVA.

1. In un sistema binario visuale, termi restando gli altri elementi geometrici e dinamici, una variazione di Ω determina una rotazione di tutta l'orbita apparente intorno alla stella principale e cioè fa variare tutti gli angoli di posizione d'una stessa quantità, lasciando invece inalterate le distanze cosicché, supposti esatti gli altri elementi ed errato soltanto Ω , a prescindere dagli errori di osservazione, il confronto fra effemeride ed osservazione darebbe $O - C$ nulli per le distanze ed $O - C$ costanti per gli angoli di posizione, tali differenze costanti rappresentando la correzione di Ω ⁽²⁾.

Una variazione di a , fermi restando tutti gli altri elementi, determina una trasformazione per omotetia dell'orbita apparente, cioè muta le dimensioni, ma non la forma nè l'orientamento dell'ellisse apparente, facendo variare tutte le distanze in uno stesso rapporto e lasciando invece inalterati gli angoli di posizione. Perciò, supposti esatti gli altri elementi ed errato soltanto a , a prescindere dagli errori di osservazione, il confronto tra effemeride ed osservazione darebbe $O - C$ nulli per gli angoli di posizione ed O/C costante per le distanze, essendo tale rapporto costante il fattore correttivo di a ⁽³⁾.

La variazione anche di uno solo degli elementi geometrici e, i, ω muta l'orbita apparente facendo variare in modo non semplice le coordinate apparenti del compagno.

Pertanto sono più da temersi gli errori di e, i, ω che quelli di a e Ω , e questi, nel caso teorico che quelli e gli altri dei due elementi dinamici n, T , non esistessero, sarebbero dal confronto tra effemeride ed osservazione

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1932.

(2) Ciò si può vedere anche dalle formule che esprimono p angolo di posizione e d distanza:

$$(I) \quad \tan(p - \Omega) = \tan(v + \omega) \cos i \quad (II) \quad d = r \cos(v + \omega) \sec(p - \Omega)$$

e ricordando che per un tempo t fissato, ma del resto qualunque, anche se varia Ω , ma restano fermi gli altri elementi geometrici e dinamici, non variano nè l'anomalia vera v nè il raggio vettore r ; per dette formole non variano quindi nemmeno $p - \Omega$ e d ; una variazione di Ω dà cioè luogo ad una uguale variazione di p .

(3) Variando a soltanto, l'anomalia eccentrica E resta inalterata e per la:

$$(III) \quad r = a(1 - e \cos E)$$

e per la (II) il raggio vettore r e la distanza d variano nello stesso rapporto di a .

facilmente desumibili. Perciò qualora non sia possibile ricavare ciascun elemento indipendentemente dagli altri, ma alcuni di essi debbano aversi in funzione dei rimanenti, può convenire non dedurre e, i, ω dagli altri due perchè non influisca sulla determinazione dei primi anche l'eventuale errore di Ω o di a , ma seguire la via inversa. A parte poi ogni altra considerazione non è consigliabile ricavare alcuni elementi in dipendenza di uno o più altri trovati per primi, qualora sia da temere che la determinazione di questi risulti incerta o per lo speciale metodo seguito o per le particolari caratteristiche dell'orbita studiata.

2. Ci proponiamo in questa Nota di ricavare e, i, ω indipendentemente da a e Ω , supposta tracciata l'ellisse apparente e la posizione della stella

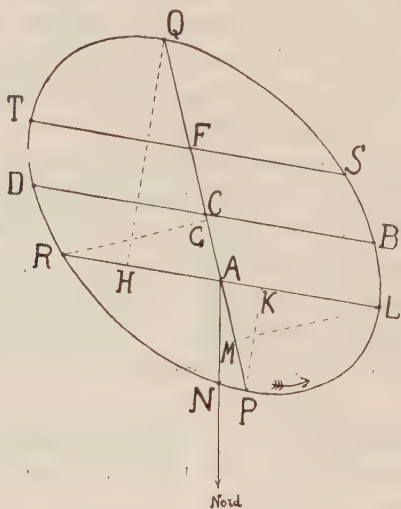


Fig. 1.

principale o primario. La condizione imposta non consente, come vedremo, la semplicità del metodo I⁽¹⁾ basato sulla preventiva determinazione della linea dei nodi.

Sia (Fig. 1) A la stella principale o primario, C il centro dell'ellisse apparente, F il simmetrico di A rispetto a C, P la proiezione del periastro; PQ, BD, RL rispettivamente le proiezioni dell'asse maggiore, dell'asse minore e del *latus rectum* dell'orbita vera. Risulterà $AR = AL$ e BD parallela a LR. Sia AN la direzione origine degli angoli di posizione di cui il senso positivo è rappresentato dalla freccia. Conduciamo per F la parallela ST ad LR e BD; sarà $FS = FT$. Adoperando le notazioni comunemente usate⁽²⁾

(1) Vedi « Rend. Lincei », XV, 6^a, p. 955.

(2) Tali notazioni sono definite nella Nota ora citata (1) a p. 958. Aggiungiamo ad esse l'angolo di eccentricità φ definito dalla relazione $\sin \varphi = e$.

osserviamo che la formola generale che dà la distanza apparente può mettersi sotto la forma:

$$d = a(1 - e^2)[1 + e \cos v]^{-1} \sqrt{1 - \sin^2(\omega + v) \sin^2 i}.$$

Indichiamo con $A_1 F_1 S_1$ il triangolo del piano vero che ha per proiezione sul piano apparente AFS; sarà A_1 coincidente con A , l'angolo in F_1 retto, il cateto $F_1 S_1$ eguale al *semilatus rectum* e quindi avente per valore $a(1 - e^2)$, il cateto $A_1 F_1$ eguale a $2ae$. Da ciò ricaviamo che l'ipotenusa di detto triangolo, cioè il raggio vettore $A_1 S_1$ ha per valore $a(1 + e^2)$, ed inoltre indicando con v l'anomalia vera relativa al punto S_1 :

$$\sin v = \frac{1 - e^2}{1 + e^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}, \quad \cos v = -\frac{2e}{1 + e^2} = -\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}.$$

Ponendo sempre $e = \sin \varphi$ e tenendo conto dell'espressione sopra scritta di d abbiamo:

Posizione del compagno	v	d
P	0	$AP = a(1 - \sin \varphi) \sqrt{1 - \sin^2 \omega \sin^2 i}$
Q	π	$AQ = a(1 + \sin \varphi) \sqrt{1 - \sin^2 \omega \sin^2 i}$
L	$\frac{\pi}{2}$	$AL = a \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \omega \sin^2 i} = AR = TF = FS$
B	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$AB = a \sqrt{1 - \cos^2(\omega + \varphi) \sin^2 i}$
D	$\frac{3}{2}\pi - \varphi$	$AD = a \sqrt{1 - \cos^2(\omega - \varphi) \sin^2 i}$
S	v	$AS = a(1 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \sin^2(\omega + v) \sin^2 i}$
T	$2\pi - v$	$AT = a(1 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \sin^2(\omega - v) \sin^2 i}$
ed inoltre		$BD = 2a \cos \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \omega \sin^2 i}$

come possiamo facilmente ricavare osservando che BD è parallelo ad AL e che inoltre è la proiezione dell'asse minore il cui vero valore è $2a \cos \varphi$.

3. Per il calcolo dell'eccentricità può servire la semplice formola di J. Herschell⁽¹⁾ $\sin \varphi = e = CA/CP$ e possiamo anche aggiungere $\sin \varphi = AF/PQ$. Altra semplice relazione è data da: $\cos \varphi = LR/BD$.

(1) M. R. A. S., V, 1833.

Per avere l'inclinazione osserviamo che:

$$4 AP \cdot AQ = 4 a^2 \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 \omega \sin^2 i)$$

$$\overline{BD}^2 = 4 a^2 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \omega \sin^2 i)$$

dalle quali:

$$(1) \quad 4 AP \cdot AQ + \overline{BD}^2 = 4 a^2 \cos^2 \varphi (1 + \cos^2 i)$$

$$(2) \quad 4 AP \cdot AQ - \overline{BD}^2 = 4 a^2 \cos^2 \varphi \cos 2 \omega \sin^2 i.$$

L'area vera che ha per proiezione il quadrilatero PLQR è il quadrilatero avente per diagonali ortogonali l'asse maggiore ed il *latus rectum* e quindi ha per valore $2 a^2 \cos^2 \varphi$ cosicchè:

$$(3) \quad 2 \cdot PLQR = 4 a^2 \cos^2 \varphi \cos i.$$

Dividendo membro a membro la (1) per la (3) otteniamo:

$$(4 AP \cdot AQ + \overline{BD}^2) / 2 \cdot PLQR = \sec i + \cos i$$

la quale, ricordando che $\sec i \cdot \cos i = 1$, permette di ricavare i .

Abbiamo poi:

$$\overline{AB}^2 = a^2 [1 - \cos^2 (\omega + \varphi) \sin^2 i] \quad , \quad \overline{AD}^2 = a^2 [1 - \cos^2 (\omega - \varphi) \sin^2 i]$$

dalle quali:

$$(4) \quad 2 (\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2) = 4 a^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin 2 \omega \sin^2 i.$$

Dividendo membro a membro la (4) per la (2) otteniamo:

$$2 (\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2) / (4 AP \cdot AQ - \overline{BD}^2) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} 2 \omega$$

la quale, conoscendo già φ , permette di ricavare ω . In modo meno semplice abbiamo pure:

$$\overline{AS}^2 - \overline{AT}^2 = 4 a^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin 2 \omega \sin^2 i$$

e quindi tenendo conto della (2):

$$(\overline{AS}^2 - \overline{AT}^2) / (4 AP \cdot AQ - \overline{BD}^2) = \sin \varphi \operatorname{tg} 2 \omega$$

che può pure servire a darci ω . L'espressione scritta di $\overline{AS}^2 - \overline{AT}^2$ unitamente alla (4) ci dà ancora un'altra formula per avere l'eccentricità, precisamente:

$$\cos \varphi = (\overline{AS}^2 - \overline{AT}^2) / 2 (\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2).$$

Rileviamo che le espressioni che danno φ, i, ω si presentano come rapporti di quantità omogenee (lineari o quadratiche) cioè dipendono sol-

tanto dalla forma dell'ellisse apparente e dalla posizione relativa ad essa del primario A, come deriva da quanto abbiamo detto al n. 1.

Per ricavare l'elemento a possiamo servirci di una qualunque delle quattro relazioni che abbiamo numerato; più brevemente della (3) che ci dà $a = \sqrt{2 \text{ PLQR} \cdot \sec i} / 2 \cos \varphi$.

Infine per avere il nodo necessitano delle misure (almeno una) relative all'orientamento. Ne possiamo subito desumere due dalla figura e cioè gli angoli di posizione $\widehat{\text{PAN}}$ ed $\widehat{\text{LAN}}$ relativi a P e ad L. Abbiamo nei due casi:

$$\text{tang} (\widehat{\text{PAN}} - \Omega) = \text{tang} \omega \cos i \quad , \quad \text{tang} (\widehat{\text{LAN}} - \Omega) = - \cotg \omega \cos i .$$

Una o l'altra di essa, o (per controllo di calcolo) tutte due possono darci Ω .

4. *Riepilogo.* — Ordinate, corrette e perequate le osservazioni, riportiamole in grafico polare e disegniamo l'orbita apparente, controllando che sia un'ellisse, con A primario. (Fig. 1).

Determiniamo il centro C servendoci della nota proprietà dei diametri coniugati. Il segmento CA prolungato fino ad incontrare l'orbita apparente sarà allora la proiezione dell'asse maggiore dell'orbita vera. Segniamo su esso con P la proiezione del periastro, con Q quella dell'apoaastro, e con F la proiezione del fuoco dell'orbita vera non occupato dal primario, per cui sarà $\text{CF} = \text{CA}$. Conduciamo per A, per C e per F le corde di direzione coniugata a PQ; le prime due saranno rispettivamente le proiezioni del *latus rectum* (o corda parametro) e dell'asse minore dell'orbita vera. A partire da P nel senso positivo (freccia della figura) nel quale cioè crescono gli angoli di posizione indichiamo ordinatamente i sei estremi delle tre corde parallele tracciate con L, B, S, T, D, R. Conduciamo infine da Q e da P le normali QH e PK ad LR oppure da L ed R le normali LM ed RG a PQ ($\text{LM} = \text{RG}$). Abbiamo allora:

$$(1) \quad \text{sen} \varphi = e = \frac{\text{AF}}{\text{PQ}} \quad (1)' \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - e^2} = \frac{\text{LR}}{\text{BD}}$$

$$(1)'' \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - e^2} = \frac{\overline{\text{AS}^2} - \overline{\text{AT}^2}}{2 (\overline{\text{AB}^2} - \overline{\text{AD}^2})}$$

e per controllo di calcolo:

$$\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 .$$

L'area PLQR può misurarsi con planimetro oppure ricavarsi sia usando formula trigonometrica, sia utilizzando le normali condotte dai vertici sulle diagonali. Ponendo $\Delta = 2 \text{ PLQR}$ abbiamo:

$$(2) \quad \Delta = \text{RL} (\text{QH} + \text{PK}) \quad (2)' \quad \Delta = \text{PQ} (\text{LM} + \text{RG})$$

$$(2)'' \quad \Delta = RL \cdot PQ \cdot \widehat{\text{sen P\hat{A}L}}$$

$$(3) \quad j = \frac{4 \text{ AP} \cdot \text{AQ} + \overline{\text{BD}^2}}{2 \Delta} \quad (4) \quad \left. \begin{matrix} \sec i \\ \cos i \end{matrix} \right\} = j \pm \sqrt{j^2 - 1}$$

$$(5) \quad a = \frac{\sqrt{\Delta \sec i}}{2 \cos \varphi}$$

$$(6) \quad \text{tang } 2 \omega = \frac{2 (\overline{\text{AB}^2} - \overline{\text{AD}^2})}{\text{tg } \varphi (4 \text{ AP} \cdot \text{AQ} - \overline{\text{BD}^2})}$$

$$(6)' \quad \text{tang } 2 \omega = \frac{\overline{\text{AS}^2} - \overline{\text{AT}^2}}{\text{sen } \varphi (4 \text{ AP} \cdot \text{AQ} - \overline{\text{BD}^2})}$$

da ciascuna delle quali possiamo, senza ambiguità di quadrante ricavare 2ω , poichè in ciascuna espressione i numeratori hanno il segno di $\text{sen } 2 \omega$ ed i denominatori quello di $\cos 2 \omega$. Se ne deduce ω coll'incertezza di π e per ora possiamo ricavare in valore e segno $\text{tg } \omega$ o $\text{cotg } \omega$ o tutte e due per utilizzarle nelle formule seguenti:

$$(7) \quad \text{tang} (\widehat{\text{P\hat{A}N}} - \Omega) = \text{tg } \omega \cos i \quad (7)' \quad \text{tg} (\widehat{\text{L\hat{A}N}} - \Omega) = - \text{cotg } \omega \cos i$$

da ciascuna delle quali Ω si ricava senza ambiguità ricordando che dev'essere $0 \leq \Omega < \pi$. Avuto Ω si dirime l'incertezza di ω ricordando che esso ha lo stesso quadrante di $\widehat{\text{P\hat{A}N}} - \Omega$ o di $\widehat{\text{L\hat{A}N}} - \Omega - \frac{\pi}{2}$. Per chi usa contare ω nel senso del moto, il valore cercato, quando il moto è retrogrado, è il supplemento a 2π di quello trovato.

Geofisica (Sismologia). — *Ancora intorno allo smorzamento dei sismografi.* Nota ⁽¹⁾ di A. PROVIERO, presentata dal Socio L. PALAZZO.

Il piccolo sismografo « Agamennone » a pendoli orizzontali ⁽²⁾ che figurò con onore al concorso internazionale dell'Aia del 1906, è destinato essenzialmente a stazioni di 2° ordine e funziona con successo in moltissimi osservatori, tra cui quello di Trenta (Cosenza) da me diretto, e viene utilizzato in Roma, come strumento sussidiario, fin dal 1909, dal R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica. Avendo avuto occasione di leggere l'Estratto di una recentissima Memoria del prof. E. Oddone ⁽³⁾ nella quale si cerca di svalutare il detto sismografo, anche pel fatto che i pendoli sono liberi, ritengo necessario discutere un po' su quanto egli ha esposto circa l'uso dello *smorzamento* e del *dissincronismo*, argomenti di capitale importanza, di cui ebbi già ad occuparmi altre volte ed anche su questi stessi « Rendiconti » ⁽⁴⁾.

L'Oddone scrive dunque a p. 15 dell'Estratto: « Per ultimo va ripetuto che il dott. Agamennone si ostinò sempre a non volere smorzare i sismografi che faceva costruire. Senza ripetere argomentazioni note, non esito a ridichiarare che per ridurre la sproporzione che esiste tra gli ingrandimenti delle onde a vario periodo, per conservare una definita relazione tra i moti del suolo e le ampiezze sul registratore, insomma per rendere leggibili i sismogrammi, è indispensabile ricorrere allo smorzamento. Fortunatamente non vi è difficoltà ad applicare a detto pendolo uno smorzatore magnetico, oppure ad olio e petrolio. Non si pretende che collo smorzamento si ottenga la perfetta riproduzione del moto del suolo, ma per lo meno a quella ci si avvicina ». Sicchè per l'Oddone lo smorzamento è indispensabile, perchè i soli sismogrammi di pendoli smorzati si renderebbero leggibili, mentre quelli di pendoli liberi non lo sarebbero affatto.

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1932.

(2) G. AGAMENNONE, *Sopra un tipo di sismografo a pendoli orizzontali.* (« Boll. d. Soc. Sism. It. », XII, 1907, p. 345).

(3) *L'attuale servizio sismometrico a Roma.* (Ivi, XXX, 1931-32, fasc. 3-4).

(4) *Considerazioni sulle oscillazioni dei pendoli sismografici ecc.* (Ivi, XXIV, 1922-23, p. 159); *Sull'uso dello smorzamento nei sismografi.* (« Rend. d. R. Accad. N. dei Lincei », sez. 6^a, III, 6 marzo 1926); *Intorno ad alcuni recenti studi sullo smorzamento dei sismografi.* (Ivi, XXIX, 1929-30, p. 78).

Mi lusingo di avere già precedentemente dimostrato la poca fondatezza d'una simile asserzione; ma poichè egli mostra di tener poco o nessun conto di quanto fu scritto da altri e da me su tale importante argomento, ritengo opportuno tornarvi sopra anche a costo di ripetermi.

Per ritenere *indispensabile* lo smorzamento alla lettura dei sismogrammi, i motivi addotti dall'Oddone non sono affatto sufficienti: la sproporzione tra gli ingrandimenti delle onde a vario periodo — che del resto sorge inevitabile pure pei grafici di pendoli smorzati — non è affatto di ostacolo a rinvenire, anche nei sismogrammi di pendoli liberi, gli elementi da introdurre nella formola relativa all'ingrandimento dinamico; la relazione poi tra i moti del suolo e le ampiezze del registratore non resta punto affidata al caso, ma viene benissimo definita dallo stesso funzionamento meccanico del sismografo libero e dalla relativa teoria la quale, se è bene intesa ed esattamente applicata, non può condurre a risultati erronei. Il vantaggio invece dello smorzamento, dato che potesse realizzarsi sul serio e senza altri inconvenienti, consisterebbe piuttosto nell'ottenere, sul sismogramma le sole onde forzate del moto tellurico, senza mistura di oscillazioni strumentali.

Ora, a prescindere che per ottenere un simile risultato occorrerebbe che il pendolo resti smorzato fino all'aperiodicità ($\mu^2 = 0$) — non essendo la qual cosa per diverse ragioni consigliabile, nell'uso comune si usa ridurre di molto lo smorzamento, ciò che permette alle oscillazioni strumentali di intervenire più o meno spesso sul sismogramma — a prescindere, dico, da tutto questo e da quanto è inerente alla natura stessa dello smorzamento, non bisogna dimenticare che il surriferito vantaggio può benissimo ottenersi invece dai sismografi non smorzati in maniera chiara e sicura, se tra il periodo di oscillazione strumentale e quello d'onda tellurica esiste un marcato *dissincronismo*.

È risaputo infatti che sul sismogramma d'un pendolo libero a periodo corto (2-3 sec.) si leggono soltanto onde telluriche, se esse hanno un periodo dai 15 sec. in sopra; e perciò la III fase dei telesismi, in questi sismografi, riproduce quasi fedelmente le sole onde telluriche senza mistura di oscillazioni strumentali. Lo stesso accade nei sismogrammi di pendoli non smorzati a periodo lungo (20-25 sec.) per le due prime fasi dei telesismi e per le scosse vicine, nei quali casi d'ordinario il periodo d'onda tellurica non supera i 5-7 sec. ⁽¹⁾. In ambo i casi perciò il sismologo è autorizzato ad introdurre nella formola d'ingrandimento dinamico dei pendoli non smor-

(1) Ho dimostrato nel 1° del sopracitati miei lavori che sui grafici di pendoli non smorzati, in date circostanze, si può sempre (anche se T e T_0 sono vicinissimi) individuare la sola onda del moto tellurico, ma allora è richiesto un certo lavoro, tanto maggiore quanto più si resta vicini alla risonanza dei due periodi. Il dissincronismo dunque è rigorosamente invocato, solo perchè con esso viene eliminato siffatto lavoro, ottenendosi sui grafici onde forzate soltanto.

zati periodo ed ampiezza delle oscillazioni rinvenute sui sismogrammi, quando, a parità di circostanze con la teoria dello smorzamento, ciò è possibile.

L'Oddone, parlando nel citato suo lavoro del dissincronismo, ha frainteso, citando vari autori che patrocinerebbero invece, secondo lui, il principio del sincronismo o risonanza tra periodo d'oscillazione strumentale e periodo d'onda tellurica; ma è chiaro che quegli autori hanno inteso parlare di pendoli smorzati i quali con la detta risonanza, supposto che diano un ingrandimento dinamico più forte, diventerebbero più sensibili e quindi riuscirebbero a svelare, meglio che con il dissincronismo, certe onde telluriche deboli. E supposto che in simili casi di risonanza, per un forte smorzamento si ottenessero sul grafico soltanto onde forzate o telluriche, ne verrebbe il vantaggio che essi sismografi potrebbero funzionare contemporaneamente da ottimi sismoscopi in virtù della risonanza e da buoni sismometri per il forte smorzamento. Questo, soltanto questo, han dovuto e potuto significare gli autori citati dall'Oddone, non già che il dissincronismo nei pendoli liberi non abbia il suo valore, oppure che con tali pendoli bisogna invocare la risonanza per ottenere sole onde telluriche da poter misurare!...⁽¹⁾ Ma dunque potrebbe dedursi: se il pendolo non è smorzato, poichè le scosse deboli vengono ingrandite e perciò svelate soltanto in caso di risonanza, l'altro pendolo a periodo dissincrono col periodo d'onda di dette scosse deboli, non svelando niente o troppo poco, non serve a nulla; ed ecco per conseguenza frustrato lo scopo del dissincronismo dei pendoli liberi, nel caso delle scosse deboli. La difficoltà riuscirebbe alquanto seria, se un sismografo, oltre all'ingrandimento dinamico, non potesse avere anche l'altro ingrandimento esterno o normale, il quale, come si sa, resta costante per qualsiasi periodo d'onda tellurica, epperò, anche in caso di dissincronismo fra tale periodo e quello strumentale può riuscire più che sufficiente a svelare anche le onde più deboli, venendo così a supplire al mancato ingrandimento dinamico. Di fatti nel mio modesto osservatorio il microsismometro verticale a periodo corto (2.3 sec.), per il suo ingrandimento normale uguale a 250 volte appena, svela quasi sempre ed abbastanza bene le onde lente di III fase dei telesismi.

D'altra parte quanto sostengono i propugnatori dello smorzamento, non è neppure troppo vero. Se per poter misurare periodo ed ampiezza d'onda tellurica occorre che questa si rinvenga sul grafico sola, senza mistura d'altre oscillazioni strumentali, e se per ottenere tale effetto occorre che il pendolo resti smorzato fino all'aperiodicità ($\mu^2 = 0$), è anche vero

(1) Che anzi gli autori in questione e lo stesso Oddone, con quanto sostengono a favore della risonanza per sismografi smorzati, vengono a patrocinare indirettamente qualche cosa anche pel *dissincronismo* di pendoli liberi; nel senso che per uno stesso osservatorio un solo apparecchio non basta, ma ne occorrono almeno due a periodi dissincroni fra loro; il che significa che almeno per la parte finanziaria e di equipaggiamento, l'uso dei sismografi smorzati e quello degli altri senza smorzamento resta alla pari.

che sul grafico d'un sismografo con simile smorzamento non si può ottenere, in caso di risonanza, un forte ingrandimento dinamico; questo risulta invece uguale a 0.50 appena; ben poca cosa, come vedesi, per gli effetti desiderati. Sicchè, in conclusione, i sostenitori della bontà della risonanza in pendoli smorzati vengono a trovarsi, per così dire, tra Scilla e Cariddi: se si vuole ottenere un forte ingrandimento dinamico, si deve usare uno smorzamento relativamente minimo ($\mu^2 = 0.90$ o 0.80) con che le deprecate oscillazioni strumentali vengono a ripresentarsi più o meno sul grafico; se poi si cerca di evitarle, si è costretti ad usare l'aperiodicità con $\mu^2 = 0$, e allora l'ingrandimento dinamico riesce ben poca cosa. Non è dunque possibile ottenere da un sismografo smorzato il doppio uso di sismometro e di sismoscopio contemporaneamente ⁽¹⁾.

Basterebbero pertanto le sole considerazioni esposte fin qui per poter concludere che lo smorzamento non è poi *indispensabile* e che si può riuscire a studiare tutti i sismi registrati da due sismografi non smorzati a periodi marcatamente dissincroni tra loro, perchè, a secondo il caso, può trovarsi la sola onda del moto tellurico sull'uno o sull'altro sismogramma dei due apparecchi. Ma v'è di altro.

*
* *

La teoria dello smorzamento per quanto decantata come grandemente vantaggiosa dai suoi propugnatori, tale difatti non è, a motivo che essa in molti casi *non viene sempre capita* anche da eminenti sismologi. Lo stesso Oddone, p. es., in un suo studio: *Appunti fisici per lo studio del terremoto di Sicilia e Calabria* (« Annali della Soc. degli Ingegneri e Architetti Ital. », n. 7, 1° aprile 1909. Roma, 1909) scrive testualmente in una Nota: « Due « sismografi di costruzione identica, ma di *diverso periodo*, presentano *diagrammi simili*, alla sola condizione che i rispettivi pendoli siano provvisti « di smorzamento »; il che non può essere vero per la semplice ragione che il periodo strumentale, entrando come un coefficiente di primaria importanza nelle formole dell'ingrandimento dinamico, non può non apportare delle variazioni sull'aspetto stesso del grafico rispetto a quello d'un altro sismografo con periodo pendolare differente. E difatti altri sismologi han voluto sottoporre ad esperimenti proprio questo caso e — con loro meraviglia!... — hanno constatato che i sismogrammi di due apparecchi smorzati dello stesso tipo, collocati l'uno vicino all'altro nella stessa direzione, ma di *periodo proprio molto differente*, danno dei grafici che spesso *non hanno*

(1) Affinchè il sismografo funzioni da sensibilissimo sismoscopio — e, se si vuole, con un po' di lavoro, anche da sismometro — ottimi effetti di risonanza possono ottenersi soltanto dai pendoli liberi, nei quali l'ingrandimento dinamico, non assorbito dallo smorzamento, diventa enorme.

alcuna simiglianza ⁽¹⁾. Il Galitzin poi, parlando d'una certa correzione da non trascurarsi nella teoria dello smorzamento, scrive testualmente ⁽²⁾: « Pur « troppo di questa correzione per il ritardo del grafico dell'apparecchio viene « tenuto conto finora soltanto a Pulkovo, sebbene essa non sia da trascurarsi nella maggior parte dei casi ». Un sismologo che va per la maggiore, di cui per ovvie ragioni tacio il nome, richiesto da me molti anni fa su di una formula d'ingrandimento dinamico per sismografo smorzato, diede spiegazioni da far allibire!... Ora, se tutto questo può capitare ad eminenti sostenitori dello smorzamento, che cosa bisogna pensare di tanti altri, e sono la grande maggioranza, che, dovendo usare un apparecchio smorzato, avrebbero pure il diritto di trovarsi davanti ad una teoria accessibile alla propria mentalità?...

*
* *

E ancora: meno male tutto questo, se la teoria dello smorzamento fosse stata elaborata senza *gravi errori*. Nella citata Nota ⁽³⁾ rilevai che, dopo il Mier ⁽⁴⁾, il Belluigi ⁽⁵⁾ riconobbe non poco deficiente la teoria in parola, perchè essa trascura elementi caratteristici del fenomeno di registrazione sismica e che però, onde ottenere risultati di misurazione del vero moto tellurico, almeno approssimativi, occorrerebbe completare con processi nè brevi, nè facili la classica teoria dello smorzamento. Ed il Lacoste ⁽⁶⁾, seguendo anch'egli il Mier, riscontra addirittura dei falsi supposti a base della discussa teoria dello smorzamento: quali la fissità dell'apparecchio smorzatore nello spazio e la resistenza del mezzo smorzante proporzionale semplicemente alla velocità di spostamento del pendolo, mentre nella pratica l'apparecchio smorzatore si muove col suolo e non di rado si adoperano smorzamenti ad aria o a liquido (come consiglia lo stesso Oddone) la cui resistenza è invece proporzionale al *quadrato* della velocità. Dimodochè, secondo il Lacoste, si potrebbe alquanto riparare ai gravi inconvenienti con l'introdurre un nuovo fattore che egli chiama *coefficiente d'amplificazione* e che, da esperimenti eseguiti sulla piattaforma oscillante, può raggiungere nientemeno il valore di 3.20!...

Con avere scritto più volte su questo argomento e recentemente appoggiandomi all'autorità di altri eminenti autori, m'ero lusingato di scuotere

(1) GUTENBERG, LANDSBERG, SOMVILLE (« Gerland's Beiträge zur Geophysique », XXV, p. 74; XXIX, p. 64 e 347).

(2) *Vorlesungen über seismometrie*, p. 276.

(3) *Intorno ad alcuni recenti studi sullo smorzamento dei sismografi*.

(4) *Les équations fondamentales et l'amortissement des sismographes*. (Madrid, 1914).

(5) *Sullo smorzamento dei pendoli sismografici*. (« Boll. d. Soc. Sism. It. », XXVI, p. 69).

(6) *Sur le rôle des amortisseurs dans les sismographes. Coefficients d'amplification*. (« Publications du Bureau Central Séism. Intern. Ser. A. Travaux Scient. », fasc. n. 6, p. 28, Paris, 1929).

un po' dai loro sonni tranquilli coloro che allo smorzamento avevano accordato intiera fiducia, ma purtroppo debbo constatare il contrario. Il prof. Oddone, per es., come se tutte le gravissime critiche mosse contro lo smorzamento si potessero annientare con un semplice tratto di penna, non esita a sentenziare anche oggi che lo smorzamento è *indispensabile* per la lettura dei sismogrammi, concedendo appena che, se con esso non si può ottenere la perfetta riproduzione del moto del suolo, per lo meno a quello ci si avvicina. No, neppure questo può essere vero! per quella tale inesorabile legge di proporzionalità tra cause ed effetti, se l'apparecchio smorzatore si muove con il suolo, mentre in teoria viene considerato fermo nello spazio; e se l'aria o i liquidi offrono una resistenza pari al *quadrato* del valore richiesto teoricamente, non è il caso di parlare di effetti approssimati; debbono invece venir fuori risultati proporzionali per lo meno al *doppio* del valore cercato in forza della 1^a falsa ipotesi e del suo *quadrato* per il 2^o supposto, non conforme a verità.

Conchiudo: Il *dissincronismo* nei pendoli non smorzati è un ottimo mezzo per rinvenire sui sismogrammi le sole onde del moto tellurico e ricavarne facilmente gli elementi necessari alle formole dell'ingrandimento dinamico, e tale risultato riesce chiaro e sicuro; mentre lo stesso non può dirsi dell'uso dello smorzamento, vuoi perchè la relativa teoria, riuscendo il più delle volte astrusa e difficile viene fraintesa anche dai migliori sismologi, vuoi perchè la stessa teoria poggia disgraziatamente su errori non trascurabili che debbono per necessità condurre a gravi difetti nella pratica.

Fisica (Meteorologia). — *Periodicità nell'andamento progressivo della Pioggia a Capodimonte 1833-1931.* Nota ⁽¹⁾ di E. GUERRIERI, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Indipendentemente dalla relazione col periodo undecennale delle Macchie Solari studieremo l'andamento progressivo e la probabile periodicità della pioggia a Napoli dal 1833 al 1931.

I risultati di osservazione sono stati tratti dai registri della Stazione Meteorologica annessa al R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte, e precisamente dalla Memoria del prof. V. Alberti ⁽²⁾ quelli che si riferiscono al periodo (1866-1900), ed i rimanenti sono stati rilevati dallo scrivente dalle registrazioni pluviometriche. Oltre della *Pioggia* (Pg.) raccolta dai pluviometri, si è tenuto anche conto del numero dei *Giorni piovosi* (G. P.) i quali, opportunamente connessi coi risultati definitivi, influiscono a completare l'andamento progressivo delle precipitazioni meteoriche a Capodimonte.

Però, prima di passare all'esame dell'andamento e della periodicità, è utile completare per Capodimonte le medie dell'altezza della Pg. e del numero dei G. P. per il periodo (1833-1931): studi climatologici sono stati eseguiti per Capodimonte nei periodi (1866-1900) e (1901-1925); a questi, esclusivamente per la Pg. e per i G. P., ne aggiungeremo altri due, del (1833-1865) e del (1926-1931), cioè altri 39 anni di osservazioni pluviometriche. Per avere risultati omogenei e tra loro paragonabili abbiamo calcolato le medie della Pg. e dei G. P. per singoli decenni (l'ultimo comprende 9 anni) ed abbiamo ottenuto il seguente prospetto:

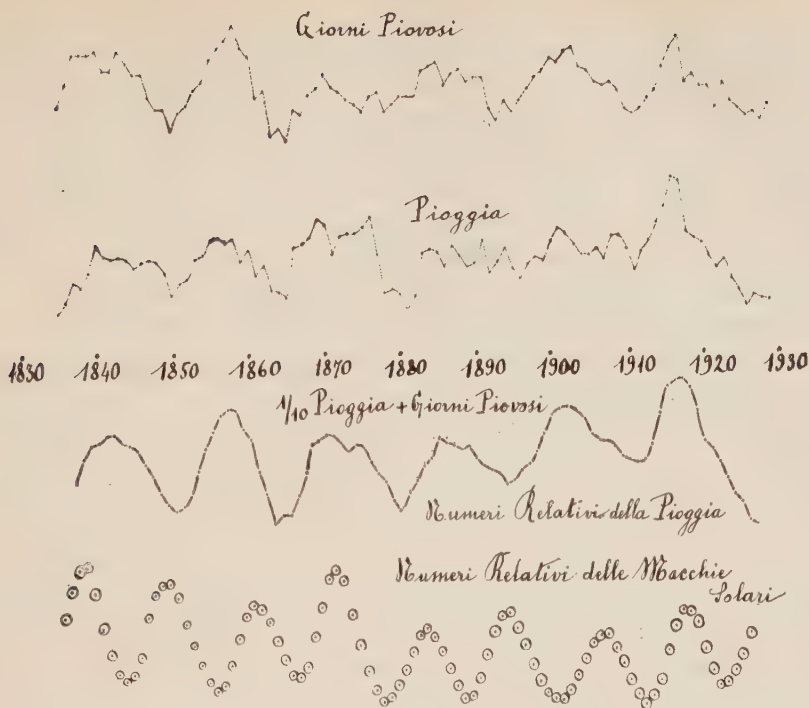
Decennio	Pg.	G. P.	Decennio	Pg.	G. P.
1833-1842	806.5	115.4	1883-1892	861.9	119.0
1843-1852	799.0	109.3	1893-1902	868.7	114.9
1853-1862	895.8	121.6	1903-1912	877.4	114.0
1863-1872	854.3	108.8	1913-1922	948.9	117.5
1873-1882	855.6	109.8	1923-1931	766.7	110.3
<hr/>					
1833-1931	Pg. . . . mm. 854	G. P. . . . 114			

La media quantità di pioggia (854) caduta nel (1833-1931) ha subito un abbassamento rispetto a quella (883) del sessantennio (1866-1925), dipendente dalla scarsezza di pioggia rilevata nei due primi decenni della serie e nell'ultimo.

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1932.

(2) V. ALBERTI, *Sul Clima di Napoli*, «Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli», serie V, vol. III, n. 4.

Anno	Pg. P ₅	G.P. P ₅	$\frac{1}{10}$ Pg. + G. P. PP ₅	Anno	Pg. P ₅	G.P. P ₅	$\frac{1}{10}$ Pg. + G. P. PP ₅	Anno	Pg. P ₅	G.P. P ₅	$\frac{1}{10}$ Pg. + G. P. PP ₅
1835	715	108	N. R.	1867	898	107	197.0	1899	852	119	206.2
36	743	114	—	68	917	112	204.4	1900	904	122	209.8
37	793	122	194.6	69	966	114	205.2	01	934	121	212.2
38	783	122	201.2	1870	950	118	206.8	02	922	124	212.8
39	821	122	204.6	71	870	114	206.6	03	897	125	212.6
1840	898	123	205.2	72	918	113	204.8	04	870	120	210.6
41	868	118	207.2	73	923	111	202.6	05	870	119	206.6
42	860	118	207.6	74	924	110	204.2	06	884	116	205.2
43	867	123	205.2	75	944	108	203.2	07	859	115	205.0
44	855	120	204.6	76	971	112	199.6	08	919	116	203.4
45	835	117	203.2	77	871	113	196.8	09	919	114	200.8
46	850	117	199.8	78	769	108	194.2	1910	885	109	200.0
47	856	111	196.6	79	781	110	189.2	11	829	108	199.0
48	850	108	192.0	1880	767	112	186.8	12	878	109	199.6
49	822	108	188.8	81	725	112	191.2	13	907	112	203.8
1850	763	102	187.4	82	762	112	195.2	14	952	114	212.0
51	792	107	188.6	83	876	119	199.2	15	995	120	219.4
52	806	109	191.0	84	882	120	202.2	16	1074	125	220.6
53	858	113	197.8	85	876	121	206.0	17	1063	128	220.8
54	870	115	203.8	86	837	115	205.8	18	927	116	218.6
55	910	121	208.0	87	892	118	204.2	19	916	118	212.6
56	915	124	212.4	88	866	119	202.8	1920	903	115	204.4
57	900	126	213.8	89	837	116	204.6	21	866	115	202.8
58	913	130	213.4	1890	848	117	201.4	22	836	109	199.0
59	853	124	208.8	91	905	117	198.4	23	855	116	194.8
1860	882	122	206.0	92	820	109	198.4	24	803	111	190.4
61	816	111	197.6	93	848	106	196.2	25	777	109	188.6
62	842	113	191.6	94	885	111	192.8	26	731	107	183.6
63	776	101	188.8	95	833	108	194.2	27	762	108	182.4
64	771	103	185.8	96	804	111	196.6	28	756	106	—
65	759	100	185.8	97	842	114	197.4	1929	750	110	—
1866	890	108	190.8	1898	861	117	201.6	—	—	—	—



La Tabella numerica, con cui sono stati costruiti i diagrammi che seguono, riassume i risultati che si riferiscono alla Pg. stimata in mm. ed al numero dei G. P., in questi ultimi non essendo compresi quelli con l'annotazione di *pioggerella incalcolabile*, inferiore a mm. 0.1. Allo scopo di eliminare le irregolarità e le onde secondarie nei diagrammi, tanto la Pg. quanto i G. P. sono stati *perequati* di 5 in 5, approssimando al mm. intero la Pg. ed al giorno intero i G. P. Per l'una e per gli altri i risultati *osservati* sono stati omessi per brevità, ed i *perequati* P_5 manifestano un ritardo di due anni al principio (1835) ed un anticipo di altrettanto alla fine (1929).

Nonostante la perequazione e la quasi perfetta concordanza tra i diagrammi separati dei G. P. e della Pg. tuttavia, per conglobare questi ultimi in un solo grafico, e per accentuare di più l'andamento periodico già constatato in entrambi, si è operato nel seguente modo. Siccome i valori della Pg. rappresentano poco meno del decuplo dei G. P., si è fatta la somma tra la decima parte della Pg. ed il numero dei G. P.; le somme ottenute hanno subito una ulteriore perequazione anche di 5 in 5.

La Tabella numerica riunisce sinteticamente i risultati annui della Pg. a Capodimonte (1833-1931): nella 2^a e nella 3^a colonna compariscono rispettivamente Pg. e G. P. perequati (P_5) e nella 4^a seguono quelli che denominiamo *Numeri relativi della Pg.* (N. R.), ottenuti colla doppia perequazione PP_5 e nei quali sono conglobati G. P. e Pg. nel modo suaccennato.

I grafici che seguono, eseguiti secondo la Tabella numerica, mettono maggiormente in evidenza l'andamento progressivo della precipitazione meteorica a Capodimonte: il *primo* di essi dei G. P. ed il *secondo* della Pg. procedono dal principio alla fine in modo concorde, presso che parallelo, e quasi con le identiche e numerose ondulazioni tra le quali emergono in modo *non dubbio* i massimi ed i minimi. Ad eliminare o ad attenuare appunto tali onde si è pensato al calcolo dei N. R. ($\frac{1}{10}$ Pg. + G. P.) il cui diagramma precisa in modo netto e distinto la periodicità della pioggia a Capodimonte durante un secolo di osservazioni pluviometriche.

Abbiamo per ultimo tracciato il diagramma dei *Numeri relativi delle Macchie Solari* dedotti dalle *Astronomische Mittheilungen* di Zurigo, e che per brevità non sono stati trascritti: subito si nota la *nessuna relazione tra Pioggia e Macchie solari*, essendo diverse le durate dei due periodi; infatti, mentre i periodi della Pg. sono *sei*, nello stesso intervallo di tempo quelli delle Macchie solari sono *otto*, con la differenza di circa quattro anni tra l'uno e l'altro.

Esclusa la connessione tra la periodicità della Pioggia a Napoli e la periodicità delle Macchie Solari, fermiamoci sul periodo della Pioggia a Napoli. Notiamo subito la quasi scomparsa delle oscillazioni secondarie, le quali si riducono alle poche seguenti:

a) una molto esigua (1863-1865), seguente immediatamente il minimo del 1865;

b) una oscillazione nel ramo discendente, tra il massimo del 1871 ed il minimo del 1880, con un massimo secondario nel 1875;

c) una leggera gibbosità nel ramo discendente (1889), tra il massimo del 1885 ed il minimo del 1894.

Escluse queste lievissime irregolarità nell'andamento periodico della Pioggia a Napoli, tutto l'intero diagramma procede secondo una netta e regolare periodicità di cui determiniamo anzitutto la

Durata del Periodo.

Anni	Tra Massimi	Anni	Tra Minimi	Media
1842-1857	15	1850-1863	13	14.0
1857-1870	13	1863-1880	17	15.0
1870-1885	15	1880-1894	14	14.5
1885-1902	17	1894-1911	17	17.0
1902-1917	15	1911-1927	16	15.5
Media . . .	15.0	Media . . .	15.4	15.2

Si conchiude una *media durata del Periodo della Pioggia a Napoli di anni 15.2*, e precisamente di anni 15.0 per il periodo tra due massimi e di 15.4 per quello tra due minimi. Per un esame più dettagliato calcoliamo separatamente, tanto per la Pg. quanto per i G. P., le durate dal massimo al minimo e quelle dal minimo al massimo, precedute dalle epoche limiti e seguite dalle relative escursioni; ciò risulta da quanto segue.

Pioggia (mm.).

dal Massimo al Minimo			dal Minimo al Massimo		
Anni	Durata	Escursione	Anni	Durata	Escursione
1840-1850	10	135	1835-1840	5	183
1856-1865	9	156	1850-1856	6	152
1869-1881	12	241	1865-1869	4	207
1887-1896	9	88	1881-1887	6	130
1901-1911	10	105	1896-1901	5	130
1916-1926	10	343	1911-1916	5	245
Media . . .	10.00	178	Media . . .	5.17	174

Giorni Piovosi.

dal Massimo al Minimo			dal Minimo al Massimo		
Anni	Durata	Escursione	Anni	Durata	Escursione
1840-1850	10	21	1835-1840	5	15
1858-1865	7	30	1850-1858	8	28
1870-1878	8	10	1865-1870	5	18
1885-1893	8	15	1878-1885	7	13
1903-1911	8	17	1893-1903	10	19
1917-1928	11	22	1911-1917	6	20
Media . . .	8.67	19	Media . . .	6.83	19

Osserviamo intanto quanto segue sui precedenti risultati:

a) sono giustificati i minimi dell'anno iniziale (1835) della serie in esame *perequata*, tanto per la Pg. (715) quanto per i G. P. (108), giacchè tali numeri provengono dai minimi osservati nel 1834 per la Pg. (542) e per i G. P. (67);

b) si è ritenuto *sporadico* il massimo della Pg. (905) dell'anno 1891 e per ragioni ovvie, risultanti dall'andamento progressivo, si è preferito prendere in sua vece il massimo (892) del 1887, poco differente dal primo;

c) per i G. P. è preferibile il massimo (123) del 1840, preceduto da altri tre valori (122), anziché quello *sporadico* (123) tra valori decrescenti.

Dal quadro suesposto risulta, per la *Pioggia*, una media durata dal massimo al minimo di anni 10.00, doppia di quella (5.17) dal minimo al massimo, i singoli valori per l'una e per l'altra essendo molto concordanti tra loro: l'*escursione media* nei due rami, discendente (178) ed ascendente (174) è risultata eguale, quantunque i singoli valori mostrino sensibili scostamenti dal medio, più rimarchevoli essendo quelli di mm. 88 e 343 nel passaggio dal massimo al minimo.

Circa l'analogo andamento dei *Giorni Piovosi* osserviamo che i limiti di tempo sono leggermente spostati rispetto ai corrispondenti della *Pioggia*, le singole durate dal massimo al minimo e dal minimo al massimo sono meno concordi di quelle della Pg., ed i medi valori rispettivi (8.67 e 6.83) sono tra loro più vicini e quindi si distaccano dai corrispondenti (10.00 e 5.17) per la Pg.: l'*escursione media* dei G. P. (19), analogamente a quella della Pg., è risultata perfettamente eguale nei due rami, ascendente e discendente.

Riassumendo, per la Pg. si ha una media escursione tra massimo e minimo di mm. 176 e di 19 G. P. tra questi due estremi: prendendo le medie di tutti i risultati ottenuti, si ha una media durata di anni 9.33 nella discesa dal massimo al minimo e di anni 6.00 nella salita dal minimo al massimo.

Dalle Tabelle numeriche, ma molto più chiaramente dai diagrammi, risulta *bene accertata la Periodicità Quindicennale della Pioggia a Capodimonte durante un secolo di osservazioni pluviometriche.*

Chimica (Chimica mineralogica). — *Sulla struttura della sferocobaltite* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. BACCAREDDA, presentata dal Socio G. BRUNI.

La sferocobaltite (carbonato neutro di cobalto) è un minerale di cobalto piuttosto raro e relativamente poco studiato.

Fu descritto per la prima volta da A. Weishach ⁽³⁾, che lo trovò a Schneeberg; in seguito fu trovato nella miniera di Boléo (Bassa California) e nella miniera di Etoile ⁽⁴⁾ (Katanga-Congo Belga). In Italia si trova sfe-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 giugno 1932.

(3) A. WEISBACH, « Jahrb. f. Berg u. Hüttenwesen, Sachsen », 1877; « Ref. Z. Kryst. », I, 393 (1877).

(4) A. SCHOER, *Présence de la Sphérocobaltite au Katanga*, « Ann. de la Soc. Geolog. du Belgique », Liege (1922).

rocobaltite in Liguria, e precisamente a Libiola ⁽¹⁾ (Casarza) e nella Valle del Neva ⁽²⁾.

Mancano anche analisi complete che includano la separazione del nichelio dal cobalto.

Interessante appare stabilire la esistenza di nichel nella sferocobaltite, dato che non si è riusciti ancora ad ottenere per via sintetica il carbonato neutro di nichelio, che neppure è noto come minerale.

Nella letteratura la sferocobaltite è descritta come romboedrica. È stata studiata da Ferrari e Colla ⁽³⁾ la struttura cristallina del carbonato neutro di cobalto, esaminando coi raggi X il composto ottenuto artificialmente secondo il metodo indicato da Senarmont, cioè per precipitazione con soluzione di cloruro di cobalto, a 140°; è stato così stabilito che il carbonato artificiale appartiene al sistema romboedrico, al gruppo spaziale della calcite e possiede un angolo del romboedro di 103°,22' e un rapporto assiale 0,81.

Ho potuto ora esaminare della sferocobaltite della Valle del Neva fornitami gentilmente dai proff. A. Pelloux e G. Lincio, che vivamente ringrazio. Il minerale è stato trovato e studiato dal Pelloux ⁽⁴⁾ il quale poté eseguire le misure goniometriche relative senza però arrivare, date le piccole dimensioni dei cristalli rinvenuti, alla determinazione della costante del romboedro. I minerali che accompagnano la sferocobaltite nel giacimento descritto da Pelloux sono i seguenti, in ordine di decrescente abbondanza: calcite, dolomite, quarzo eterogenite, azzurrite, malachite, galena, manganite, limonite, calcopirite, calcosina, mannicotite, annalcite, siderite.

L'analisi chimica del minerale eseguita su un campione liberato mediante bromoformio della maggior parte delle impurità di calcare e di quarzo ha dato i seguenti risultati:

H ₂ O	1.30 %
CO ₂	35.87 »
CuO	1.95 »
Fe ₂ O ₃	0.27 »
CoO	55.72 »
NiO	1.21 »
CaO	3.12 »
MnO	tracce
MgO	tracce
<hr/>	
99.44	

(1) A. A. FERRO, *Analisi della sferocobaltite di Libiola*, « Atti d. Soc. Ligurica di Sc. Nat. e Geograf. », Genova, X, 264 (1899).

(2) A. PELLOUX, *Sferocobaltite ed altri minerali della Valle del Neva*, « Memorie Accad. Lunigianese Scienze G. Capellini », VIII, I, La Spezia, 1927.

(3) A. FERRARI e C. COLLA, *La struttura cristallina dei carbonati neutri di cobalto e di nichelio*, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », X, 594 (1929).

(4) A. PELLOUX, loc. cit.

L'analisi è stata eseguita determinando l'H₂O e il CO₂ per assorbimento rispettivamente in cloruro di calcio e calce sodata, calcinando il minerale in corrente di aria secca; nel residuo, sciolto in HCl, è stato determinato il rame come Cu₂S, il ferro come Fe₂O₃, il cobalto ed il nichel insieme elettroliticamente, il calcio come ossido dall'ossalato, e infine nella soluzione nitrica del deposito catodico di nichel e cobalto, il nichel come Ni-dimetilgliossima.

Detraendo dalla percentuale di CO₂ trovata la parte combinata col CaO e quella che presumibilmente può essere combinata col CuO e col NiO supposti presenti come carbonati basici, la quantità di CO₂ risulta inferiore a quella teorica per il CoCO₃. Si deve ritenere quindi che il minerale contenga parte del cobalto sotto forma di carbonato basico o di ossido idrato. Quest'ultimo potrebbe essersi formato per alterazione superficiale; infatti alcuni granuli presentano una patina nerastra. Inoltre la presenza di eterogenite è stata anche riscontrata da Pelloux nel minerale.

Ho quindi proceduto all'esame röntgenografico col metodo delle polveri usando un tubo ad anticatodo di ferro; ho ordinato il fotogramma ottenuto nel sistema esagonale sul diagramma di Hull per un rapporto assiale di 3.24, relativo al romboedro inscritto, passando poi dagli indici bravaisiani h, k, l a quelli milleriani p, q, r del romboedrico, mediante le note formule:

$$p = 2h + k + l$$

$$q = k - h + l$$

$$r = -h - 2k + l$$

Dal rapporto assiale ho calcolato l'angolo del romboedro inscritto mediante la relazione:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} + \left(\frac{c}{a}\right)^2}{3 + \left(\frac{c}{a}\right)^2}}$$

ottenendo $\alpha = 48^{\circ}.14'$, perfettamente corrispondente al valore di $\alpha = 103^{\circ}.22'$ relativo al romboedro circoscritto, stabilito da Ferrari e Colla nel composto artificiale. Ho infine proceduto al calcolo del fotogramma colle solite formule; i risultati sono raccolti nella seguente tabella:

TABELLA

I. oss.	d	$h\ k\ l$	$p\ q\ r$	d_{100}	n	$\frac{nS}{\sqrt{p+k+r}}$
m	3.507	0 1 2	1 1 0	3.84	6	2.86
m	2.718	β 1 0 4	β 2 1 1	3.85	—	—
ff	2.718	1 0 4	2 1 1	3.85	6	13.38
mf	2.302	1 1 0	1 0 $\bar{1}$	3.85	6	6.59
d	1.926	β 2 0 2	β 2 0 0	3.85	—	—
mf	1.933	2 0 2	2 0 0	3.86	6	13.04
md	1.694	β { 1 1 6 0 1 8	β { 1 2 3 3 3 2	{ 3.86 3.87	—	—
md	1.763	0 2 4	2 2 0	3.87	6	2.45
ff	1.693	{ 1 1 6 0 1 8	{ 1 2 3 3 3 2	{ 3.86 3.87	{ 12 6	{ 13.82 7.34
dd	1.486	β 1 2 2	β 2 1 $\bar{1}$	3.87	—	—
dd	1.401	β { 2 1 4 1 0 10	β { 3 1 0 4 3 3	{ 3.87 3.88	—	—
dd	1.362	β 1 2 5	β 3 2 0	3.90	—	—
mf	1.483	1 2 2	2 1 $\bar{1}$	3.87	6	10.67
mf	1.404	{ 2 1 4 1 0 10	{ 3 1 0 3 3 3	{ 3.88 3.89	{ 12 6	{ 4.38 0.71
m	1.366	1 2 5	3 2 0	3.91	12	5.32
m	1.338	3 0 0	2 $\bar{1}$ $\bar{1}$	3.88	6	11.10
md	1.247	0 0 12	4 4 4	3.88	1	1.88
md	1.197	0 2 10	4 4 2	3.88	6	4.35
mf	1.178	{ 3 0 6 1 2 8	{ 4 1 1 3 3 0 4 3 1	{ 3.88 3.88 3.88	{ 6 6 12	{ 0.95 0.95 2.72
d	1.051	β 0 1 14	β 5 5 4	3.93	—	—
m	1.098	1 1 12	5 4 3	3.89	12	1.96
f	1.067	2 1 10	5 3 2	3.89	12	8.31
m	1.051	0 1 14	5 5 4	3.93	6	0.50

Risultano non ordinabili le linee: $d = 3.29$ (media) $d = 2.098$ (media) $d = 1.530$ (dd); la loro presenza può essere spiegata dalle impurità contenute nel minerale.

Adottando per la d_{100} il valore di 5.90 \AA mediante la formula:

$$a = \frac{d_{100}}{\sin \alpha \sin \Sigma}, \quad \text{essendo} \quad \cos \Sigma = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

si ottiene per lo spigolo del romboedro il valore di 5.71 \AA . Per correggere questi risultati dall'eventuale errore dovuto al dispositivo sperimentale, ho fotografato una miscela in parti uguali di sferocobaltite e cloruro sodico; dalla differenza fra il lato della cella del cloruro sodico e quello che si calcolerebbe in base a questo fotogramma, ho stimato l'errore dovuto al dispositivo sperimentale; tenendo conto di questo si ottiene per d_{100} il valore di 3.91 \AA , e per lo spigolo del romboedro il valore di 5.72 \AA . Per il composto artificiale fu trovato da Ferrari e Colla ⁽¹⁾ il valore di 5.91 \AA .

La differenza è dovuta solamente al diverso riferimento degli assi coordinati. Infatti il romboedro elementare dato da Ferrari e Colla risulta circoscritto al romboedro elementare ora determinato. Riferendo i risultati di Ferrari e Colla al romboedro inscritto risulta un lato di 5.67 , solo di pochi centesimi di \AA inferiore a quello ora trovato.

La differenza può essere attribuita alla presenza nel minerale di carbonato di calcio in soluzione isomorfa. Infatti il diametro ionico del Ca è di circa 1.06 \AA , mentre quello dell'ione cobaltoso è di 0.82 . La presenza nel CoCO_3 del 6% molecolare di CaCO_3 , che risulta ammettendo che tutto il cobalto e tutto il calcio trovati nell'analisi si trovino in soluzione solida tra loro, porterebbe teoricamente, ammessa la legge di Vegard e la costante nota del CaCO_3 , e per il CoCO_3 quella determinata da Ferrari e Colla, ad una cella di 5.71 \AA .

Nel fotogramma si nota la mancanza di linee corrispondenti a facce del tipo p, p, r dove r è dispari: questo, e più ancora la vicinanza fra i valori delle costanti trovate a quelle dei carbonati romboedrici tipo calcite, portano a concludere che anche la sferocobaltite appartiene al gruppo spaziale D_{3d}^6 .

Nell'ultima colonna della tabella precedente sono riportati i fattori di struttura calcolati colla formula $\frac{nS^2}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$ adottando come valore del parametro u il valore 0.25 . L'accordo fra le intensità sperimentali e quelle così calcolate è soddisfacente.

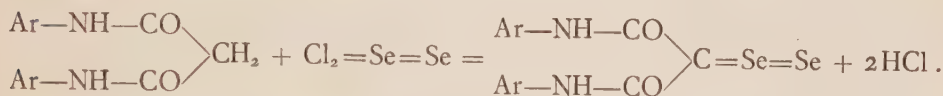
La densità calcolata ammettendo che il romboedro elementare contenga due molecole CoCO_3 risulta 4.10 ; questo valore si accorda bene con quello sperimentale determinato da Pelloux che trovò $d = 4.0$.

(1) Loc. cit. a p. 249, nota (3).

Chimica. — *Diselenmesoxanilidi ed ossiselenanilidi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾
di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Non mi risulta che sia stata studiata a tutt'ora l'azione del protocloruro di selenio Se_2Cl_2 sulle malonanilidi e dell'ossicloruro di selenio sulle anilidi; la prima azione conduce alla formazione di diselenmesoxanilidi e la seconda alla formazione di ossiselenanilidi, composti che non erano ancora noti. Da tempo invece sono stati preparati i corrispondenti composti solforati. Infatti Kuverji Gosai Naik ⁽³⁾ per azione del protocloruro di zolfo sulle malonanilidi ha ottenuto e caratterizzato le corrispondenti ditiomesoxanilidi e Michaelis e Herz e Schönnberg ⁽⁴⁾ hanno preparato e studiato le tionilaniline.

Per azione del protocloruro di selenio Se_2Cl_2 sulle malonanilidi ottenute per riscaldamento di eteri malonici con le corrispondenti ammine ⁽⁵⁾, io ho potuto ottenere la diselenmesoxanilide $\text{C}_{15}\text{H}_{12}\text{O}_2\text{N}_2\text{Se}_2$ che è una sostanza cristallina che fonde a 209° - 210° e che si purifica bene per cristallizzazione dall'acetone e la diselenmesoxi-p-toluidina $\text{C}_{17}\text{H}_{16}\text{O}_2\text{N}_2\text{Se}_2$ che è pure solida cristallina e fonde a 211° . La loro formazione avviene secondo l'equazione:



Per trattamento di questi due composti con acido nitrico ($D=1.5$) a caldo si ottiene l'introduzione di due gruppi nitrici in ogni nucleo del benzolo con formazione dei corrispondenti nitroderivati $\text{C}_{15}\text{H}_8\text{O}_{10}\text{N}_6\text{Se}_2$ e $\text{C}_{17}\text{H}_{12}\text{O}_{10}\text{N}_6\text{Se}_2$ che fondono rispettivamente a 224° e 215° . Per trattamento di una soluzione alcoolica di queste diselenmesoxanilidi con una soluzione alcalina di solfuro di sodio, si riottiene la malonamide corrispondente e si ha così un comportamento parallelo a quello degli analoghi composti solforati.

Per azione di una soluzione di ossicloruro di selenio SeOCl_2 in benzolo anidro su una soluzione di anilina o di o-toluidina pure in benzolo anidro, ho potuto ottenere la ossiselenanilide e la ossiselen-o-toluidina sotto forma di olii giallo rossastri che bollono rispettivamente a 210° e a 245°

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

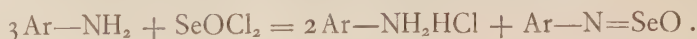
(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1932.

(3) « Journ. Chem. Soc. London », 119, 379 e 119, 1231-42 (1921).

(4) « Berichte », 23, 3481 (1890) e 24, 746 (1891); MICHAELIS, D. R. P., 59062, « Frdl. », 3, 990 (1890-94); SCHÖNNBERG, « Liebigs Annalen », 274, 205-210 (1893).

(5) FREUND, « Berichte », 17, 134 (1884); R. MEYER, « Liebigs Annalen », 347, 23 (1906).

a pressione ordinaria con decomposizione ed a 111° e 130° a 26 mm. senza decomposizione. La reazione fra l'ossicloruro di selenio e le ammine è molto vivace ed avviene secondo l'equazione:



Per riscaldamento di questi composti con anilina e difenilammina in presenza di cloruro di zinco come condensante, si ottengono dei colori al selenio azzurro verdastri di tono più cupo dei colori allo zolfo che si ottengono nelle stesse condizioni dalle tionilammine. Anche la solubilità di questi colori al selenio, come del resto quella dei corrispondenti colori allo zolfo, in una soluzione di solfuro e di seleniuro di sodio è molto piccola.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione della diselenmesoxanilide. — Si sciolgono 9 gr. di malonanilide in 25 cc. di benzolo anidro e si aggiungono lentamente agitando 5 gr. di protocloruro di selenio Se_2Cl_2 pure sciolti in 25 cc. di benzolo anidro e si riscalda per tre ore a ricadere per il completamento della reazione. Dopo raffreddamento si filtra, si lava il precipitato raccolto sul filtro con benzolo anidro e si cristallizza parecchie volte il prodotto dall'acetone. Il punto di fusione di questo composto è 209°-210°.

La diselenmesoxanilide venne analizzata decomponendola in micro Carius e dosando il selenio come selenio metallico. I risultati analitici sono i seguenti:

sostanza	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.004190	0.001601	38.19	38.60
0.003211	0.001228	38.25	38.60

Per trattamento della diselenmesoxanilide con acido nitrico ($D=1.5$) a caldo, l'anilide si scioglie completamente e per raffreddamento si separa il composto nitrato sotto forma di piccoli cristalli gialli che vengono ricristallizzati dall'alcool: p. f. 224°. L'analisi di questo composto nitrato, eseguita in modo analogo a quella della diselenmesoxanilide, ha dato i seguenti risultati:

sostanza	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.005690	0.001509	26.51	26.83
0.004271	0.001138	26.63	26.83

Per trattamento della diselenmesoxanilide sciolta in alcool bollente con una soluzione alcalina di solfuro di sodio, secondo il metodo dato da Brand⁽¹⁾, si riottiene la malonanilide.

(1) « Berichte », 42, 3464 (1909).

Preparazione della diselenmesoxi-p-toluidina. — Questo composto viene ottenuto in modo perfettamente identico a quello dato per la diselenmesoxanilide; anch'esso è solubile in acetone ed è stato purificato per ripetute cristallizzazioni da questo. Il suo punto di fusione è 211°. L'analisi eseguita determinando il selenio come selenio metallico ha dato i seguenti risultati:

sostanza	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.004103	0.001477	36.99	37.30
0.007125	0.002568	37.04	37.30

Per nitrurazione della diselenmesoxi-p-toluidina si ottiene il corrispondente composto nitrato che fonde a 215°. Anche questo è stato analizzato determinando il selenio come selenio metallico coi seguenti risultati:

sostanza	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.005146	0.001307	25.40	25.61
0.006103	0.001549	25.38	25.61

Anche per riscaldamento di una soluzione alcoolica di diselenmesoxi-p-toluidina con una soluzione alcalina di solfuro di sodio, si riottiene la malon-p-toluidina.

Preparazione della ossiselenanilide $C_6H_5 \cdot N \cdot SeO$. — Questo composto è stato ottenuto sciogliendo tre molecole di anilina in 200 cc. di benzolo anidro ed aggiungendo a goccia a goccia una molecola di ossicloruro di selenio. Si ha una reazione molto vivace ed esotermica; l'acido cloridrico che si libera viene fissato dall'anilina in eccesso. Per il completamento della reazione la miscela viene riscaldata a bagno maria per un'ora in un pallone munito di refrigerante a ricadere. Dopo raffreddamento si filtra per separare il cloridrato di anilina insolubile, si distilla il benzolo e si rettifica l'olio residuo. La ossiselenanilide distilla a 210° a pressione ordinaria con decomposizione ed a 111° a 26 mm. senza decomposizione ed è un olio giallo arancio di odore aromatico. Il rendimento della preparazione è del 64 %. Questo composto venne analizzato con micro Carius dosando il selenio come metallo. I risultati sono i seguenti:

sostanza	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.003927	0.001659	42.25	42.53
0.005142	0.002170	42.20	42.53

Per riscaldamento della ossiselenanilide con anilina in presenza di cloruro di zinco come condensante, si ottiene un colore al selenio molto difficilmente solubile azzurro verdastro; un colore della stessa tonalità si ottiene per riscaldamento con difenilammina nelle stesse condizioni. I colori che si

ottengono per riscaldamento della tionilanilina con anilina o con difenilammina e che sono pure difficilmente solubili, sono invece azzurri.

Preparazione della ossiselen-o-toluidina $\text{CH}_3 \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{N} \cdot \text{SeO}$. — Questo composto si ottiene in modo analogo alla ossiselenanilide per azione di una molecola di ossicloruro di selenio su tre molecole di o-toluidina; è un olio giallo rossastro che bolle a 245° a pressione ordinaria con notevole decomposizione ed a 130° a 26 mm. senza decomposizione. Il rendimento della preparazione è del 63 %. Esso venne analizzato dosando il selenio come metallo coi seguenti risultati:

sostanza	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.008425	0.003315	39.35	39.56
0.006395	0.002513	39.30	39.56

Anche per riscaldamento della ossiselen-o-toluidina con anilina o difenilammina in presenza di cloruro di zinco come condensante, si ottengono dei colori azzurro verdastri, molto difficilmente solubili, analoghi a quelli ottenuti con la ossiselenanilide.

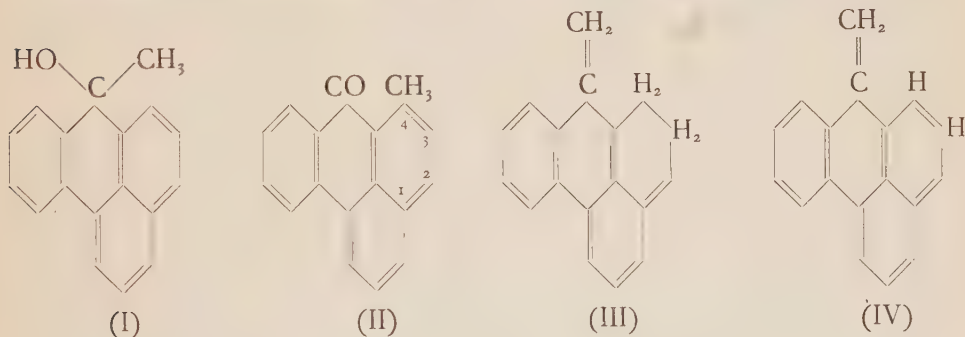
Riassumendo:

a) Vengono preparate la diselenmesoxanilide p. f. 209° - 210° e la diselenmesoxi-p-toluidina p. f. 211° , non ancora note, per azione del protocloruro di selenio Se_2Cl_2 rispettivamente sulla malonanilide e sulla malon-p-toluidina. Viene studiato inoltre il loro comportamento rispetto all'acido nitrico e rispetto alle soluzioni alcaline di solfuro di sodio.

b) Vengono preparate la ossiselenanilide p. eb. 111° a 26 mm. e la ossiselen-o-toluidina p. eb. 130° a 26 mm., non ancora note, per azione dell'ossicloruro di selenio sull'anilina e sulla o-toluidina. Questi due composti per riscaldamento con anilina o con difenilammina in presenza di cloruro di zinco come condensante, forniscono materie coloranti azzurro verdastre difficilmente solubili, manifestando così un comportamento del tutto parallelo a quello delle tionilammine.

Chimica. — *Azione dei ioduri di alchilmagnesio sull'(1.9)-benzantrone-(10)* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. CHARRIER e di ELISA GHIGI, presentata dal Socio M. BETTI.

Mentre, per azione del ioduro di metilmagnesio sull'antrachinone, antrone e loro omologhi, si ottengono i carbinoli corrispondenti ⁽³⁾ facendo agire sul comune benzantrone lo stesso reattivo non abbiamo ottenuto il metilcarbinolo (I), ma abbiamo invece isolato due altre sostanze che furono caratterizzate come 4-metilbenzantrone (II) e 10-metilen-3.4-diidrobengantrone (III). Quest'ultimo in particolari condizioni con grande facilità perde due atomi di idrogeno trasformandosi in 10-metilenbenzantrone (IV).



Se nelle stesse condizioni si fa agire sul benzantrone invece del ioduro di metilmagnesio, il ioduro di etilmagnesio si riesce ad isolare soltanto del 4-etilbenzantrone (V).



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e tossicologica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1932.

(3) HALLER e GUYOT, « Bull. », 31, 797 (1904); GUYOT e STAEHLING, 33, 1104 (1905); INGOLD e MARSHALL, « Journ. Chem. London », 1926, 3080; BARNETT, COOK e WILTSHIRE, « Journ. Chem. Soc. London », 1927, 1724.

I 4·alchilbenzantroni da noi ottenuti ossidati con miscela cromica forniscono acidi 4·alchilantrachinon·1·carbossilici, in cui l'alchile non può essere che in posizione 4, cioè nella stessa posizione in cui si trova nell'alchilbenzantrone corrispondente.

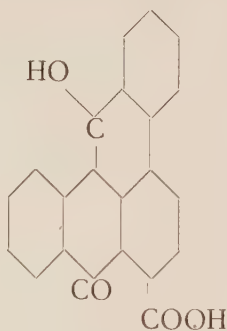
Non riesce facile spiegare in modo soddisfacente il meccanismo della reazione da noi trovata; un tentativo in tal senso sarà pubblicato in una Nota più estesa che comparirà sullo stesso argomento prossimamente sulla « Gazzetta Chimica Italiana ».

Clar ⁽¹⁾ ha fatto recentemente agire sul comune benzantrone bromuri e cloruri di arilmagnesio e considera gli arilbenzantroni da lui ottenuti come Bz·2 e Bz·3·arilderivati e ciò in seguito a reazioni di condensazione a cui detti arilbenzantroni danno luogo.

Noi crediamo per analogia coi composti da noi preparati che gli arilbenzantroni di Clar siano 4·arilderivati: per quanto riguarda il fenilbenzantrone abbiamo potuto dimostrare che effettivamente tale sostanza è il 4·fenilbenzantrone



poichè sottoposto ad ossidazione con miscela cromica fornisce un acido monocarbossilico, che non dà le reazioni degli acidi antrachinoncarbossilici e al quale per i dati dell'analisi abbiamo attribuito in via affatto preliminare la formula:



(1) E. CLAR, « Ber. » 65, 846 (1932).

PARTE SPERIMENTALE.

Azione del ioduro di metilmagnesio sul benzantrone.

Gr. 35.5 di ioduro di metile, sciolti in 100 cc. di etere anidro, furono fatti reagire su gr. 6 di magnesio, sospeso in 150 cc. di etere pure anidro, e il reattivo di Grignard così ottenuto fu fatto agire su gr. 20 di benzantrone sospeso in 300 cc. di etere. La reazione avviene con debole riscaldamento, provoca la soluzione del benzantrone e per prolungato riposo si separa un olio, che poi solidifica.

Dopo riscaldamento di 10-15 ore, si decompone con ghiaccio ed acido solforico al 10 % e si estrasse con etere. La soluzione eterea filtrata, separa per riposo (1-2 ore) circa 10 gr. di un prodotto bianco che fu purificato per cristallizzazione del benzolo. Puro si presenta in aghi bianchi ben sviluppati, fusibili a 155-156°. Con acido solforico concentrato dà colorazione rosso-sangue senza fluorescenza. È insolubile in alcool e nella maggior parte dei solventi organici:

	C	H
trovato %	94.11	6.46
calcolato per $C_{18}H_{14}$	93.91	6.08

Questa sostanza che all'analisi mostra di essere un idrocarburo, si comporta verso la soluzione di permanganato al 2 %, come se contenesse un doppio legame etilenico, poichè sospesa nella quantità di un centigrammo in 2-3 cc. d'alcool, decolora una goccia della detta soluzione in due minuti. Essa tuttavia ha una composizione centesimale che corrisponde al 10-metilendiidrobenzantrene e non al 10-metilenbenzantrone, nel quale facilmente si trasforma riscaldandola in soluzione benzolica per circa mezz'ora con carbone. Il 10-metilenbenzantrone si presenta come sostanza gialla, molto solubile in benzolo, da cui cristallizza e che allo stato puro fonde a 225°:

	C	H
trovato %	95.09	5.65
calcolato per $C_{18}H_{12}$	94.73	5.26

Anche questa sostanza sottoposta alla reazione di Adolfo von Bayer con le stesse modalità seguite per il 10-metilendiidrobenzantrene, decolora il permanganato in due minuti. Questo fatto che mostra la presenza di un doppio legame etilenico nella molecola e la composizione centesimale ci hanno permesso di attribuirle la formola (IV).

La soluzione eterea che per riposo aveva lasciato separare il prodotto bianco di cui si è detto sopra, fu liberata completamente dall'etere e fornì un residuo oleoso che fu cristallizzato dall'alcool etilico. Puro si presenta in lamine di color giallo citrino, fusibili a 125°. Con acido solforico con

centrato dà colorazione giallo-rossa, con fluorescenza verdastra, analogamente al benzantrone:

	C	H
trovato %	88.48	5.80
calcolato per $C_{18}H_{12}O$	88.48	4.97

La formula di struttura da attribuire a questo prodotto giallo fusibile a 125° è quella di 4-metilbenzantrone, già preparato sinteticamente dall'1.0-clorobenzoil-2-metilnaftalina e descritto come fondente a $127-128^{\circ}$ (1). D'altra parte le posizioni 2, 5, 6, 7 sono da escludersi perchè i rispettivi monometilderivati già noti non corrispondono al nostro composto; tuttavia per stabilire con tutta certezza che il gruppo metilico non si trova nel nucleo benzenico del benzantrone sottoponemmo il prodotto in questione all'ossidazione nel modo seguente: gr. 1.5 di sostanza furono sciolti a caldo in 75 cc. di acido acetico, trattati con gr. 6 di acido cromatico sciolti in 7 cc. di acido acetico e 55 cc. di acido solforico al 15 % e scaldati per circa 1 ora a bagno maria. Il prodotto fu versato in molta acqua, lavato e trattato con ammoniaca concentrata (20 %). Il liquido ammoniacale acidificato fornì un precipitato bianco-giallastro che fu purificato per cristallizzazione dall'acido acetico diluito. Si presenta in piccole lamine bianco-gialliccie fusibili a 228° . Riscaldato con soda caustica e polvere di zinco dà la caratteristica colorazione rossa dei derivati dell'antrachinone:

	NaOH	C	H
trovato %	15.02-14.98	72.18-72.12	4.16-4.10
calcolato per $C_{16}H_{10}O_4$	15.03	72.18	3.75

La formazione di questo acido metilantrachinoncarbossilico che non corrisponde a nessuno degli acidi metilantrachinonici già noti, conferma l'esclusione del gruppo metilico nelle posizioni 2, 3, 6, 7 come pure delle posizioni Bz., poichè in tal caso avremmo dovuto ottenere l'acido antrachinon-1-carbossilico.

Azione del ioduro di etilmagnesio sul benzantrone.

La reazione fu eseguita in modo analogo alla precedente, facendo agire su gr. 20 di benzantrone, il triplo della quantità calcolata di ioduro di etilmagnesio, cioè tre molecole per una di benzantrone, come nel caso precedente e il riscaldamento a bagno maria fu protratto per 10 ore. Il prodotto fu decomposto con ghiaccio ed acido solforico diluito al 10 % ed estratto con etere. Dalla soluzione eterea, per evaporazione dell'etere si ottenne un olio, che dopo riposo, cristallizzò in aghi, che furono purificati dall'etere di petrolio. Puro si presenta in aghi gialli, esili, molto sviluppati, fusibili a 100° :

(1) D. R. P. 514,416.

	C	H
trovato %	88.38	6.05
calcolato per $C_{19}H_{14}O$	88.33	5.46

Per analogia col 4-metilbenzantrone, prima descritto, gli si può attribuire la formula di 4-etilbenzantrone. Gr. 2 sottoposti all'ossidazione con miscela cromica nel modo precedentemente indicato fornirono un acido, che purificato per cristallizzazione dall'acido acetico diluito si presenta in aghi bianco-giallicci fusibili a 195°. Questo dà la reazione caratteristica dei derivati antrachinonici ed ha una composizione corrispondente ad un acido etilanthrachinon-carbossilico:

	NaOH	C	H
trovato %	14.60-14.36	72.51-72.32	4.56-4.63
calcolato per $C_{17}H_{12}O_4$	14.28	72.85	4.28

Azione del bromuro di fenilmagnesio sul benzantrone.

La reazione fu eseguita in modo perfettamente identico a quello indicato da Clar⁽¹⁾ su gr. 28 di benzantrone e fornì con buon rendimento il fenilbenzantrone in aghi di color giallo, fusibili a 186°, perfettamente identico a quello descritto da Clar, il quale attribuisce al composto la struttura di Bz·3-fenilbenzantrone. Per poter dimostrare che il fenilbenzantrone di Clar non è un derivato Bz. ma è analogo ai nostri alchilbenzantroni lo sottoponemmo all'ossidazione con le solite modalità. Però eseguendo l'ossidazione in presenza di acido solforico diluito si notò durante l'aggiunta della miscela cromica, l'immediata formazione di un precipitato rosso, che non veniva disciolto dall'acido acetico diluito e che sfuggiva così all'ossidazione. Si eseguì allora l'ossidazione nel modo seguente: gr. 13.6 di fenilbenzantrone furono sciolti in acido acetico glaciale (cc. 250), all'ebollizione e alla soluzione bollente si aggiunse a poco a poco una soluzione acetica satura a freddo di acido cromico (54 gr. in 250 cc. di acido acetico). Durante l'aggiunta della soluzione cromica si ottenne immediatamente la formazione del solito prodotto rosso, che poi insistendo nel riscaldamento passava in soluzione. Si riscaldò a ricadere per circa tre ore; dopo circa un'ora di riscaldamento si notò la formazione di un prodotto cristallino di color giallo, insolubile in acido acetico, la cui quantità andò gradatamente aumentando, mentre la soluzione si colorava intensamente in verde. Il prodotto cristallino fu raccolto ed estratto a caldo con soluzione di carbonato sodico al 10%. La soluzione del sale di sodio lasciò separare per raffreddamento un sale cristallizzato che fu purificato per cristallizzazione dall'alcool diluito all'80%, da cui si separa in aghi molto sviluppati appena gialli:

(1) « Ber. » 65, 846 (1932).

		H ₂ O		
trovato %				13.50
calcolato per C ₂₁ H ₁₁ O ₄ Na·3H ₂ O				13.36
	Na	C	H	
trovato %	6.25	71.92	3.63	
calcolato per C ₂₁ H ₁₁ O ₄ Na	6.57	72.00	3.14	

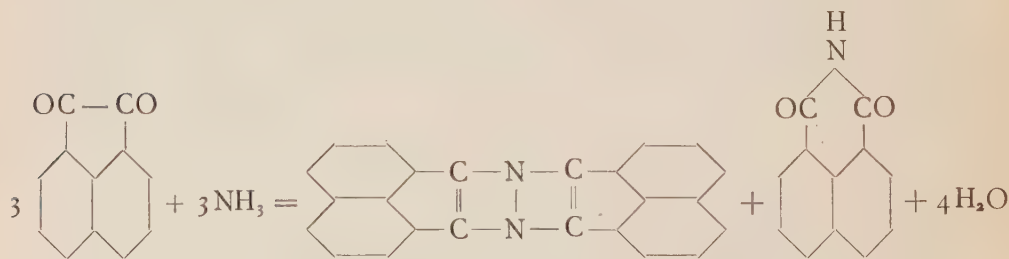
Per dissoluzione del sale di sodio in acqua calda e acidificazione con HCl si ottenne l'acido corrispondente, che si presenta come prodotto bianco che fonde a 285° decomponendosi e imbrunendo però fin da 265°:

	NaOH	C	H	
trovato %	12.47	77.28	3.92	
calcolato per C ₂₁ H ₁₂ O ₄	12.19	76.82	3.65	

Chimica. — *Azione dell'ammoniaca sull'acenaftenchinone* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di G. CHARRIER ed ELISA GHIGI, presentata dal Socio M. BETTI.

L'azione dell'ammoniaca gassosa o in soluzione sugli ortochinoni è stata studiata da parecchi ricercatori ⁽³⁾, ma nessuno aveva finora potuto rappresentare esattamente con un'equazione chimica questa reazione.

Avendo sottoposto ad un accurato esame l'azione dell'ammoniaca secca e in soluzione acquosa sull'acenaftenchinone abbiamo potuto sicuramente stabilire che tale reazione si effettua secondo lo schema seguente:



con formazione di acenaftazina e naftalimide.

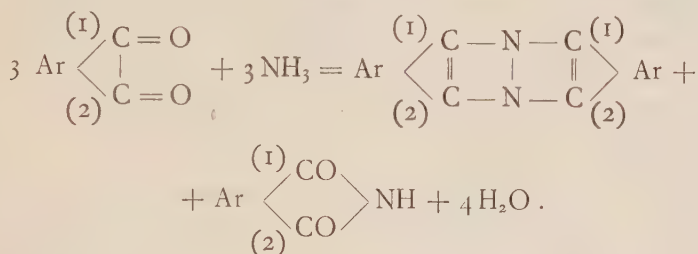
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1932.

(3) GRAEBE e A. GFELLER, Ann. 276, 9 (1893); SCHÖNBERG e NEDZATI, « Ber. », 54, 238 (1921); ANSCHUTZ, JAPP. « Ber. », 11, 211 (1878); ZINCKE, « Ber. », 12, 1642 (1879); SOMMARUGA M., 1, 145 (1880).

Anche altri ortoquinoni reagiscono coll'ammoniaca analogamente all'acenaftenchinone, formando l'imide dell'acido ortodicarbossilico corrispondente e l'azina: ad esempio reagisce molto probabilmente in tal modo il fenantrenchinone, mentre il 2 N·fenil· α , β ·nafto·1, 2, 3·triazolchinone fornisce accanto ad un composto di composizione centesimale corrispondente all'azina un'altra sostanza incolore che studiamo attualmente e che reagisce in modo interessante cogli alcali fornendo una sostanza gialla.

Anche il β ·naftochinone e l'ortobenzochinone che stiamo studiando reagiscono coll'ammoniaca; la reazione principale che si effettua tra o·chinoni e ammoniaca potrebbe quindi venir rappresentata collo schema seguente:



PARTE SPERIMENTALE.

Azione dell'ammoniaca sull'acenaftenchinone.

Gr. 20 di acenaftenchinone vennero sciolti in tetralina bollente e nella soluzione si fece passare una corrente di ammoniaca secca per circa 20 ore. Per raffreddamento si separò completamente un prodotto colorato intensamente in rosso, insieme ad una sostanza bianca. Il primo prodotto che cristallizzò dalla tetralina, si mostrò per tutti i suoi caratteri identico all'acenaftazina, già studiata da Graebe e Gfeller e da Schönberg e Nedzati:

	N
trovato %	8.68
calcolato per $\text{C}_{24}\text{H}_{12}\text{N}_2$	8.53

La sostanza bianca che si potè isolare estraendola con alcool e cristallizzandola ripetutamente da questo solvente, si presentò in aghi bianchi ben sviluppati, fusibili a 300°. La sua soluzione nell'acido solforico concentrato e freddo presentò una bellissima fluorescenza azzurra. Inoltre si mostrò insolubile e inattaccabile dagli acidi, cogli alcali a caldo passò in soluzione, che per raffreddamento lasciò separare fini aghi di un sale alcalino. Per tutti questi caratteri e per i risultati dell'analisi risultò che il prodotto in questione non era altro che naftalimide, formatasi assieme all'acenaftazina nell'azione dell'ammoniaca sull'acenaftenchinone:

	N	C	H
trovato %	7.58	73.22	3.98
calcolato per $C_{12}H_7NO_2$	7.10	73.09	3.55

Il punto di fusione della naftalimide dato da Jaubert è 300°.

Per dimostrare con tutta certezza che la naftalimide sempre si forma nell'azione dell'ammoniaca sull'acenaftenchinone ripetemmo l'esperienza già eseguita da Schönberg riscaldando in tubo chiuso 7 gr. di chinone con 15-20 cc. di ammoniaca concentrata per tre ore a 100°. Schönberg in questa reazione aveva osservato assieme all'azina la presenza di una sostanza bianca che però non aveva studiata; noi potemmo vedere che si tratta di naftalimide, poichè lasciata digerire su bagno maria con soda al 20 %, forma una soluzione che filtrata dà per trattamento con acidi dell'acido naftalico, che fu caratterizzato trasformandolo nella sua anidride, fusibile secondo i dati della letteratura ⁽¹⁾ a 274°.

Azione dell'ammoniaca sul fenantrenchinone.

La reazione fu eseguita nel modo precedentemente indicato cioè sciogliendo il chinone (gr. 5) in tetralina e saturando la soluzione con ammoniaca secca. Si ebbe subito la separazione di una certa quantità di fenantrazina (gr. 2) che si può purificare cristallizzandola dalla tetralina e si formarono soltanto piccole quantità dell'imide dell'acido difenico. Risultati migliori si ottennero facendo avvenire la reazione in tubo chiuso partendo da 5 gr. di fenantrenchinone, 20 cc. di ammoniaca concentrata e scaldando a 125-135° per 8-10 ore. Si ottenne anche qui l'azina che colora intensamente in azzurro l'acido solforico concentrato ed il liquido ammoniacale per acidificazione fornì un prodotto che purificato attraverso successive soluzioni in soda al 2 % e riprecipitazioni ed infine per cristallizzazione dall'alcool fuse a 217° e si presentò in aghi bianchi splendenti.

I suoi caratteri fisici unitamente al comportamento chimico ci mostrano trattarsi dell'imide dell'acido difenico.

Azione dell'ammoniaca sul 2 N·fenil·α, β·nafto·1, 2, 3·triazolchinone.

Gr. 5 di chinone furono trattati con 20 cc. di ammoniaca concentrata e scaldati in tubo chiuso a 130-140° per 10 ore. Si ottenne così un prodotto colorato in giallo che fu estratto ripetutamente con alcool e purificato per cristallizzazione dalla tetralina. Si presenta come polvere di color giallo che dà con acido solforico concentrato colorazione rossa. Non si poté determinarne il punto di fusione perchè questo giace al disopra di 330°.

(1) JAUBERT G., 25, 1, 245 (1895).

	N
trovato %	21.57
calcolato per $C_{32}H_{18}N_8$	21.78

Dalle acque alcooliche per concentrazione si ottenne un prodotto bianco cristallino che bollito cogli alcali divien giallo e che stiamo ancora studiando.

Azione dell'ammoniaca sul β -naftochinone e sull'ortobenzochinone.

Queste reazioni sono in corso di studio, ma i dati che già possediamo ci fanno prevedere analogia di comportamento coi casi precedentemente studiati.

Chimica. — *Soluzioni solide per precipitazione ed isomorfismo tra complessi del platino e del tellurio tetravalente.* — II. *Esame del clorotellurito di cesio e dei sistemi $Cs PtCl_6$ – $Cs TeCl_6$, $Rb_2 PtCl_6$ – $Cs_2 PtCl_6$* ⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di G. NATTA e R. PIRANI, presentata dal Socio G. BRUNI.

In una prima Nota⁽³⁾ si era discussa la struttura dei cloroplatinati di cesio e di rubidio. In questa seconda Nota viene esaminata la struttura del clorotellurito di cesio, $Cs_2 TeCl_6$, e dimostrato che sussiste uno stretto isomorfismo tra questo ed i precedenti composti in base all'esame röntgenografico delle loro soluzioni solide ottenute per precipitazione.

Il metodo della precipitazione nella preparazione di soluzioni solide era stato già prima di ora applicato da uno di noi ai sistemi tra idrossidi ed ossidi di metalli bivalenti⁽⁴⁾ e da Barth e Lunde ad alcuni sistemi tra alogenuri di argento⁽⁵⁾. In tutti i casi studiati ha dato ottimi risultati e si può perciò ritenere, salvo alcune limitazioni che vedremo in seguito, come un metodo di applicazione generale.

Esame del clorotellurito di cesio. — Il clorotellurito di cesio si ottiene facilmente per precipitazione di soluzioni di biossido di tellurio in acido cloridrico concentrato con soluzioni di cloruro di cesio, sotto forma di piccoli

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1932.

(3) G. NATTA e R. PIRANI, «Rend. Accad. Lincei», 15, 6a, 92 (1932).

(4) G. NATTA e L. PASSERINI, «Gazz. Chim. Ital.», 58, 597 (1928); 59, 129 (1929).

(5) T. BARTH e G. LUNDE, «Norske geol. Tidsskrift», 8 (1928); «Zeitschr. f. physik. Chem.», 122, 295 (1926).

ottaedri gialli. Fu descritto già da Wheeler⁽¹⁾, da Gutbier e Flury⁽²⁾ come monometrico.

I fotogrammi ottenuti col metodo delle polveri con anticatodo di ferro (vedi tabella I), analogamente a quelli del cloroplatinato di cesio, si ordinano nel sistema cubico. Il lato della cella risulta $a = 10.45 + 0.01 \text{ \AA}$, il volume $1141.2 \cdot 10^{-24} \text{ cc}$. La densità, ammettendo che la cella contenga 4 molecole $\text{Cs}_2 \text{TeCl}_6$, risulta 3.51.

I fotogrammi del clorotellurito di cesio, a parte lo spostamento delle linee dovuto alla diversa costante reticolare, appaiono molto simili a quelli del cloroplatinato, non presentano faccie ad indici misti. Ad essi si devono perciò estendere le osservazioni fatte nella Nota precedente riguardo alla struttura reticolare dei cloroplatinati.

Si osserva infatti un accordo soddisfacente tra intensità sperimentali e quelle calcolate per la struttura ($\text{O}_h 5$) per valori di u vicini a 0.25, e quindi leggermente più alti di quello trovato per il cloroplatinato di cesio. I valori delle intensità calcolate per diversi valori di u compresi tra 0.20 e 0.25 sono raccolti nelle ultime colonne della tabella I dove possono confrontarsi con le intensità osservate (colonna 5^a).

Per $u = 0.25$ le distanze Cl-Cs e Cl-Te risultano rispettivamente: 3.71 e 2.62 \AA . Quella cloro-cloro risulta la stessa, sia che si tratti di atomi vicini appartenenti alla stessa molecola od a molecole diverse, e risulta eguale a 3.72 \AA . Si calcolerebbe così per l'ione cloro un raggio di 1.86 \AA , e per quello telluroso un raggio di 0.76 \AA , valori che concordano con quelli già noti⁽³⁾.

Tra i composti sinora esaminati del tipo $\text{A}_2 \text{BX}_6$, dove il radicale (BX_6) è un ione negativo bivalente, il clorotellurito di cesio è quello che possiede le maggiori costanti reticolari; ad esso, come pure ai complessi cloropiombici e cloropalladici, corrispondono valori del parametro u uguali o vicinissimi a 0.25, mentre per i complessi aventi atomi coordinanti di diametro minore, quali il silicio, il germanio, lo stagno ed il platino, si osservano valori compresi tra 0.20 e 0.24, tanto minori quanto minore è il raggio dell'atomo coordinante.

Sistema $\text{Rb}_2 \text{PtCl}_6$ - $\text{Cs}_2 \text{PtCl}_6$. — Tra i cloroplatinati di cesio e di rubidio si osserva una differenza delle costanti reticolari di 0.32 \AA , che, malgrado la notevole differenza tra i raggi dei due cationi (21 % del raggio del catione minore), non rappresenta, data la complessità della molecola, che poco più del 3 % del lato della cella e potrebbe giustificare una larga miscibilità tra i due sali.

(1) H. C. WHEELER, « Am. Journ. Science », 3, 45, 267.

(2) A. GUTBIER e F. FLURY, « Journ. f. prakt. Chem. », 2, 83, 145 (1910).

(3) V. M. GOLDSCHMIDT, « Geoch. Verteilungsges. der Elemente, Norske Vidensk. Ak. », VII, Oslo (1926); PAULING, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 49 (1) 765 (1927); W. G. WYCKOFF, *The structure of crystals*. 2^a Ed., p. 192. New-York (1931).

Cs₂ Te Cl₆-Fe ant.

TABELLA I.

h k l	sen $\theta/2$	d	a	I oss	$\frac{nS^2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$			
					u=0.20	u=0.22	u=0.23	u=0.25
1 1 1	0.1736	5.570	9.67	dd	487	291	279	170
2 0 0	—	—	—	—	14	22	24	27
2 2 0	0.2672	3.015	10.20	dd	1210	1060	978	976
1 3 1	0.3145	3.071	10.20	dd	197	206	224	266
2 2 2	—	—	—	—	807	954	999	642
4 0 0	0.3420	2.565	10.25	dd	—	—	—	—
4 0 0 β	0.3746	2.581	10.30	mf	1363	1530	1620	1700
3 1 3	0.4067	2.378	10.35	dd	814	232	230	203
4 0 2	—	—	—	—	3	84	55	49
4 2 2	0.4591	2.106	10.35	d	935	1038	1090	1126
1 5 1	0.4848	1.995	10.35	d	834	608	453	170
3 3 3					38	2	2	57
4 4 0	0.5287	1.828	10.35	f	1555	2025	2210	2240
5 3 1	0.5495	1.760	10.38	dd	560	542	471	299
6 0 0	—	—	—	—	8	< 1	3	9
4 4 2					285	108	65	37
6 0 2	0.5901	1.638	10.38	m	1836	1244	1080	873
3 5 3	—	—	—	—	38	88	106	135
6 2 2	0.6156	1.571	10.42	md	667	1173	1403	1627
4 4 4	0.6428	1.504	10.42	m	674	1015	1200	1288
1 7 1	0.6648	1.455	10.40	dd	94	39	48	124
5 5 1					920	620	484	124
6 4 0	—	—	—	—	< 1	9	19	31
6 4 2	0.6947	1.392	10.42	f	2276	1825	1640	1476
7 3 1	0.7153	1.351	10.39	m	< 1	41	15	230
5 5 3					416	330	297	115
8 0 0	0.7431	1.301	10.42	m	476	635	732	835
7 3 3	—	—	—	—	79	30	9	198
8 0 2	0.7716	1.254	10.38	dd	320	142	73	27
6 4 4					66	24	25	27

Segue: TABELLA I.

h k l	sen $\theta/2$	d	a	I oss.	nS^2 $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$			
					u=0.20	u=0.22	u=0.23	u=0.25
6 6 0 } 8 2 2 }	0.7916	1.222	10.38	mf	1280 85	590 377	441 507	325 650
5 5 5 } 7 5 1 }	—	—	—	—	483 383	287 226	183 135	34 204
6 6 2	0.8090	1.195	10.42	m	160	680	955	1240
8 0 4	0.8307	1.163	10.42	ff	1300	1951	2535	2984
9 1 1 } 7 5 3 }	0.8434	1.146	10.44	d	278 55	397 46	337 68	97 194
10 0 2 } 8 4 2 }	0.8557	1.023	10.44	dd	— 968	— 353	— 162	— 48
6 6 4	0.8718	1.110	10.42	mf	1465	918	746	588
9 3 1	0.8829	1.095	10.44	dd	135	410	412	187
8 4 4	0.9087	1.064	10.44	ff	870	1740	2220	2725
7 5 5 } 7 7 1 }	0.9261	1.044	10.40	dd	315 < 1 < 1	207 8 78	152 12 111	89 89 89
9 3 3 } 10 0 0 }	—	—	—	—	22 68	5 53	< 1 36	5 22
8 6 0 }	—	—	—	—	—	—	—	—
10 0 2 } 8 6 2 }	0.9446	1.023	10.44	f	1493 884	1082 902	798 983	544 1083
9 5 1 } 7 7 3 }	0.9563	1.011	10.45	f	838 59	1052 62	832 25	171 85

Data la decomponibilità dei sali ad alta temperatura e l'impossibilità quindi di ottenere la formazione di soluzioni solide per solidificazione dei sali fusi, ne abbiamo tentato la preparazione per precipitazione, trattando con un eccesso di soluzioni di $PtCl_4$ soluzioni a concentrazione nota dei cloruri di Rb e Cs. Per ottenere soluzioni solide di composizione omogenea risulta necessario precipitarle da soluzioni assai concentrate di cloruri, altrimenti si ottengono fotogrammi con linee molto allargate che mettono in evidenza la loro non omogeneità. È utile per lo stesso scopo mantenere

dopo la precipitazione i precipitati per un certo tempo a caldo in seno alle acque madri.

È stata controllata per alcune soluzioni solide la composizione analiticamente, calcinando i cloroplatinati in corrente di idrogeno, sciogliendo i cloruri alcalini, pesandoli e trasformandoli in cloruro d'argento; come controllo di questa analisi indiretta (che partendo da 0,5 gr. da una approssimazione di circa 1 %) si è tenuto conto anche del peso dei cloroplatinati di partenza e del platino residuo.

TABELLA II.

Composizione delle soluzioni solide	<i>a</i> sperimentale	<i>a</i> teorico	V in 10 ⁻²⁴ cc.
Rb ₂ PtCl ₆	9.83	—	949.9
25 Cs ₂ PtCl ₆ -75 % Rb ₂ PtCl ₆	9.91	9.91	973.2
56 % Cs ₂ PtCl ₆ -44 % Rb ₂ PtCl ₆	10.02	10.01	1006.0
75 % Cs ₂ PtCl ₆ -25 % Rb ₂ PtCl ₆	10.07	10.07	1021.1
Cs ₂ PtCl ₆	10.15	10.15	1045.7
50 % Cs ₂ PtCl ₆ -50 % Cs ₂ TeCl ₆	10.29	10.30	1088.0
25 Cs ₂ PtCl ₆ - 50 % Cs ₂ TeCl ₆	10.375	10.375	1116.8
Cs ₂ TeCl ₆	10.45	—	1141.2

Dai fotogrammi delle soluzioni solide, che, a parte le differenze dovute alla variazione di costante reticolare, sono identici a quelli dei due componenti, si sono trovati per le dimensioni delle celle (vedi tabella II) valori intermedi fra quelli di due sali puri, fra i quali si deve quindi ammettere una miscibilità completa allo stato solido. La variazione del lato della cella risulta proporzionale alla concentrazione d'accordo con la legge di Vegard.

Sistema Cs₂ PtCl₆-Cs₂ TeCl₆. — La differenza tra il lato della cella elementare del cloroplatinato e quello del clorotellurito di cesio è 0,30 Å. Si dovrebbe perciò prevedere come nel caso precedente una miscibilità completa. In pratica è risultato più difficile in questo caso ottenere soluzioni solide omogenee per precipitazione, forse a causa della diversa solubilità dei due sali. Infatti le soluzioni solide precipitate sono leggermente più ricche in platino e meno in tellurio rispetto alle soluzioni di cloruro di partenza e la differenza risulta tanto maggiore quanto minore è la concentrazione in tellurio nella soluzione precipitante. Inoltre è necessaria una lunga digestione a caldo del precipitato nelle acque madri per ottenere una

sufficiente omogenizzazione nelle soluzioni solide da permettere l'impiego dell'analisi röntgenografica.

Nelle soluzioni solide più ricche in tellurito, che si sono potute meglio studiare, si è osservato per la costante reticolare un sufficiente accordo con la legge di Vegard, come si osserva nella stessa tabella II. Per quella parte del sistema che è al di sotto del 50 % di tellurito non si sono potuti avere fotogrammi chiari e le soluzioni solide precipitate apparivano sempre molto più povere in tellurio delle acque madri. Non si hanno però elementi sufficienti per affermare che esista una lacuna di solubilità.

Chimica (Chimica Agraria): — *Distribuzione dei nitrati ed « organicazione » dell'azoto nelle foglie delle piante verdi*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di E. PARISI e G. DE VITO, presentata dal Socio M. BETTI.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze, non soltanto non è possibile precisare il meccanismo di reazione attraverso il quale le piante superiori pervengono alla formazione dei primi corpi organici azotati, ma non è nemmeno stabilito in modo indiscutibile quale sia la sede di una così importante sintesi vegetale.

Mentre in un primo tempo era stato ammesso con Sachs⁽³⁾ che l'organicazione dell'azoto avesse luogo nelle parti verdi della pianta e sotto l'azione della luce, Autori più recenti⁽⁴⁾ ritengono che la sede più probabile del fenomeno sia la radice. A base di tale supposizione viene posta la constatazione già fatta da diversi sperimentatori⁽⁵⁾ circa la deficienza o addirittura l'assenza dei nitrati nelle foglie: « Solamente nelle radici — è stato affermato — si riscontrano nitrati e niente più nelle foglie, per cui se ne deduce che questi vengono consumati prima che arrivino a tali organi »⁽⁶⁾.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1932.

(3) J. SACHS, « Bot. Ztg. », 5, 63 (1862); cfr. BENECKE-JOST, *Pflanzenphysiologie*, Bd. I, 244 (Edit. G. Fischer, Jena, 1924).

(4) MÜLLER-TURGAU, « Bot. Jahrb. », I, 319 (1880); cfr. W. PFEFFER, *Pflanzenphysiologie*, I, 403 (Edit. W. Engelmann, Leipzig, 1897); B. FRANK, « Landw. Jahrb. » (1888); C. ACQUA, « Annali di Botanica », II, 47, 281, 416 (1913); A. DE DOMINICIS, « Staz. sper. agr. ital. », 54, 425 (1921).

(5) HOFFMANN, « Arch. Pharm. » (1865), p. 193; HOSAEUS, « Jahresber. Agrik. Chem. » (1865), p. 87; FRÜHLING, « Landw. Versuchs. Stat. » (1867), p. 150; FRANK, loc. cit.; SOROKIN, « Just. Jahresber. » (1875), p. 871; cfr. CZAPEK, *Biochemie der Pflanzen*, II, 298 (Edit. G. Fischer, Jena, 1920).

(6) C. ACQUA, loc. cit.

Quanto alla natura fotochimica dell'organizzazione dell'azoto supposta dal Sachs, e pienamente accettata da Emmerling⁽¹⁾, Pagnoul⁽²⁾, Schimper⁽³⁾ ed altri⁽⁴⁾, perchè in accordo con le loro esperienze, essa venne in seguito negata da Zaleski⁽⁵⁾, che osservò un incremento di azoto proteico nelle foglie di *Helianthus* staccate dalla pianta e conservate al buio col picciolo immerso in una soluzione nutritiva contenente nitrati e zuccheri riduttori, e dal Suzuki⁽⁶⁾, che riconobbe un incremento di azoto organico nelle piantine di frumento allevate in una soluzione nutritiva ricca di nitrati e quindi tenute per una settimana all'oscuro sopra un substrato ricco di glucosio.

In base a queste ricerche H. Euler⁽⁷⁾ ha ritenuto di poter concludere: « die eigentliche Nitrataassimilation grüner Pflanzenteile kein photochemischer Vorgang ist ».

Con le esperienze che sono riferite in questa Nota noi ci siamo proposti di portare un contributo alla conoscenza dell'organizzazione dell'azoto nelle foglie delle piante verdi prendendo in esame con sicuri metodi analitici le diverse sostanze contenute nei vasi conduttori e nel tessuto assimilatore della foglia. Anzitutto ci siamo occupati della presenza e della distribuzione dei nitrati nelle foglie⁽⁸⁾.

Data la profonda diversità anatomica e funzionale dei tessuti che compongono il picciolo e le nervature da una parte ed il lembo fogliare dall'altra abbiamo ritenuto che tali tessuti dovessero venire analizzati separatamente. In tal modo abbiamo potuto riconoscere, sperimentando su foglie di piante diversissime, che mentre il lembo è spesso assai povero di nitrati, contendone talvolta soltanto delle tracce, le nervature, e specialmente i piccioli, ne sono relativamente ricchi e spesso contengono più nitrati di tutti gli altri organi della pianta, compresa la radice (Tab. I).

Così ad esempio nelle foglie del girasole il picciolo contiene in luglio oltre 600 mgr. di azoto nitrico per 100 gr. di sostanza secca; tale percentuale si abbassa a 380 mgr. nelle nervature principali e a 170 mgr. nelle

(1) A. EMMERLING, « Die Landw. Vers. Stat. », 24, 113 (1880).

(2) A. PAGNOUL, « Annales Agronomiques », 7, 5 (1881).

(3) F. W. SCHIMPER, « Bot. Ztg. », 46, 65 (1888); FLORA, 73, 207 (1890); cfr. BE-NECKE-JOST, loc. cit.

(4) E. LAURENT, *Recherches sur la synthèse des substances albuminoïdes par les végétaux*, Bruxelles, 1903; OSKAR BAUDISCH, « Über Nitrat- und Nitritassimilation, Habilitationsschrift-Centralblatt für Bakt. », 32, nn. 20-25 (1912); BAUDISCH e MAYER, « Z. Physiol. Chem. », 89, 175 (1914).

(5) W. ZALESKI, « Bot. Centralbl. », 87, 281 (1901); « Ber. Bot. Ges. », 15, 536 (1897).

(6) U. SUZUKI, « Bull. Coll. Agric. Tokyo », vol. II, p. 409, vol. III, p. 241 (1898); cfr. F. CZAPEK, loc. cit., p. 298.

(7) H. EULER, *Grundlagen und Ergebnisse der Pflanzenchemie*, II e III, p. 132 (Edit. F. Vieweg, 1909).

(8) Per determinare l'azoto nitrico ci siamo serviti del metodo gasvolumetrico di SCHLOESING recentemente reso di più facile e spedita esecuzione da E. PARISI e G. DE VITO [« Italia Agricola », 69, 700 (1932)].

secondarie, mentre nel parenchima fogliare si riscontrano soltanto tracce di nitrati.

L'analisi delle foglie di canapa ci porta alle stesse conclusioni: dalle tracce di azoto nitrico del lembo si passa a 300 mgr. nelle nervature principali e a 600 mgr. nel picciolo, sempre per 100 gr. di sostanza secca.

TABELLA I.

*Azoto nitrico contenuto nelle radici, nei piccioli (o guaine)
e nei lembi fogliari di alcune piante (mgr. ‰ di sostanza secca).*

N.	Data	Genere e specie	Radice	Piccioli (o guaine)	Lembi fogliari
1	26 febbraio	Triticum vulgare.	140	150	40
2	1 giugno	Beta vulgaris (var. saccharifera) .	420	1.100	120
3	20 giugno	Beta cycla	tracce	680	157
4	10 luglio	Helianthus tuberosus	tracce	1.035	20
5	20 luglio	Helianthus annuus	—	603	tracce
6	10 luglio	Cucurbita Pepo	tracce	202	40
7	15 luglio	Vitis vinifera	tracce	190	tracce
8	15 luglio	Morus alba	—	1.450	327
9	20 luglio	Cannabis sativa	—	617	tracce
10	10 luglio	Polygonum Baldschuanicum . .	—	909	tracce
11	1 agosto	Amarantus retroflexus	1.800	3.160	30

La presenza di notevolissime quantità di nitrati nei piccioli e nelle nervature e la loro diminuzione e talvolta la loro quasi totale scomparsa nel lembo fogliare rende estremamente probabile che l'azoto nitrico, passando nel lembo, vi subisca l'organizzazione.

In occasione delle determinazioni dei nitrati nelle foglie di bietola da zucchero abbiamo potuto constatare un fatto curioso che riteniamo non senza interesse anche dal punto di vista dell'organizzazione dell'azoto.

Il campo di bietole, dal quale venivano prelevati i campioni di foglie, era stato parzialmente invaso dalla *Cuscuta pentagona*.

Come è noto, questa fanerogama parassita avvolge a spirale il suo fusto filiforme attorno al picciolo delle foglie delle barbabietole e, per mezzo dei suoi austori si fissa ed assorbe dalla pianta ospite quanto occorre al suo nutrimento. Il succo contenuto nel picciolo della foglia di bietola zuccherina, come risulta da alcune nostre ricerche ancora inedite, è ricco, oltre

che di azoto nitrico e di azoto amminico, di zuccheri costituiti da glucosio, saccarosio e piccole quantità di fruttosio. Nel succo che si ricava dai rami della cuscuto abbiamo potuto facilmente identificare tutte queste sostanze ad eccezione di una sola, dell'azoto nitrico che il parassita pare non assorba dalla pianta ospite forse perchè, mancando di foglie verdi, non avrebbe la possibilità di elaborarlo.

Se, come si è concluso più sopra, il lembo fogliare è sede di organizzazione dell'azoto è ovvio dedurre ch'esso deve contenere più azoto amminico ⁽¹⁾ del picciolo o della guaina.

Tale deduzione venne pienamente confermata dalle analisi da noi eseguite su foglie di frumento (Tab. II) e su foglie di bietola (Tab. III).

TABELLA II.

Foglie di frumento.

Data	Azoto amminico mgr. ‰ sost. secca		Zuccheri riduttori gr. ‰ sost. secca	
	Guaina	Lembo	Guaina	Lembo
14 aprile	219	288	7.85	3.90
15 aprile	210	315	5.86	3.12
16 aprile	177	291	6.85	3.10
2 maggio	201	378	17.02	6.50
3 maggio	197	462	13.70	4.55
4 maggio	147	312	13.02	5.86

Le analisi, i cui risultati sono riportati nella Tab. III, vennero eseguite su campioni di piccioli e di lembi fogliari prelevati in ore diverse della giornata e precisamente alla mattina (ore 4) e nel pomeriggio (ore 16).

Lo scopo della ricerca era di verificare se la luce solare avesse un'influenza sensibile sulla formazione dei composti amminici. I risultati furono decisamente e costantemente positivi. Tanto i lembi fogliari che i piccioli contengono nel pomeriggio più azoto amminico che nelle prime ore della mattina. Questo fatto sta in accordo con l'ipotesi che la luce solare abbia una notevole influenza sull'organizzazione dell'azoto almeno nelle parti verdi

(1) L'azoto amminico venne dosato col metodo di VAN SLYKE (« Ber. », 44, 1684 (1911); « Abderhalden's Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden », Abt. I, « Chemische Methoden », Teil 7, p. 263). Nell'apparecchio veniva introdotto il succo delle piante decalcato e concentrato a pressione ridotta.

delle piante e contrasta con l'opinione di Godlewski ⁽¹⁾ e di André ⁽²⁾ secondo i quali la luce favorirebbe soltanto la condensazione dei primi composti organici azotati a sostanze proteiche. « È legittimo ammettere — ha scritto l'André — che durante la notte le foglie elaborino a spese dell'azoto minerale dei composti amminici e questi alla luce solare si trasformino in composti proteici ». Se ciò fosse vero i succhi delle foglie dovrebbero essere più ricchi di azoto amminico alla mattina che alla sera.

Dall'esperienza è invece risultato il contrario.

TABELLA III.

Bietola zuccherina.

Data	Azoto amminico mgr. ‰ sost. secca		Zuccheri riduttori gr. ‰ sost. secca	
	Piccioli	Lembi	Piccioli	Lembi
1 giugno — ore 4	98	122	4.75	0.97
» » » 16	122	159	5.89	2.98
2 » » 4	88	122	6.42	0.77
» » » 16	159	169	8.00	1.23
3 » » 4	78	112	6.76	0.62
» » » 16	112	159	9.41	1.65
16 » » 4	89	101	—	—
» » » 16	102	122	17.60	1.30
17 » » 4	77	99	—	—
» » » 16	91	152	21.60	3.82

In quasi tutti i campioni nei quali è stato dosato l'azoto amminico vennero anche dosati gli zuccheri. Il contenuto in zuccheri presentò valori più elevati nei piccioli che nei lembi fogliari e com'era prevedibile risultò maggiore nel pomeriggio che alla mattina. Queste ultime osservazioni verranno sviluppate in un lavoro a parte sulla formazione degli zuccheri nelle piante.

(1) E. GODLEWSKY, « Bull. Ac. Sci. Cracovia », p. 313 (1903); cfr. CZAPEK, loc. cit., 208.

(2) G. ANDRÉ, *Chimie Agricole. Chimie Végétale*, I, p. 356 (Edit. Baillières, Paris, 1924).

Fisiologia (Chimica Fisiologica). — *Contributo alla conoscenza del valore nutritivo degli embrioni di grano* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una nostra precedente Nota ⁽³⁾ abbiamo riferito ricerche sperimentali, dalle quali è risultato, che il valore nutritivo dei semi di alcuni cereali [grano (*Triticum vulgare* Vill.), granturco (*Zea mais* L.), orzo (*Hordeum vulgare* L.)], studiato in rapporto all'accrescimento dei ratti albinì in via di sviluppo, che li assumano come alimento esclusivo, varia a seconda che si tratti di semi di piccola o grande dimensione; e precisamente esso è maggiore nel primo caso, minore nel secondo.

Tale vantaggio, poteva essere spiegato tenendo presente il fatto, che il rapporto quantitativo tra i costituenti chimici della porzione embrionale e quelli della restante parte del chicco è più elevato nel caso dei chicchi piccoli, che nel caso dei grossi; e considerando, che è oggi noto e dimostrato il più elevato valore biologico e plastico dei costituenti chimici della porzione embrionale rispetto ai costituenti chimici della porzione rimanente.

Allo scopo di controllare l'esattezza di una tale interpretazione, abbiamo creduto utile istituire esperienze, destinate ad una ulteriore opportuna analisi del fatto fondamentale osservato.

Precisamente ci siamo proposti di studiare — collo stesso metodo precedente e sperimentando su ratti albinì in via di sviluppo — il valore costruttivo di un determinato grano, integrato da adatte quantità di embrioni ricavati dalla stessa qualità di grano.

E poichè anche da nostre personali recenti osservazioni ⁽⁴⁾, oltre che da quelle concordanti di precedenti AA., è risultato che il grano, somministrato come alimento esclusivo, rivela una sicura deficienza salino-proteica, abbiamo voluto anche approfittare dell'occasione, per stabilire — con prove per il momento soprattutto orientative — se la sola aggiunta di embrioni, insieme con la quantità di sostanze minerali risultata necessaria per il normale sviluppo degli animali, bastasse a correggere convenientemente o meno la deficienza totale del grano; se cioè, elevando la quota dei costituenti embrionali, si riuscisse a correggere anche la deficienza proteica

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1932.

(3) FAMIANI V., *Contributo alla conoscenza del valore nutritivo di alcuni cereali*. « Rendiconti R. Accad. dei Lincei », vol. XIV, p. 306 (1931).

(4) FAMIANI V., *Sul valore alimentare del grano (semi di Triticum vulgare Vill.)*. « Il Problema Alimentare », vol. 2 (1932).

del grano, che in caso positivo sarebbe perciò risultata quantitativa più che qualitativa.

Vogliamo in questa Nota brevemente riferire i risultati delle nostre esperienze.

Il grano e gli embrioni necessari per le nostre ricerche ci furono gentilmente forniti dalla S. A. Gio. e F.lli Buitoni (Sansepolcro).

Abbiamo adoperato 18 ratti albinì di nidiata diverse, ma provenienti dallo stesso ceppo originario, e tutti di gr. 31-35 di peso, che a 30-31 giorni di età vennero divisi in gruppi ed alimentati esclusivamente come sègue:

Gruppo I: solo grano (finemente tritato);

Gruppo II: grano (gr. 75), più embrioni (gr. 25) ottenuti dalla molitura della stessa qualità del grano studiato;

Gruppo III: grano (gr. 75), più embrioni (gr. 25), più miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker, in ragione del 4 % dell'alimento totale offerto;

Gruppo IV: grano (gr. 75), più embrioni (gr. 25), più miscuglio salino (4 %), più caseina (5 %);

Gruppo V: alimento misto variato.

Gli animali, insieme con acqua a volontà, avevano a disposizione alimento in abbondanza, di cui assunsero sempre quantità notevoli. Per ognuno di essi si studiarono, durante un periodo di 100 giorni, le variazioni del peso corporeo, le modificazioni funzionali dell'apparato genitale, la funzione riproduttiva, l'aspetto ed il comportamento generale.

Riuniamo nell'unita tabella i principali dati raccolti nei riguardi del peso corporeo e dell'apparato genitale.

Risulta da un esame di detta tabella, che gli animali sottoposti alla dieta di solo grano presentarono presto un netto arresto dello sviluppo, guadagnando in peso solo pochissimo, e mostrarono una scarsa resistenza, in quanto tre su quattro morirono durante il periodo di osservazione.

In accordo coi precedenti risultati ottenuti sperimentando con semi di diversa dimensione, un vantaggio evidente, per quanto limitato, apportò l'aggiunta degli embrioni al grano, ed un solo animale del gruppo morì durante l'esperimento.

L'aggiunta al grano di embrioni e di miscuglio salino insieme, determinò invece vantaggi assai notevoli, portando la curva di accrescimento degli animali ad un livello assai vicino a quello normale; e benefici di grado pressochè eguale furono osservati per l'aggiunta al grano di embrioni, sali e caseina insieme.

Numero e sesso degli animali	Alimento	Peso iniziale	Comportamento del peso corporeo durante il periodo di esperimento : peso in grammi dopo giorni :										Aumento assoluto del peso	Aumento peso percentuale	Osservazioni
			10	20	30	40	50	60	70	80	90	100			
1♂	Grano	35	45	48	56	62	62	63	67	63	61	—	26	74	Muore dopo 97 giorni. Peso g. 52
2♂		34	42	43	50	51	55	57	55	56	58	—	24	70	Muore dopo 97 giorni. Peso g. 46
3♀		36	45	51	57	57	55	62	63	67	67	55	19	52	
4♀		36	45	55	58	60	68	62	—	—	—	—	26	72	Muore dopo 64 giorni. Peso g. 58
5♂	Grano + em- brioni di grano	32	44	55	67	70	80	81	—	—	—	—	49	153	
6♂		32	45	52	62	66	74	80	80	72	67	57	25	78	
7♀		35	50	60	63	69	72	73	72	75	78	64	29	83	
8♀		31	47	54	63	65	70	70	72	77	79	80	49	158	Si schiude l'ostio vag. dopo 75 g.
9♂	Grano + em- brioni di grano + miscuglio salino	32	54	76	95	115	125	118	130	132	140	156	124	387	
10♂		35	65	90	102	130	152	155	146	169	168	178	143	408	
11♀		31	40	64	74	100	108	124	114	119	132	115	84	270	Si schiude l'ostio vag. dopo 38 g.
12♂	Grano + em- brioni di grano + miscuglio salino + caseina	33	60	78	105	110	126	139	150	162	172	182	149	451	
13♀		32	51	73	76	95	97	118	150	121	132	158	126	393	Si schiude l'ostio vag. dopo 29 g. (gravida alla fine dell'esp.).
14♀		32	58	70	92	95	109	135	105	115	118	122	90	281	Si schiude l'ostio vag. dopo 37 g.
15♂	Alimento misto	32	66	84	105	119	130	157	165	175	180	187	155	483	
16♂		35	59	80	104	110	122	134	157	164	170	182	147	419	
17♀		32	52	61	76	92	98	126	140	155	150	170	138	431	Si schiude l'ostio vag. dopo 43 g.
18♀		32	45	52	69	83	90	85	98	106	116	134	102	318	Si schiude l'ostio vag. dopo 43 g.

Nei riguardi del comportamento dell'apparato genitale e della funzione riproduttiva, i maschi tenuti a solo grano ed a grano più embrioni, mostrarono testicoli più piccoli dei normali, e protrusione del pene flaccido, mentre tutti gli altri presentarono testicoli affatto normali, ed in epoca normale divennero sessualmente attivi. Delle femmine tenute a grano ed a grano più embrioni, una sola — n. 8 — presentò la schiusura dell'ostio vaginale, ma solo con notevole ritardo, e non fu mai fecondata; quelle degli altri gruppi presentarono la schiusura tutte in epoca normale, e, fecondate dai rispettivi maschi, condussero a termine più di una gravidanza, senza mai però — ad eccezione di quelle tenute ad alimento misto — allattare i piccoli partoriti.

Qualcuno dei ratti tenuti a grano ed a grano più embrioni presentò aspetto alquanto tozzo, e torpore di movimenti; quelli, che morirono durante il periodo di esperimento, nei giorni che precedettero la morte, lasciarono osservare cianosi ed intensa dispnea, che andò a mano a mano accentuandosi, mentre diminuiva in pari tempo il peso corporeo. Tutti gli altri animali apparvero sempre normali nell'aspetto e nel comportamento generale.

Riassumendo, i fatti principali che derivano dalle ricerche su riferite sono, a nostro parere, i seguenti:

1° la dieta esclusiva di grano ha permesso ai nostri ratti solo assai limitatamente i fenomeni costruttivi di accrescimento, ed ha fortemente minorato la loro resistenza;

2° l'aggiunta del 25 % di embrioni alla dieta esclusiva di grano ha permesso agli animali un accrescimento migliore che nel caso precedente, per quanto sempre limitato, conferendo loro anche una maggiore resistenza;

3° l'aggiunta al grano del 25 % di embrioni e del 4 % di miscuglio salino, ha fatto sì che gli animali in tal modo alimentati presentassero accrescimento e riproduzione pressochè normali, senza che peraltro fosse possibile l'allattamento;

4° l'aggiunta al grano di embrioni, sali e caseina non ha invece mostrato di favorire ulteriormente gli effetti determinati dalla sola aggiunta di embrioni e di miscuglio salino.

Ci crediamo pertanto autorizzati a pensare che i migliori effetti ottenuti nelle nostre precedenti osservazioni, con i semi di piccole dimensioni di *Triticum vulgare Vill.* (grano), in confronto con i corrispondenti grossi, siano da attribuire appunto al maggior quantitativo di costituenti embrionali contenuto — a parità di peso — nei primi.

Inoltre, in base ai risultati recenti, possiamo ritenere, che la deficienza proteica, che il grano presenta, possa essere corretta nella massima parte, se pure non completamente, mediante l'aggiunta di opportune quantità di embrioni; o che, in altri termini, la deficienza proteica del grano sia, in massima parte, da riferire a questione di quantità, più che di qualità.

Tanto abbiamo voluto nella presente Nota fissare, mentre ci riserviamo di ritornare sull'argomento, sulla base di successive indagini.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Alimentazione con semi di leguminose e riproduzione*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto che relazione esiste tra alimentazione e riproduzione. Il problema, dal punto di vista generale, di recente, è stato ampiamente trattato da G. Quagliariello⁽³⁾. Alterazioni morfologiche degli organi genitali e disturbi della funzione riproduttiva sono stati descritti da vari AA. per effetto di alimentazioni quantitativamente o qualitativamente deficienti.

L'ipoalimentazione e il digiuno completo, l'assenza o la deficienza nel regime dietetico di uno o di vari fattori alimentari (protidi, sali minerali, vitamine, ecc.) possono invero essere causa di alterazioni morfologiche e funzionali tali da danneggiare o compromettere più o meno seriamente la normale riproduzione degli animali.

A questo riguardo però si è potuto precisare che il più delle volte lo apparato genitale non sia l'unico o il primo a risentire — quasi in modo specifico e diretto — gli effetti dannosi della deficienza, ma che in ogni caso si tratti piuttosto di un'azione assai complessa ed estesa, per cui l'apparato genitale rimane impegnato contemporaneamente e parimenti che altri organi ed apparati. Solo recentemente è stata messa in evidenza da parte di AA. americani — e da noi confermata in diverse Note⁽⁴⁾ — l'esistenza di un nuovo fattore alimentare (fattore E o vitamina della fecondità) che, a differenza di tutti gli altri fattori conosciuti e ritenuti necessari per assicurare il normale ed armonico sviluppo morfologico e funzionale, sarebbe in effetti strettamente e specificamente necessario per assicurare negli animali il normale svolgersi dei vari processi della riproduzione. L'assenza di questo fattore dal regime dietetico avrebbe infatti unicamente come effetto la comparsa più o meno pronta di una alterazione assai grave della funzione riproduttiva, rimanendo affatto normale, almeno apparentemente e sotto ogni riguardo, l'accrescimento e le condizioni generali, nonchè lo stato e la funzione di tutti gli altri organi ed apparati.

Tali brevi concetti premessi, ricordiamo che in questi ultimi anni da parte di vari AA. si è preso in ispecial considerazione l'andamento della

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1932.

(3) QUAGLIARIELLO G., *Influenza dell'alimentazione sulla riproduzione e sui caratteri della prole*. Relazione al II Congresso di Genetica e Eugenica. Roma (1929).

(4) ZAGAMI V., *Sulla cosiddetta vitamina della fecondità (Fattore E)*. «Bull. R. Acc. Med. di Roma», vol. 58, p. 45 (1932); Id., *Ulteriori osservazioni sulla cosiddetta vitamina della fecondità (Fattore E)*. «Bull. R. Acc. Med. di Roma», vol. 58, p. 149 (1932); ZAGAMI V. e SINDONI M., *Sulle alterazioni istologiche determinate da deficienza della cosiddetta vitamina della fecondità (Fattore E)*. «Riv. di Pat. Sper.», vol. 9, p. 82 (1932).

funzione riproduttiva di animali sottoposti ad alimentazione esclusiva con semi di leguminose. Si è concordi nel ritenere che tale tipo di alimentazione influenzi in modo assai sfavorevole tale funzione, ma a noi pare però che si sia ben lontani dalla esatta interpretazione di tale fatto, e che ancora non siano state per nulla individuate le cause che lo determinano.

Con la presente Nota intendiamo appunto richiamare l'attenzione su tale particolare fenomeno determinato dall'alimentazione esclusiva con semi di leguminose, sicuri di poter dare in base ai risultati di nostre numerose ricerche non solo un'interpretazione a nostro parere più giusta ed esatta del fenomeno stesso, ma di poter precisare anche le cause che lo determinano e la possibilità di prevenirlo o curarlo mediante l'aggiunta di determinati ed appropriati correttivi.

S. Visco⁽¹⁾, sperimentando su giovani ratti in via di accrescimento, sottoposti ad alimentazione esclusiva con semi di leguminose (*Cicer arietinum* L., *Ervum Lens* L., *Vicia faba* L.) notava che, per effetto di tale alimentazione, si aveva un netto arresto dello sviluppo degli organi genitali, ed un notevolissimo ritardo nella maturità sessuale; che tali fenomeni non potevano mettersi affatto in rapporto con lo sviluppo complessivo del corpo, e concludeva quindi che « la nutrizione esclusiva con semi delle più comuni leguminose influenza direttamente e in maniera sfavorevole lo sviluppo dell'apparato genitale e la vita sessuale dei giovani ratti ». Ma i suoi risultati non gli hanno permesso di dare una spiegazione del fenomeno.

Ricerche successive di P. Di Mattei⁽²⁾ tendono a convalidare l'opinione di Visco, nel senso di una specifica e diretta influenza sfavorevole esercitata sull'apparato genitale dall'alimentazione esclusiva non solo con legumi, ma anche con cereali. L'A. infatti afferma di aver potuto chiaramente osservare che giovani ratti sottoposti a dieta esclusiva di frumento presentavano organi genitali atrofici, e che ciò solo in parte poteva essere connesso con le condizioni generali di rallentato sviluppo degli animali, poichè tale atrofia poteva notarsi anche in soggetti con peso corporeo corrispondente a quello di coetanei sottoposti a vitto normale, e perciò con organi genitali normalmente sviluppati e già sessualmente maturi. Nel caso in ispecie di alimentazione con frumento l'A. esclude che il fenomeno in parola possa ascriversi a deficienza vitaminica o proteica o salina.

Anche per effetto dell'alimentazione esclusiva con semi di *Ervum lens* l'A. ha potuto notare un'azione sfavorevole sulla crescita normale dei ratti, ma un'azione sicuramente più netta e più particolare sull'apparato genitale

(1) VISCO S., *Ricerca dei rapporti tra nutrizione ed attività sessuale*. « Arch. di Farmacol. e Sc. affini », vol. 38, p. 257 (1924).

(2) DI MATTEI P., *Ricerche farmacodinamiche su di una distrofia sessuale dei ratti albini per alimentazione di cereali*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. 3, p. 807 (1928); ID., *Follicolite, prolattina e vitamine nello sviluppo somatico e sessuale di ratti a dieta di leguminose*. « Riv. Pat. Sper. », vol. 7, p. 427 (1931).

femminile, la cui distrofia non verrebbe per nulla influenzata dalla contemporanea somministrazione di fattori (vitamine) che migliorerebbero invece lo sviluppo generale. Nel caso in specie di alimentazione con semi di *Ervum lens* l'A. esclude che il fenomeno in parola possa ascriversi a deficienza di vitamine A, B, C, E o di lipidi.

R. Bompiani⁽¹⁾ ha studiato il ciclo estrale e la riproduzione in ratti alimentati esclusivamente con semi di *Pisum sativum* ed ha potuto notare che per effetto di tale alimentazione « nei maschi si ha una progressiva sterilità, e più tardi la mancanza completa delle manifestazioni esterne dei fenomeni sessuali; nelle femmine si ha solo una sterilità relativa, probabilmente dovuta ad una debolezza primaria dell'uovo, per cui non può essere fecondato o se si, non si sviluppa e va incontro a fenomeni di riassorbimento. Non di rado poi se la gravidanza prosegue si ha la morte endouterina del feto e la espulsione a suo tempo di feti in via di mummificazione. Però il ciclo sessuale è del tutto normale nello esplicarsi dei suoi vari momenti ».

L'A. parte dal presupposto che tali semi costituiscano un alimento qualitativamente deficiente, unicamente per difetto di vitamine A, D e E; ed appunto a tali deficienze, semplicemente ed unicamente, ascrive tutti i fenomeni dannosi osservati.

È logico a questo punto domandare: L'alimentazione esclusiva con semi di leguminose determina effettivamente una alterazione notevole della funzione riproduttiva? Nel caso positivo, si hanno alterazioni morfologiche o funzionali in modo elettivo e specifico dell'apparato genitale e delle funzioni riproduttive? Trattasi di un'azione diretta, unica o prevalente sull'apparato genitale, o più verosimilmente di un'azione complessa, che impegna anche l'apparato genitale contemporaneamente ad altri organi? Ed in ogni caso, alla deficienza o assenza di quali fattori sono da ascrivere tali fenomeni dannosi determinati dall'alimentazione esclusiva con semi di leguminose? E possono essi in qualche modo essere prevenuti, o curati quando già sono insorti?

I risultati di numerose ricerche⁽²⁾ che da tempo conduciamo, e che mirano a stabilire l'effettivo valore alimentare dei semi delle più comuni

(1) BOMPIANI R., *Osservazioni sul ciclo estrale e sulla riproduzione dei ratti alimentati esclusivamente con « Pisum sativum »*. « Atti Soc. It. di Ostr. e Gin. », vol. 28, p. 417 (1929).

(2) ZAGAMI V., *Su alcuni effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di leguminose nei ratti albini*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. 1, p. 269 (1926); « Arch. Sc. Biol. », vol. 9, p. 435 (1927); ID., *Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di « Lathyrus sativus L. » nei ratti albini*. « Rendic. R. Acc. dei Lincei », vol. 14, p. 218 (1931); ID., *Sul valore alimentare dei semi di « Cicer arietinum L. »*. « Il Problema alimentare », vol. 1, p. 150 (1931); ID., *Sul valore alimentare dei semi di « Lathyrus sativus L. »*. « Il Problema alimentare », vol. 2 (1932); ZAGAMI V. e CURATOLO A., *Sul valore alimentare dei semi di « Ervum lens L. »*. In corso di pubblicazione; LIGORI G., *Sul valore alimentare dei semi di « Vicia faba L. »*. In corso di pubblicazione.

leguminose (*Cicer arietinum* L., *Lathyrus sativus* L., *Ervum lens* L., *Vicia faba* L.) ci hanno permesso di raccogliere dati oramai sufficienti per una fondata convinzione e per potere esaurientemente e con precisione rispondere ai quesiti formulati.

Avendo durante il corso delle esperienze relative, condotte su giovani ratti, sottoposti ad alimentazione esclusiva con i semi su ricordati, seguito l'andamento degli animali da numerosi punti di vista, abbiamo potuto bene accertare che tale tipo di alimentazione determina nei ratti in via di accrescimento un netto rallentamento dello sviluppo generale che impegna parimenti e contemporaneamente tutti gli organi ed apparati; tra questi, notevolmente impegnato rimane anche l'apparato genitale, per cui risultano limitate tutte le manifestazioni sessuali ed annullata completamente la capacità di riproduzione.

Il peso corporeo di animali così alimentati rimane infatti notevolmente in dietro rispetto a quello dei controlli normali tenuti ad alimentazione variamente mista. La muta del primo pelo, la discesa dei testicoli nei maschi, la schiusura dell'ostio vaginale nelle femmine, avvengono con notevole ritardo. Rarissimi sono i periodi di calore nelle femmine, e spento del tutto appare l'ardore sessuale nei maschi, in maniera tale da non notarsi mai tendenza all'accoppiamento. Il numero degli eritociti rimane sensibilmente inferiore al normale, così anche il tasso emoglobinico. L'esame radiografico mostra sempre uno sviluppo scheletrico inferiore a quello dei controlli normali di pari età; in qualunque suo punto lo scheletro presenta caratteri netti di scarsa e deficiente calcificazione. La vita stessa degli animali è seriamente compromessa non riuscendo a sopravvivere a lunghi periodi sperimentali. Alla necropsia tutti gli organi ed apparati si presentano di volume sensibilmente ridotto.

Questi risultati ci permettono pertanto di ritenere come dimostrato che i semi di leguminose costituiscono, senza dubbio, un alimento incompleto o qualitativamente deficiente per i ratti in via di sviluppo; il fenomeno più precoce e più rilevante essendo rappresentato dal rallentamento dello sviluppo generale, che impegna tutti gli organi ed apparati. La funzione riproduttiva rimane seriamente danneggiata, ma, indubbiamente, non per un'azione specifica ed elettiva esercitata dall'alimento in parola, ma per un'azione assai complessa che si estende all'intero organismo. In altri termini è sufficientemente chiaro che non è l'apparato genitale a risentire in modo specifico e diretto gli effetti di tale alimentazione, ma esso — a causa delle deficienze qualitative dell'alimento — rimane impegnato contemporaneamente e parimenti che tutti gli altri organi ed apparati.

Ulteriori ricerche dirette ad identificare le eventuali deficienze, responsabili dei fenomeni dannosi sudescritti, e di stabilire la natura, il grado, la complessità o meno di esse, ci hanno permesso di mettere in evidenza nei semi in parola una forma di deficienza mista: deficienza salina e deficienza

vitaminica (per fattori liposolubili A e D); la prima di grado notevolmente più marcata della seconda, e prevalentemente responsabile dei fenomeni dannosi.

L'aggiunta infatti ai semi di leguminose di elementi minerali (sotto forma di miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker in ragione del 4 % dell'alimento offerto) è sufficiente a prevenire quasi del tutto gli effetti dannosi e a normalizzare la funzione riproduttiva.

Anche l'aggiunta di fattori liposolubili A e D (sotto forma di olio di fegato di merluzzo in ragione del 2 % dell'alimento) determina indiscutibilmente dei sensibili vantaggi, ma senza dubbio assai inferiori a quelli determinati dall'aggiunta dei soli sali minerali.

Con l'associazione dei correttivi minerali e vitaminici su indicati si ottengono dei vantaggi più rilevanti e più netti che con ciascuno dei correttivi separatamente, e completi in maniera tale da rendere, sotto ogni riguardo, gli animali affatto pari ai controlli normali. Anche intervenendo successivamente con tali correttivi, a disturbi già insorti, si possono vedere questi ultimi completamente scomparire.

In base a tali risultati nettamente favorevoli non sembrava necessario invocare l'esistenza di altre deficienze nei semi in parola; del resto i risultati di ricerche all'uopo condotte ce ne hanno fornito la conferma.

In particolare considerazione è da prendersi il fattore E, la cosiddetta vitamina della fecondità, ma dalle numerose e lunghe nostre osservazioni questo fattore risulta presente nei semi di leguminose in sufficiente quantità, tale da potere assicurare la normale riproduzione non solo per tutto il periodo di vita di una generazione, ma anche - salvo qualche eccezione, come ad es. per i semi di *Lathyrus sativus* - nelle generazioni successive.

Gli animali, infatti, la cui dieta esclusiva con semi di leguminose veniva integrata o completata unicamente con sostanze (miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker e olio di fegato di merluzzo), che ricerche collaterali avevano, a noi pure, dimostrato prive del fattore E, presentarono sempre normale la funzione riproduttiva anche per lunghissimi periodi di osservazione.

D'altro canto le alterazioni della funzione riproduttiva negli animali alimentati con soli legumi differiscono notevolmente, per caratteri generali e particolari, da quelle che si sogliono osservare per effetto di deficienza del fattore specifico E. In quest'ultimo caso sono solo le cellule germinative maschili e lo sviluppo dell'embrione a risentire gli effetti dannosi, normali rimanendo, almeno apparentemente, tutti gli altri organi ed apparati, nonchè l'ardore sessuale, l'accoppiamento, l'eiaculazione nei maschi, e i cicli di calore, l'ovulazione e la fecondazione nelle femmine. Nel caso in ispecie invece di alimentazione esclusiva con semi di leguminose l'assenza della funzione riproduttiva si connette con l'ostacolato sviluppo generale che impegna l'apparato genitale come tutti gli altri apparati, e con le precarie condizioni

generali degli animali determinate in massima parte dalla deficienza nell'alimento in parola di sali minerali e in minima parte dalla deficienza di fattori liposolubili A e D.

Concludendo, noi crediamo adunque di poter stabilire che l'alimentazione esclusiva con semi di leguminose determina effettivamente nei ratti una alterazione marcata della funzione riproduttiva tale da rimanerne completamente ostacolata o addirittura danneggiata. Tale fenomeno dannoso non è da riferirsi a un'azione esercitata dall'alimento in parola in modo specifico, elettivo e diretto sull'apparato genitale, ma è da riferire invece ad un'azione complessa ed estesa, la quale, ostacolando e ritardando lo sviluppo generale dell'organismo e le sue normali funzioni, impegna l'apparato genitale come tutti gli altri organi ed apparati. Ci riteniamo anche autorizzati ad affermare che tutti i fenomeni dannosi — e tra questi anche quelli relativi alla funzione riproduttiva — osservati per effetto di tale alimentazione, sono da ascrivere in massima parte ad una deficienza di sali minerali nell'alimento stesso, ed in minima parte ad una deficienza di fattori liposolubili A e D. Resta esclusa l'ipotesi di deficienze di altra natura e tanto meno di deficienza di fattore E.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1932 (Anno X).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica (Geometria). — *Sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale.* Nota ⁽¹⁾ di S. CHERUBINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Nel campo complesso, la classificazione completa delle superficie iperellittiche è stata ottenuta dallo Scorza in una classica Memoria del 1916 ⁽²⁾, mentre dal punto di vista reale, una ne è stata data, nel 1919, dal Lefschetz ⁽³⁾, che distingue queste superficie mercè i valori dei due numeri base $\bar{\rho}$ e ρ , reale e complesso ⁽⁴⁾, ottenendo così i *sei tipi*

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$.

Noi ci siamo proposti di completare questa classificazione assegnando, a meno di (equivalenze, cioè di) trasformazioni birazionali, gli aspetti canonici delle matrici di Riemann appartenenti a questi tipi e di ricercare le più notevoli relazioni esistenti fra i sei tipi del Lefschetz ed i nove dello Scorza.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(2) SCORZA G., *Intorno alla teoria generale*....., [«Rend. Pal.», XLI (1916)], parte II, § 3, pp. 74-77.

(3) *Real hypersurfaces contained in abelian varieties* [«Proceedings of National Academy of Sciences», vol. 5 (1919), pp. 296-298].

(4) Il primo calcolato dal LEFSCHETZ nella Nota cit. (3), il secondo già noto da BAGNERA e DE FRANCHIS (1910).

Nelle pagine che seguono diamo una soluzione del primo quesito che ci sembra abbastanza soddisfacente ed utile per le applicazioni. Quanto al secondo problema, pel momento ci limitiamo ad esporre qualcuno dei rapporti più semplici e salienti fra le due classificazioni.

Per entrambi, è stato opportuno ritrovare i valori di $\bar{\rho}$, basandoci su precedenti nostri risultati.

1. In primo luogo dimostriamo che il numero base reale $\bar{\rho}$ di una varietà abeliana di tipo reale è invariante (non solo per trasformazioni birazionali, ma anche) di fronte a certi isomorfismi della sua matrice di Riemann. Un isomorfismo (Scorza) consiste nel trasformare i parametri u della varietà V_p in altri $v = \alpha u$, pure indipendenti (cioè con α matrice non degenera, di ordine p , dimensione della varietà) e contemporaneamente i cicli C della sua riemanniana in altri $C^* = CT_{-1}$, ancora indipendenti, ma non necessariamente primitivi (cioè con T matrice intiera non degenera, di ordine $2p$, unimodulare o non). In conseguenza, la matrice di Riemann ω legata alla varietà per mezzo dei parametri u e dei cicli C , si trasforma nell'altra ad essa *isomorfa*

$$\omega^* = \alpha \omega T_{-1}$$

relativa ai parametri v ed ai cicli C^* .

Essendo (di tipo) reale, V_p ammetterà una simmetria S che, con la scelta degli u reali rispetto ad S si rappresenta sui parametri coniugati u, \bar{u} con le relazioni

$$(1) \quad u' \equiv \bar{u} + c \quad (\text{mod. } \omega)$$

e dà luogo alla relazione in matrici

$$(2) \quad \omega S_{-1} = \bar{\omega}$$

dove ora S indica la matrice, intiera non degenera e di modulo $(-1)^p$, di ordine $2p$ dei coefficienti dell'antisostituzione riemanniana involutoria corrispondente alla simmetria considerata.

Riferendosi ai v ed alle ω^* , le (1), (2) si trasformano nelle

$$(1') \quad v' \equiv \alpha \cdot \bar{\alpha}^{-1} \cdot \bar{v} + \alpha c \quad (\text{mod. } \alpha \omega)$$

$$(2') \quad \omega^* \cdot S'_{-1} = \alpha \cdot \bar{\alpha}^{-1} \cdot \bar{\omega}^*$$

dove

$$(3) \quad S' = T S T^{-1}.$$

Se T è tale che questa S' risulti intiera, poichè il modulo è ancora $(-1)^p$, S' darà luogo ad un'antisostituzione riemanniana di ω^* corrispon-

dente ad una simmetria della varietà V_p^* trasformata di V_p . È appunto per questi particolari isomorfismi che, come si vede qui appresso, vale la invarianza di $\bar{\rho}$; e quel che a noi interessa notare è che essi non sono soltanto quelli (*equivalenze*) in cui T è unimodulare, ma che fra essi sono anche compresi quegli altri in cui T coincide con una matrice $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ caratteristica o pseudo-caratteristica di S , perchè allora $(1) S' = I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ciò posto, sia A una forma riemanniana alternata di ω , trasformata in sè da S cioè, indicando ancora con A la matrice emisimmetrica corrispondente alla forma, si abbia

$$(4) \quad \omega A \omega_{-1} = 0, \quad S_{-1} A S = -A = A_{-1}.$$

Si ha pure

$$(4') \quad \omega^* A' \omega_{-1}^* = 0, \quad S_{-1}' A' S' = -A' = A_{-1}'$$

dove

$$(5) \quad A' = T_{-1}^{-1} A T^{-1}$$

cioè la forma riemanniana trasformata vien anch'essa portata in se stessa dalla simmetria S' .

Viceversa, mediante questa (5), le (4') danno le (4).

Di qui, poichè $(2) \bar{\rho} = \bar{k} + 1$ è il numero delle forme riemanniane alternate di ω , trasformate in sè da S , che sono linearmente indipendenti e tenendo presente che il procedimento ora esposto fa passare da forme A linearmente dipendenti o non ad altre A' ancora tali, e viceversa, si deduce senz'altro la invarianza di $\bar{\rho}$ di fronte agli isomorfismi di cui sopra.

2. Dopo di ciò, è lecito partire da una matrice di Riemann del tipo $(e^{-1}, i\tau)$, $i = \sqrt{-1}$, ove e è una matrice diagonale intera e τ è una matrice reale simmetrica, non degenera, e da una simmetria di carattere reale zero, corrispondente all'antisostituzione riemanniana di matrice

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{(3)}.$$

(1) Per definizione, $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ non è degenera e soddisfa alla relazione $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} S = I_0 \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

Questa matrice $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ si dice poi caratteristica o pseudo-caratteristica per S , secondo che m ed n sono o non sono di caratteristica massima (mod. 2).

(2) Cfr. la mia Nota dal titolo: *Sul numero base reale delle varietà abeliane* [Rend. Accad. Napoli, s. 3^a, vol. 36 (1930)].

(3) Cfr. CHERUBINO S., *Sul problema della normalizzazione* [« Atti Ist. Veneto », t. 88 (1928), p. II], § 1.

Anzi, nel caso iperellittico ⁽¹⁾, si potrebbe partire dalla forma reale normalizzata $\omega^{(N)} = \left(e^{-1}, \frac{1}{2} e^{-1} \epsilon_{-1} + i\tau \right)$, $e\epsilon = \epsilon_{-1}e$, $\tau = \tau_{-1}$ mentre la simmetria corrisponderà all'antisostituzione $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix}$. Si terrebbe così conto del carattere reale (Comessatti) di S , che coincide con la caratteristica mod. 2 della matrice intiera ϵ , e la riduzione avverrebbe a meno di (equivalenze, cioè di) trasformazioni birazionali.

Ma siccome ⁽²⁾ la matrice ϵ può scambiarsi con qualsivoglia matrice (intiera) ad essa congrua mod. 2, verificante la condizione $e\epsilon = \epsilon_{-1}e$, quel che solo interessa conoscere è la matrice τ . Orbene, dimezzando i parametri e trasformando i cicli con la matrice pseudo-caratteristica di S :

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\epsilon & 2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\frac{1}{2} \omega^{(N)} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1} = \Omega = (e^{-1}, i\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{n} & i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{pmatrix}^{(3)}$$

e τ resta invariata, mentre S si riduce di nuovo ad I_0 . Convien dunque ragionare su questa Ω che è più semplice e riferire i risultati conseguiti alla $\omega^{(N)}$, ottenendo così, a meno di equivalenze (anzichè di isomorfismi) gli aspetti canonici delle matrici di Riemann legate alle nostre superficie.

Le forme alternate riemanniane di questa Ω , trasformate in sè da I_0 , per la 2^a delle (4), sono necessariamente del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b_{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

e la matrice b , che può suppersi addirittura intiera, dovrà soddisfare, a norma della 1^a delle (4), alla relazione

$$(6) \quad e\tau \cdot b_{-1} = b \cdot \tau e.$$

Il problema del numero base reale è così ridotto a trovare il numero delle matrici intiere b , linearmente indipendenti, che soddisfanno a questa (6) con una τ assegnata, il che ci porterà anche a distinguere i tipi di matrici τ corrispondenti a ciascun valore di $\bar{\rho}$.

(1) CHERUBINO S., *Sulla normalizzazione delle matrici di Riemann reali* [«Ibidem», vol. 89 (1929)], n. 2.

(2) Ibidem, n. 8.

(3) Il numero n è un intero che si suol chiamare (un) divisore di Ω .

3. Per una matrice iperellittica, la (6) si riduce alla relazione

$$b_{21} \cdot \tau_{11} + b_{22} \cdot \tau_{21} = n(b_{11} \cdot \tau_{12} + b_{12} \cdot \tau_{22})$$

che si discute distinguendo più casi:

a) sia $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$. Allora τ_{11} e τ_{22} sono entrambi non nulli e la (7) si scrive

$$(8) \quad b_{21} \cdot \tau_{11} = nb_{12} \cdot \tau_{22}$$

lasciando arbitrari gl'intieri b_{11} e b_{22} . Inoltre:

a') se $\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}}$ non è razionale, è necessariamente $b_{21} = b_{12} = 0$, e la matrice b dipende linearmente dai soli parametri arbitrari b_{11} e b_{22} , quindi $\bar{\rho} = 2$;

a'') se $n \cdot \frac{\tau_{22}}{\tau_{11}} = \frac{r}{s}$, con r, s intieri fra loro primi, detto μ un parametro intiero arbitrario, la (8) dà $b_{21} = \mu r$, $b_{12} = \mu s$, e b dipende linearmente dai 3 parametri arbitrari μ , b_{11} , b_{22} , quindi $\bar{\rho} = 3$;

b) si abbia, invece, $\tau_{11} = \tau_{22} = 0$, quindi $\tau_{12} = \tau_{21} \neq 0$. La (7) dà subito $b_{22} = nb_{11}$ e b_{11} , b_{12} , b_{21} restano arbitrari. Dunque $\bar{\rho} = 3$;

c) poniamo ora soltanto $\tau_{11} = 0$ (oppure $\tau_{22} = 0$, il che val lo stesso) quindi ancora $\tau_{12} \neq 0$. Nella (7) il b_{21} resta arbitrario, mentre dev'essere

$$(9) \quad (b_{22} - nb_{11}) \tau_{12} = nb_{12} \tau_{22}.$$

Allora:

c') se $\frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$ non è razionale, sarà $b_{12} = b_{22} - nb_{11} = 0$, quindi restano arbitrari soltanto b_{11} e b_{21} e $\bar{\rho} = 2$;

c'') se $n \cdot \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} = \frac{r}{s}$, con r ed s intieri primi fra loro, detto μ un parametro intiero arbitrario, la (9) dà $b_{22} = nb_{11} + \mu r$, $b_{12} = \mu s$ quindi b dipende linearmente dai 3 parametri arbitrari b_{21} , b_{11} , μ e si ha $\bar{\rho} = 3$;

d) i tre numeri τ_{11} , τ_{22} , τ_{12} siano tutti non nulli. Allora conviene distinguere i seguenti sottocasi:

d') i 2 rapporti $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}$, $\frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$ sono entrambi razionali. Posto $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} = \frac{r}{s}$, $n \cdot \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} = \frac{r'}{s}$ con r, r', s intieri primi fra loro, dicendo q il m. c. d. di r ed r' e posto, come deve essere, $nb_{11} - b_{12} = \mu \cdot q$ con μ intiero, la (7) si scrive

$$(10) \quad b_{21} \cdot r - b_{12} r' = \mu \cdot qs$$

equazione le cui soluzioni interiere si ottengono moltiplicando per μ le soluzioni interiere di $rx - r'y = qs$. Detta (α, β) una soluzione interiera fissa, ma arbitraria, di questa e detto v un altro parametro interio arbitrario, risulterà $b_{21} = \mu\alpha + vr'$, $b_{12} = \mu\beta + vr$ mentre $b_{22} = nb_{11} - \mu q$ e la matrice b dipende, sempre linearmente, dai tre parametri arbitrari b_{11}, μ, v . Dunque $\bar{\rho} = 3$;

d'') uno solo dei due rapporti è razionale, ad es., $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} = \frac{r}{s}$, con r, s interi primi fra loro. Scrivendo la (7) sotto la forma

$$(12) \quad b_{21} \cdot \frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} - nb_{12} \cdot \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} = nb_{11} - b_{22}$$

si vede che è necessariamente $b_{12} = 0$, mentre si ha $nb_{11} - b_{22} = \mu r$, $b_{21} = \mu s$. Dunque sono arbitrari soltanto b_{11} e μ , quindi $\bar{\rho} = 2$;

d''') nessuno dei due rapporti è razionale, però la relazione

$$(13) \quad \frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} \cdot x + n \cdot \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} \cdot y = \bar{\chi}$$

è soddisfatta con $x, y, \bar{\chi}$ interi non tutti nulli.

Dall'ipotesi segue subito che ognuno dei 2 interi x od y determina l'altro, quindi il terzo $\bar{\chi}$, e che x ed y non possono che annullarsi contemporaneamente (insieme a $\bar{\chi}$) quindi che solo $\bar{\chi}$ può esser nullo.

Sia (r', r'', r''') la soluzione minima della (13), cioè quella soluzione in cui r' (od r'') abbia valore assoluto minimo. Si vede subito che ogni altra soluzione della (13) è necessariamente del tipo $x = \mu r'$, $y = \mu r''$, $\bar{\chi} = \mu r'''$ con μ interio arbitrario, sicchè r', r'' ed r''' sono contemporaneamente i minimi valori assoluti di x, y e $\bar{\chi}$.

Dunque è $b_{21} = \mu r'$, $b_{12} = -\mu r''$, $b_{22} = nb_{11} - \mu r'''$ con b_{11}, μ arbitrari. Perciò $\bar{\rho} = 2$.

d^{vi}) Se, infine, quei due rapporti, oltre ad essere entrambi non razionali, non soddisfano neppure alla (13) con $x, y, \bar{\chi}$ interi non tutti nulli, la (7) sarà soddisfatta solo per $b_{21} = b_{12} = nb_{11} - b_{22} = 0$, sicchè è arbitrario solo b_{11} e si ha $\bar{\rho} = 1$.

Riassumendo:

si ha $\bar{\rho} = 3$, quando è $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$ con $\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}}$ razionale, oppure quando $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}, \frac{\tau_{22}}{\tau_{21}}$ sono entrambi razionali (o nulli);

si ha $\bar{\rho} = 2$, quando è $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$ con $\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}}$ non razionale, oppure quando

la (13) è risolubile in numeri interi non tutti nulli, senza che i rapporti

$\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}$ e $\frac{\tau_{22}}{\tau_{21}}$ siano entrambi razionali (o nulli);

si ha $\bar{\rho} = 1$, in ogni altro caso.

Matematica (Analisi). — *Sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine.* Nota ⁽¹⁾ di B. COLOMBO, presentata dal Socio G. FUBINI.

1. In questa Nota considero un'equazione a derivate parziali del quarto ordine di tipo iperbolico nella funzione incognita ζ delle due variabili indipendenti x, y , e precisamente la

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0,$$

essendo λ un numero reale diverso da $0, 1, \infty$; le sue caratteristiche, che si distribuiscono in quattro sistemi distinti, sono le rette di coefficienti angolari $0, 1, \infty, \lambda$.

Ponendomi dal punto di vista reale, tratto in grande per la (1) il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, secondo la denominazione che ho già avuto occasione di introdurre ⁽²⁾; esso consiste nel ricercarne gli eventuali integrali che su quattro segmenti di caratteristiche passanti per uno stesso punto assumono valori prefissati, naturalmente in modo compatibile in tale punto ⁽³⁾. Dimostro che il problema ammette una ed una sola soluzione, cioè il relativo teorema di esistenza e di unicità ⁽⁴⁾; è noto da trattazioni classiche come il risultato si estenda allora ad equazioni più generali della (1).

Mi sembra degno di rilievo lo studio dell'equazione funzionale a cui fondamentalmente si perviene, perchè le funzioni della successione che si introduce in conformità col metodo delle successive approssimazioni sono qui definite a loro volta mediante altre equazioni funzionali, e perciò in modo diverso dal consueto; altrimenti il metodo non condurrebbe a risultato.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1932.

(2) Cfr. B. COLOMBO, *Studio di problemi ai limiti...* « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. XXXIII, 2° sem., p. 156.

(3) Vale a dire in modo che, nel suo intorno di secondo ordine, possano effettivamente riferirsi ad una funzione $\zeta(x, y)$. Si sottintende sempre che le funzioni di cui si tratta siano limitate e possiedano tutte le derivate che occorre considerare, pure limitate.

(4) Lo studio per la (1) di un altro caso particolare del problema di Goursat si trova in O. SJÖSTRAND, *Sur le problème de M. Goursat*, Thèse (Gothembourg, 1929), cap. III; esso però, oltre a non riguardare il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, è fatto soltanto dal punto di vista analitico.

2. Ritengo, solo per semplicità, che il punto di concorso delle quattro caratteristiche considerate sia l'origine O del sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y , ed inoltre che i loro segmenti coi dati iniziali siano quelli interni all'esagono E di parametro τ (numero positivo arbitrario), secondo la denominazione che ho già avuto occasione di introdurre⁽¹⁾, cioè all'esagono avente i lati sulle sei caratteristiche $x = \tau, y = \tau, y - x = \tau, x = -\tau, y = -\tau, y - x = -\tau$.

Senza menomare la generalità del problema, è lecito convenire per il seguito che sia senz'altro $0 < \lambda < 1$, perchè a questo caso ci si può sempre ricondurre con un opportuno cambiamento di variabili, ad es. ponendo $x = \eta, y = \xi$ ovvero $x = \eta, y = \eta - \xi$, secondochè è $\lambda > 1$ ovvero $\lambda < 0$; infatti λ si muta allora in $\frac{1}{\lambda}$ ovvero in $\frac{1}{1-\lambda}$ ⁽²⁾, e precisamente le caratteristiche di coefficiente angolare λ si mutano in quelle di coefficiente angolare $\frac{1}{\lambda}$ ovvero $\frac{1}{1-\lambda}$, mentre non si alterano complessivamente le caratteristiche di coefficienti angolari $0, 1, \infty$, nè l'origine O e l'esagono E di parametro τ .

Inoltre, sempre senza menomare la generalità del problema, è lecito convenire per il seguito che i valori prefissati per χ sui due assi siano senz'altro nulli, perchè a questo caso ci si può sempre ricondurre con un opportuno cambiamento di funzione, ad es. ponendo $\chi = \zeta + u$, ove u è il classico integrale di $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ che sui due assi assume i valori prefissati per χ .

Indicando poi con $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ le funzioni alle quali deve ridursi l'integrale $\chi(x, y)$ per $y = \lambda x$ e rispettivamente per $y = x$, si riconosce che esse devono ritenersi definite nell'intervallo I da $-\tau$ a $+\tau$ e che, per la compatibilità in O dei dati iniziali, devono verificare le

$$(2) \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi'(0) = 0, \quad \Phi''(0) = \lambda \Psi''(0).$$

Infine, circa le funzioni arbitrarie $\varphi, \psi, \rho, \sigma$ di una sola variabile che figurano nell'integrale generale

$$(3) \quad \chi(x, y) = \varphi(y - \lambda x) + \psi(y - x) + \rho(x) + \sigma(y)$$

della (1), si può supporre per il seguito, senza menomare la generalità di χ , che esse verifichino le

$$(4) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0, \quad \rho(0) = 0,$$

(1) Cfr. la mia Nota dianzi citata.

(2) Più in generale è facile riconoscere che, con opportuni cambiamenti di variabili, λ si può mutare proprio come il valore di un birapporto colle permutazioni dei suoi quattro elementi.

come si stabilisce semplicemente in grazia alla forma del secondo membro della (3).

3. Precisate così le ipotesi, passo a trattare il problema.

Imponendo dapprima all'integrale (3) di assumere i valori prefissati sugli assi, si traggono le

$$(5) \quad \rho(x) = -\varphi(-\lambda x) - \psi(-x), \quad \sigma(x) = -\varphi(x) - \psi(x),$$

che devono valere per x variabile nell'intervallo I ; nel quale definiscono ρ e σ mediante φ e ψ .

Imponendo poi all'integrale (3) di assumere i valori prefissati sulle altre due caratteristiche, e tenendo conto senz'altro delle (5), si traggono le

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(x) + \varphi(-\lambda x) - \varphi[(1-\lambda)x] = -\psi(x) - \psi(-x) - \Psi(x) \\ \psi(x) + \psi(-\lambda x) - \psi[(1-\lambda)x] = -\varphi(\lambda x) - \varphi(-\lambda x) - \Phi(-x), \end{cases}$$

che devono pure valere in I e che costituiscono *un sistema di due equazioni funzionali in φ e ψ* .

Allo scopo di eliminare la ψ dal sistema (6), si sommi la seconda delle (6) coll'equazione che si ottiene da essa sostituendo x con $-x$, e si tenga anche conto della prima delle (6); si ricava allora la

$$(7) \quad \varphi(x) + \varphi(\lambda^2 x) + \varphi[(1-\lambda)^2 x] - 2\varphi(\lambda x) - 2\varphi[-\lambda(1-\lambda)x] - \\ - 2\varphi[(1-\lambda)x] = \Phi(x) + \Phi(-x) - \Psi(x) - \Psi(-\lambda x) + \Psi[(1-\lambda)x],$$

che deve sempre valere in I e che è *un'equazione funzionale in φ* .

Per studiare la (7) e poi il sistema (6), richiamo a questo punto un risultato che rientra in altri molto più generali da me già stabiliti⁽¹⁾:

Tanto l'equazione funzionale

$$(8) \quad \varphi(x) - \varphi(\lambda x) - \varphi[(1-\lambda)x] = F(x)$$

quanto l'equazione funzionale

$$(8^*) \quad \varphi(x) + \varphi(-\lambda x) - \varphi[(1-\lambda)x] = F(x),$$

essendo ancora λ un numero compreso fra 0 ed 1 (estremi esclusi), φ la funzione incognita, ed F una funzione definita nell'intervallo I e soddisfacente quivi alla

$$(9) \quad |F(x)| \leq M |x|^r$$

(1) Cfr. B. COLOMBO, *Su una classe di equazioni...* « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », aprile 1929.

per un numero M positivo e per $r \geq 2$, ammette una soluzione φ definita in I e tale che risulta in esso $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1 - \lambda^r - (1 - \lambda)^r} |x|^r$, e ammette soltanto quella sotto la condizione che, per un numero L positivo, valga appunto la

$$(10) \quad |\varphi(x)| \leq L |x|^r.$$

Ciò discende dal fatto che è $\lambda^r + (1 - \lambda)^r < 1$ e positivo.

Considero ora l'equazione funzionale *ausiliaria*

$$(11) \quad \varphi(x) + \varphi(\lambda^2 x) + \varphi[(1 - \lambda)^2 x] - 2\varphi(\lambda x) + 2\varphi[\lambda(1 - \lambda)x] - \\ - 2\varphi[(1 - \lambda)x] = F(x),$$

sempre nelle ipotesi fatte dianzi; posto

$$(12) \quad \varphi(x) - \varphi(\lambda x) - \varphi[(1 - \lambda)x] = \varphi(x),$$

la (11) diviene la

$$(13) \quad \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(\lambda x) - \bar{\varphi}[(1 - \lambda)x] = F(x).$$

Questa, essendo del tipo (8), ammette una soluzione $\bar{\varphi}$ definita in I e tale che è in esso $|\bar{\varphi}(x)| \leq \frac{M}{1 - \lambda^r - (1 - \lambda)^r} |x|^r$; allora la (12), che risulta sempre del tipo (8), ammette una soluzione φ definitiva in I e tale che è in esso $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{[1 - \lambda^r - (1 - \lambda)^r]^2} |x|^r$; siffatta φ è una soluzione della (11), ed è l'unica sotto la condizione (10).

La (7), ove si indichi ora con $F(x)$ il suo secondo membro e si chiami $H(\varphi)$ il primo membro della (11), si può scrivere nella forma

$$(7^*) \quad H(\varphi) - 2\varphi[\lambda(1 - \lambda)x] - 2\varphi[-\lambda(1 - \lambda)x] = F(x);$$

e la (9) è soddisfatta per $r = 3$, perchè, in grazia alle (2), si ha

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = 0.$$

Si riesce a trattare la (7*) col metodo delle successive approssimazioni nel modo seguente:

Si pongono le

$$(14) \quad H(\varphi_0) = F(x) \quad , \quad H(\varphi_{i+1}) = 2\varphi_i[\lambda(1 - \lambda)x] + 2\varphi_i[-\lambda(1 - \lambda)x] \\ (i = 0, 1, 2, \dots),$$

che risultano delle equazioni funzionali del tipo (11) ed ammettono perciò delle soluzioni φ_i definite in I e tali da verificare quivi le

$$(15) \quad |\varphi_i(x)| \leq \frac{M}{[1 - \lambda^3 - (1 - \lambda)^3]^2} \left\{ \frac{4\lambda^3(1 - \lambda)^3}{[1 - \lambda^3 - (1 - \lambda)^3]^2} \right\}^i |x|^3 = \\ = \frac{M}{[1 - \lambda^3 - (1 - \lambda)^3]^2} \left\{ \frac{4}{9} \lambda(1 - \lambda) \right\}^i |x|^3 \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Siccome è $\frac{4}{9} \lambda(1 - \lambda) < 1$ e positivo, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)$ converge totalmente in I ; la sua somma $\varphi(x)$ è una soluzione di (7*), come si stabilisce calcolando il limite per $n \rightarrow \infty$ della

$$(16) \quad H \left[\sum_{i=0}^{n+1} \varphi_i(x) \right] - 2 \sum_{i=0}^n \varphi_i[\lambda(1 - \lambda)x] - 2 \sum_{i=0}^n \varphi_i[-\lambda(1 - \lambda)x] = F(x)$$

deducibile dalle prime $n + 2$ delle (14), ed è tale per le (15) che in I risulta $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{\lambda^2(1 - \lambda)^2[9 - 4\lambda(1 - \lambda)]} |x|^3$; essa poi, sotto la condizione (10) per $r = 3$, effettivamente imposta dalla prima delle (4), è l'unica soluzione di (7*), come si trae dalla circostanza che una siffatta soluzione della (7*) resa omogenea non supera in modulo $L \left\{ \frac{4}{9} \lambda(1 - \lambda) \right\}^i |x|^3$, qualunque sia i , ed è perciò identicamente nulla.

Discussa così la (7), si può discutere il sistema (6). Sostituendo la φ dianzi individuata nella seconda delle (6), il suo secondo membro risulta definito in I , ove soddisfa, in virtù della prima delle (2), ad una condizione analoga alla (9) per $r = 2$, e si ottiene così un'equazione funzionale in ψ del tipo (8*); questa, sotto la condizione analoga alla (10) per $r = 2$, effettivamente imposta dalla seconda delle (4), ammette allora in I una ed una sola soluzione ψ . Siffatta ψ , insieme colla φ precedente, verifica anche la prima delle (6), perchè il suo primo membro ed il suo secondo membro, per il modo con cui è stata ottenuta la (7), sono soluzioni di una stessa equazione funzionale del tipo (8*), sotto una condizione analoga alla (10) per $r = 2$, e perciò risultano identici (1).

(1) Se tra le (6) si elimina φ si ottiene un'equazione funzionale in ψ del tipo (7). Tale circostanza, indipendentemente dal ragionamento fatto nel testo, non permette però di esaurire la discussione del sistema (6), perchè, dovendo la ψ verificare una condizione analoga alla (10) solo per $r = 2$, l'equazione funzionale in discorso ammette infinite soluzioni, ed inoltre non appare senz'altro che una almeno di questa soddisfaccia, colla φ individuata mediante la (7), al sistema (6); in altri termini la (7) e l'equazione analoga in ψ non costituiscono un sistema del tutto equivalente al sistema (6).

Riassumendo, le funzioni $\varphi, \psi, \rho, \sigma$ cercate esistono e sono uniche e risultano definite in $I^{(1)}$; esiste allora ed è unico l'integrale χ cercato e risulta definito all'interno dell'esagono E di parametro τ , come appare manifestamente dalla (3)⁽²⁾.

Togliendo, com'è lecito, la limitazione che λ sia compresa fra 0 ed 1 (estremi esclusi), e che i dati iniziali sugli assi siano nulli, si perviene in conclusione al seguente

TEOREMA. — *Il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, posto per la (1) in grande e dal punto di vista reale, ammette una ed una sola soluzione, vale a dire esiste uno ed un solo integrale della (1) il quale sui quattro segmenti di caratteristiche passanti per O ed interni ad E assuma valori comunque prefissati (in modo compatibile in O) e risulta definito proprio in tutto l'interno di E .*

Matematica. — *La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique.* — III. *Les systèmes cycliques de Ribaucour.* Nota di HANS HAMBURGER, presentata⁽³⁾ dal Socio F. ENRIQUES⁽⁴⁾.

21. La théorie des systèmes cycliques de Ribaucour offre d'autres applications de la transformation de Ribaucour. En s'appuyant sur une déduction de Bianchi⁽⁵⁾, on peut démontrer que tous les systèmes cycliques qui sont normaux à une surface donnée $\alpha(u, v)$ se déterminent par la formule

$$(18) \quad \widehat{\alpha}(u, v; t) = \{\alpha, \gamma + t\mathbf{n}\}_c,$$

c étant une constante arbitraire, t un paramètre variable, \mathbf{n} le vecteur normal de α , γ une surface quelconque parallèle à α . En donnant à u, v une valeur fixe et en faisant varier t , on obtient tous les cercles du système cyclique; réciproquement on obtient toutes les surfaces normales au système cyclique, si l'on donne une valeur fixe au paramètre t et si l'on fait varier u et v .

(1) Un po' laboriosa, ma concettualmente semplice, è la dimostrazione che esse possiedono tutte le derivate richieste dal problema.

(2) Il campo in cui risulta definito ogni integrale χ della (1) dipende dagli intervalli nei quali sono definiti $\varphi, \psi, \sigma, \rho$, ed in generale è il campo comune a quattro striscie delimitate da coppie di caratteristiche dei quattro diversi sistemi, e perciò quello interno ad un poligono avente i lati, in numero di otto al più, su tali caratteristiche.

(3) Nella seduta del 3 giugno 1932.

(4) Voir les Notes I et II «Rendiconti R. Accad. Lincei» vol. XV, serie 6^a, p. 936 et vol. XVI, p. 200. Dans ce qui suit, nous faisons usage des définitions et des abréviations symboliques introduites dans les Notes I et II, et nous citerons les numéros des formules et des § des Notes I et II.

(5) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3^a edizione, vol. II, (1923), pp. 228-230.

22. Spécialisons la formule (18) et posons

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \widehat{x}(u, v; t) &= \{x, p - tn\}_{px(u_0, v_0)} \\ &= x - 2(px)(p - tn)^{-1} \end{aligned} \right.$$

en conservant les notations du § 11, Note II.

On a alors le système cyclique normal à la fois à la surface $x(u, v)$ et au plan π . Ensuite on démontre sans difficulté que pour une valeur fixe de t différente de ± 1 la surface $\widehat{x}(u, v; t)$ se déduit de $x(u, v)$ à l'aide d'une « inversion par directions réciproques » ⁽¹⁾, qu'on nomme aussi « inversion de Laguerre », tandis que pour $t = \pm 1$ la surface \widehat{x} coïncide avec le plan π (v. la Note II loc. cit. spécialement les équations (6) du § 11 et (10) du § 13). En outre on reconnaît immédiatement que l'équation (19) contient l'inversion de Laguerre la plus générale. Un calcul facile permet du reste de déduire de (19) presque toutes les propriétés connues de l'inversion de Laguerre. Mais nous passerons sur ce point.

23. En transformant par une inversion ordinaire le plan π dans une sphère σ on obtient les systèmes cycliques normaux à la sphère σ . En même temps, on transforme la configuration d'une inversion de Laguerre dans une inversion de Lie ⁽²⁾. Soit r le rayon de la sphère σ qui a son centre à l'origine du système de coordonnées; si l'on pose

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \widehat{x}(u, v; t) &= \{x, x - trn\}_{c_0}, \quad c_0 = \frac{x^2(u_0, v_0) - r^2}{2} \\ &= x - (x^2 - r^2)(x - trn)^{-1} \end{aligned} \right.$$

le système cyclique $\widehat{x}(u, v; t)$ est normal à la surface $x(u, v)$ et à la sphère σ . En outre, pour $t \neq \pm 1$ on a des surfaces $\widehat{x}(u, v; t)$ déduites de $x(u, v)$ par une inversion de Lie, tandis que pour $t = \pm 1$ la surface \widehat{x} coïncide avec la sphère σ .

24. Pour une transformation de Ribaucour quelconque

$$(21) \quad \widehat{x} = \{x, y\}_c$$

les surfaces $x(u, v)$ et $\widehat{x}(u, v)$ apparaissent comme les deux nappes de l'enveloppe d'une congruence de sphères. Si l'on soumet cette configuration

(1) LAGUERRE, *Sur la transformation par directions réciproques*, « Oeuvres », vol. II, Paris (1915), pp. 604-607; v. aussi DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. I, 2^{ème} édit., Paris (1913), pp. 304-313.

(2) V. p. ex. W. BLASCHKE: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, vol. III; *Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln* par G. THOMSEN, Berlin (1929), pp. 230-232.

géométrique à une inversion de Laguerre ou de Lie, on est amené à une configuration analogue, c'est à dire à une nouvelle congruence de sphères, dont les deux nappes d'enveloppe sont constituées par les surfaces $\mathfrak{x}'(u, v)$ et $\widehat{\mathfrak{x}}'(u, v)$, \mathfrak{x}' et $\widehat{\mathfrak{x}}'$ étant déduites de \mathfrak{x} et de $\widehat{\mathfrak{x}}$ par une inversion simultanée de Laguerre ou de Lie. Donc, les deux surfaces $\mathfrak{x}'(u, v)$ et $\widehat{\mathfrak{x}}'(u, v)$ sont de nouveau liées entre elles par une transformation de Ribaucour. Pour déterminer analytiquement celle-ci, on fait usage du théorème de permutabilité 4 du § 8, I. Étudions en premier lieu l'inversion de Laguerre et posons selon l'équation (19)

$$\mathfrak{x}' = \{ \mathfrak{x}, \mathfrak{p} - t\mathfrak{n} \}_{\mathfrak{p}\mathfrak{x}(u_0 v_0)},$$

$$\mathfrak{y}' = \{ \mathfrak{y}, \mathfrak{p} - t\mathfrak{n} \}_{\mathfrak{p}\mathfrak{y}(u_0 v_0)},$$

$$\widehat{\mathfrak{x}}' = \{ \widehat{\mathfrak{x}}, \mathfrak{p} - t\widehat{\mathfrak{n}} \}_{\widehat{\mathfrak{p}}\mathfrak{x}(u_0 v_0)},$$

$\widehat{\mathfrak{x}}$ étant la surface définie par l'équation (21) et $\widehat{\mathfrak{n}}$ étant le vecteur normal de $\widehat{\mathfrak{x}}$, on a alors

$$\widehat{\mathfrak{x}}' = \{ \mathfrak{x}', \mathfrak{y}' \}_{c'}$$

avec

$$c' = c + 2t \frac{(\mathfrak{p}\mathfrak{x}(u_0 v_0)) (\mathfrak{n}(u_0 v_0) \mathfrak{y}(u_0 v_0))}{(\mathfrak{p} - t\mathfrak{n}(u_0 v_0))^2}.$$

Étudions en second lieu l'inversion de Lie et posons selon l'équation (20)

$$\mathfrak{x}' = \{ \mathfrak{x}, \mathfrak{x} - t\mathfrak{n} \}_{c_0}, \quad c_0 = \frac{\mathfrak{x}^2(u_0 v_0) - r^2}{2},$$

$$\widehat{\mathfrak{x}}' = \{ \widehat{\mathfrak{x}}, \widehat{\mathfrak{x}} - t\widehat{\mathfrak{n}} \}_{\widehat{c}_0}, \quad \widehat{c}_0 = \frac{\widehat{\mathfrak{x}}^2(u_0 v_0) - r^2}{2}.$$

On trouve alors

$$\widehat{\mathfrak{x}}' = \{ \mathfrak{x}', \{ \mathfrak{y}, \mathfrak{x} - t\mathfrak{n} \}_{c'} \}_{c''}$$

où l'on a

$$c' = \mathfrak{x}(u_0 v_0) \mathfrak{y}(u_0 v_0) - c,$$

$$c'' = c - \frac{(\mathfrak{x}^2(u_0 v_0) - r^2)(c - t\mathfrak{n}(u_0 v_0) \mathfrak{y}(u_0 v_0))}{(\mathfrak{x}(u_0 v_0) - t\mathfrak{n}(u_0 v_0))^2}.$$

Matematica (Geometria). — *Courbures projectives d'une courbe dans l'espace projectif* P_{n-1} ($n \geq 3$). Nota ⁽¹⁾ di V. HLAVATÝ, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Étant donnée une courbe générale ⁽²⁾ $x_u = x_u(t)$ ($u = 1, \dots, n$) dans l'espace projectif P_{n-1} , les coefficients a_0, \dots, a_n qui interviennent dans le système

$$\sum_0^n \binom{n}{i} a_{n-i}(t) \frac{d^i x}{dt^i} = 0 \quad (a_0 = 1)$$

nous permettent à construire le système complet des invariants I_2, \dots, I_n , indépendants du choix spécial du facteur $p(t)$ dans $(1, 3)$. Nous en avons même construit dans II un invariant L , dont nous avons mentionné déjà la signification géométrique.

Dans la Note présente, nous voulons poursuivre nos recherches en introduisant la notion de l'arc projectif et des courbures projectives de la courbe en question (tout d'abord pour n'importe quel n pair, puis pour n impair). Excluons avant tout le cas particulier des courbes appartenant à un système nul (et même les points particuliers d'une courbe où $L = 0$). Parce que l'équation II (10) (qui caractérise les courbes maintenant exclues) est aussi invariante par rapport au changement du paramètre

$$t' = t'(t) \quad (t = t(t'))$$

on doit avoir

$$(I) \quad J(t') = J(t) G,$$

G étant un facteur à déterminer et t' les coefficients de l'équation

$$0 = \frac{d^n t'}{dt^n} + \binom{n}{1} t'_1 \frac{d^{n-1} t'}{dt^{n-1}} + \dots + \binom{n}{1} t'_{n-1} \frac{d t'}{dt} + t'_n t'$$

dans laquelle on a posé

$$t'x = t'(t) = x[t(t')].$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1932.

(2) Voir *Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif* P_{n-1} , citée dans la suite simplement par I ainsi que *Encore sur les invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif* P_{n-1} , citée par II. (Toutes les deux Notes dans « Rendiconti Acc. Lincei »; Vol. XVI, fasc. 3-4, pag. 109; fasc. 5-6, pag. 206). Quant à la terminologie, voir I, II.

Un calcul facile nous montre que

$$\left(\frac{d't}{dt}\right)^2 a_1 = \frac{d't}{dt} a_1 + \frac{n-1}{2} \frac{d^2't}{dt^2}$$

d'où

$$\left(\frac{d't}{dt}\right)^{N+1} \frac{d^N a_1}{d't^N} = \frac{d^N a_1}{dt^N} + \dots \quad \left(N = \frac{n(n-3)}{2}\right).$$

Ici les membres omis ne contiennent plus $\frac{d^N a_1}{dt^N}$. Il s'ensuit en raison de II (9) et (1)

$$G = \left(\frac{dt}{d't}\right)^{N+1}$$

et par conséquent

$$(d't)^{N+1} J(a) = (dt)^{N+1} J(a)$$

est non seulement invariant par rapport au changement du facteur mais en même temps aussi par rapport au changement du paramètre t . Parce que nous ne traitons maintenant que les courbes qui n'appartiennent pas à un système nul, on a

$$(dt)^{N+1} J(a) = (d't)^{N+1} J(a) = (dt)^{N+1} L(I) = (d't)^{N+1} L(I) = 0$$

et par conséquent nous pouvons choisir le paramètre t de manière que résulte $L(I) = 1$. En désignant ce paramètre par s on a donc dans ce cas

$$(2) \quad s = \int \sqrt[N+1]{L(I)} dt + \text{const.} \quad N = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Si l'on prend la valeur arithmétique ⁽¹⁾ de la racine dans (2), la différentielle ds est complètement définie et dans ce cas nous dirons que s est « l'arc projectif » de la courbe en question. (Pour n pair).

Imaginons maintenant que l'on ait choisi a priori l'arc projectif comme paramètre de la courbe et désignons par k_1, \dots, k_{n-2} les invariants correspondants I_3, \dots, I_n . Le cas échéant on a

$$L(I) = 1, \\ k_1 = I_3, \dots, k_{n-2} = I_n.$$

Ces équations nous permettent d'énoncer le théorème suivant, valable pour n'importe quel $n (> 2)$ pair :

(1) C'est-à-dire si l'on prend la racine qui figure dans (2) en employant l'équation

$$\sqrt[N+1]{I} = 1.$$

THÉOREME II. — Les invariants projectifs k_1, \dots, k_{n-2} , dits courbures projectives de la courbe en question, exprimés en fonction de l'arc projectif déterminent complètement ⁽¹⁾ une courbe dans P_{n-1} qui n'appartient pas à un système nul et dont le point mobile a pour coordonnées homogènes x_u l'intégrale générale du système

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{n-i} \frac{d^i x}{ds^i} = 0, \quad (a_0 = 1).$$

Si l'on change la fonction arbitraire a_1 en $*a_1$ d'après

$$(4) \quad *a_1 = a_1 + f(s),$$

ni L ni k ne changent pas, mais l'intégrale x_u change en $*x_u$ d'après

$$(5) \quad *x_u = x_u e^{-\int f(s) ds} \text{ const.} \quad (u = 1, \dots, 1).$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de tenir compte des faits déjà constatés ainsi que du théorème I (Dans II). La plus haute dérivée qui intervient dans L est manifestement la N -ième dérivée (de a_1). Mais pour calculer a_1 , il nous faut de la n -ième dérivée (de x) et par conséquent nous pouvons dire que l'arc projectif est « d'ordre » $N + n = \binom{n}{2}$ (par rapport à n'importe quel paramètre général t). D'autre part, dans l'expression analytique des courbures n'interviennent à côté des coefficients a que les premières dérivées de ces coefficients (par rapport à s), lesquelles sont d'ordre $n + 1$ par rapport à s et par conséquent d'ordre $\frac{n^2 + n}{2}$ par rapport à t . Les courbures projectives sont donc d'ordre $\frac{n^2 + n}{2}$ par rapport à n'importe quel paramètre général t , si n est pair. Nous avons à peine besoin d'accentuer l'invariance des courbures projectives par rapport aux transformations homographiques générales (aux coefficients constants) de l'espace P_{n-1} .

2. Si $n = 4$ on retombe au cas des courbes dans l'espace projectif à trois dimensions ⁽²⁾. Dans ce cas on a

$$L = 4(I_2 - 2I_3) = -4(a_1'' + 6a_1a_1' - 3a_2' + 2a_3 - 6a_1a_2 + 4a_1^3)$$

et

$$k_1 = 'I_3, \quad k_2 = 'I_4.$$

(1) Plus précisément: Complètement à moins des transformations homographiques générales aux coefficients constants.

(2) Voir la remarque (1) dans I. Pour les I_2, I_3 voir aussi II.

Si $n = 2$ nous n'avons à notre disposition que l'invariant I_2 et l'interprétation géométrique ordinaire n'a pas lieu. Mais d'autre part, si l'on désigne par y la coordonnée non homogène $y = x_1/x_2$ on parvient à l'expression bien connue

$$Y = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2$$

invariante par rapport aux transformations projectives (générales) de y .

Un calcul facile nous montre

$$Y = 2 I_2.$$

3. Envisageons maintenant le cas jusqu'alors exclu du $n (\geq 3)$ impair. Le cas échéant la corrélation employée plus haut pour la construction du système nul est nécessairement dégénérée, car le déterminant des coefficients c_{ij} est égal à zéro. C'est par cette raison que nous suppléons à la notion du système nul une autre, à savoir celle de l'hyperquadrique générale

$$g = \sum_{ij}^n g_{ij} x_i x_j = 0,$$

où

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad |g_{ij}| \neq 0.$$

En employant une méthode analogue à celle, dont nous nous sommes servis plus haut, nous trouvons que la condition nécessaire pour qu'une courbe générale soit située sur une hyperquadrique générale est

$$O = M = -2n \frac{d^Q a}{dt^Q} + \dots \quad Q = \binom{n}{2} - 1.$$

Ici M est un invariant isobare du poids $\binom{n}{2}$, où $\frac{d^Q a_i}{dt^Q}$ ne figure qu'une fois. On l'obtient en calculant les symboles homogènes

$$(u, v) = \sum_{ij}^n g_{ij} \frac{d^u x_i}{dt^u} \frac{d^v x_j}{dt^v}$$

des équations

$$g = 0, \quad \frac{d^w g}{dt^w} = 0 \quad \left(w = 1, \dots, \left[\binom{n}{2} - 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 2 \right] \right)$$

moyennant $(0, n-1)$ et en substituant les symboles ainsi calculés dans le premier membre de l'équation

$$\frac{d^{\bar{Q}} g}{dt^{\bar{Q}}} = (0, n-1) M \quad \left(\bar{Q} = \frac{n^2 + n - 2}{2} \right).$$

La transformation du paramètre

$$t' = t'(t) \quad , \quad t = t(t')$$

nous montre que

$$(d't)^{Q+1} M(I) = (dt)^{Q+1} M(I) \quad Q = \binom{n}{2} - 1.$$

D'autre part, s'il s'agit d'une courbe qui n'est pas située sur une hyperquadrique on a $M \neq 0$ et par conséquent nous pouvons choisir le paramètre t de manière que $M(I) = 1$. En désignant ce paramètre par s on a donc

$$s = \int \sqrt[Q+1]{M(I)} dt + \text{const.} \quad \left(Q = \binom{n}{2} - 1 \right).$$

Si l'on prend la valeur arithmétique de la racine qui figure dans cette équation, la différentielle ds résulte complètement définie. Dans ce cas nous dirons que s est l'arc projectif de la courbe en question (qui n'est pas située sur une hyperquadrique). Comme dans le premier cas, nous introduirons même ici les courbures projectives, c'est-à-dire les invariants I_3, \dots, I_n exprimés en fonction de l'arc projectif, ainsi que nous avons

$$M(I) = 1$$

$$k_1 = I_3, \dots, k_{n-2} = I_n$$

d'où le théorème suivant valable pour n'importe quel $n (\geq 3)$ impair:

THÉORÈME III. — *Les courbures projectives k_1, \dots, k_{n-2} , exprimées en fonction de l'arc projectif, déterminent complètement ⁽¹⁾ une courbe dans P_{n-1} qui n'est pas située sur une hyperquadrique et dont le point mobile a pour coordonnée homogènes x_u l'intégrale générale du système (3). Si l'on change la fonction arbitraire a_1 en $*a_1$ d'après (4), ni M ni k ne changent pas, mais l'intégrale x_u change en $*x_u$ d'après (5). La démonstration de ce théorème est la même que dans le cas précédent.*

Si $n = 3$ on retombe au cas d'une courbe dans le plan projectif. Le cas échéant on trouve

$$M = 6(I_2 - 2I_3) = -6(a_1'' + 6a_1a_1' - 3a_2' + 2a_3 - 6a_1a_2 + 4a_1^3),$$

ainsi qu'une conique est complètement ⁽¹⁾ déterminée par

$$a_1'' + 6a_1a_1' - 3a_2' + 2a_3 - 6a_1a_2 + 4a_1^3 = 0,$$

(1) Loc. cit.

tandis que toute courbe qui n'est pas une cône est caractérisée par la courbure projective

$$k(s) = 'I_3 = 'a_3 - 'a'_2 + 2 'a_1 'a'_1 - 3 'a_1 'a_2 + 2 'a_1^3 \quad (1)$$

où

$$'a = 'a(s)$$

sont les fonctions de l'arc projectif

$$s = \int \sqrt[3]{-6(a_1'' + 6a_1a_1' - 3a_2' + 2a_3 - 6a_1a_2 + 4a_1^3)} dt + \text{const.}$$

Il est intéressant à remarquer que la même condition $I'_2 = I_3$ caractérise des cônes (dans P_2) ainsi que des courbes qui appartiennent à un système nul (dans P_3).

Comme dans le cas précédent, on constate ici que l'arc projectif est d'ordre $Q + n = \binom{n}{2} + n - 1$ et par conséquent les courbures projectives sont d'ordre $Q + n + n = \frac{n(n+1)}{2} + n - 1$. Or, l'ordre de l'arc projectif et des courbures projectives est en général plus grand pour n impair que pour n pair.

(1) Dans le livre français, cité sub (1) dans I, par MM. FUBINI et ČECH, *La courbure projective des courbes planes correspond à l'invariant I_2* .

Matematica (Analisi). — *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di D. MANGERON, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

In un lavoro che mi ha suggerito il prof. M. Picone ho trattato il problema degli autovalori per l'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\theta(x, y)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \lambda A(x, y) u = f(x, y),$$

e vi ho conseguito la dimostrazione dell'esistenza di una successione illimitata di costanti λ_n (lo spettro) e di un corrispondente sistema completo di autofunzioni $u_n(x, y)$, soddisfacenti all'equazione omogenea associata alla (1) ed alla condizione di annullarsi sul contorno del dominio R, formato dalle coppie di caratteristiche reali doppie:

$$(x = a, y = b) \quad \text{e} \quad (x = c, y = d);$$

$\theta(x, y)$, $A(x, y)$ e $f(x, y)$ essendo funzioni continue, la prima positiva ed ammettente in R le derivate parziali e totali prime continue. Mi propongo nella presente Nota la ricerca di una superficie integrale passante per FR — frontiera del dominio R — col metodo delle approssimazioni successive di E. Picard per l'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right),$$

essendo reali le variabili e le funzioni che intervengono nella (2).

La funzione $f(x, y, u, v, w, \dots)$ di otto argomenti è continua e definita in un campo C contenente il dominio R. Si può supporre evidentemente $a = b = 0$. Mi varrò del seguente lemma stabilito nel lavoro già citato:

LEMMA. — *L'integrale $u(x, y)$ dell'equazione*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \varphi(x, y) = 0,$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1932.

essendo $\varphi(x, y)$ continua in R , nullo su FR , è unico ed è dato dalla formula

$$u(x, y) = \iint_R G(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

dove

$$cd G(x, y; \xi, \eta) \left\{ \begin{array}{ll} = (c-x)(d-y)\xi\eta & \text{per } \xi \leq x, \eta \leq y \\ = (c-x)y\xi(d-\eta) & \text{per } \xi \leq x, \eta \geq y \\ = x(d-y)(c-\xi)\eta & \text{per } \xi \geq x, \eta \leq y \\ = xy(c-\xi)(d-\eta) & \text{per } \xi \geq x, \eta \geq y, \end{array} \right.$$

e soddisfa, insieme con le sue derivate parziali alle seguenti formule di maggiorazione in R

$$(3) \quad \begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \frac{M}{64} c^2 d^2, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{M}{16} d^2 c, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{M}{16} dc^2, \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right| &\leq \frac{M}{4} cd, \quad \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right| \leq \frac{M}{2} d, \quad \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right| \leq \frac{M}{2} c, \end{aligned}$$

essendo M il limite superiore di $|\varphi(x, y)|$ in R .

Il metodo da seguire per il problema proposto è oramai classico.

Partiamo da una funzione arbitraria $u_0(x, y)$, nulla su FR , soddisfacente alle condizioni di continuità in R insieme con le sue derivate parziali fino a quelle di terz'ordine. Determiniamo una successione di funzioni $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots$, integrando una dopo l'altra le equazioni

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} &= f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2}\right) \\ \frac{\partial^4 u_n}{\partial x^2 \partial y^2} &= f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x \partial y^2}\right), n \geq 1, \end{aligned}$$

tenendo conto delle rispettive condizioni al contorno e cioè $u_n = 0$ su FR per $n \geq 1$, in modo che i secondi membri delle (4) diventano successivamente le funzioni note di x, y . Occupiamoci della convergenza di questa successione. Consideriamo le serie

$$\begin{aligned} u_0 + (u_1 - u_0) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + \dots, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \dots + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \right) + \dots \end{aligned}$$

e le altre quattro analoghe coi termini generali

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} \right), \left(\frac{\partial^3 u_n}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x^2 \partial y} \right) \text{ e } \left(\frac{\partial^3 u_n}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Per ottenere i limiti superiori di questi termini generali serviamoci delle formule (3) applicate alla

$$\frac{\partial^4 (u_n - u_{n-1})}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, u_{n-1}, \dots) - f(x, y, u_{n-2}, \dots),$$

facendo inoltre una nuova ipotesi e cioè supponendo che la $f(x, y, u, \dots)$ soddisfi in C alla condizione di Lipschitz:

$$(5) \quad \left| f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) - \right. \\ \left. - f\left(x, y, u', \frac{\partial u'}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial y}, \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u'}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u'}{\partial x \partial y^2}\right) \right| < \alpha |u - u'| + \\ + \beta \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial x} \right| + \gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right| + \delta \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} \right| + \\ + \varepsilon \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u'}{\partial x^2 \partial y} \right| + \kappa \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u'}{\partial x \partial y^2} \right|$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \kappa$ costanti positive. Dalle

$$\frac{\partial^4 (u_2 - u_1)}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, u_1, \dots) - f(x, y, u_0, \dots),$$

se si pone che il modulo del secondo membro di questa è inferiore ad un numero positivo N, si deduce

$$|u_2 - u_1| < \frac{N}{64} c^2 d^2, \quad \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| < \frac{N}{16} d^2 c, \quad \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right| < \frac{N}{16} d c^2, \\ \left| \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right| < \frac{N}{4} c d, \quad \left| \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y} \right| < \frac{N}{2} d, \quad \left| \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} \right| < \frac{N}{2} c.$$

Dalla

$$\frac{\partial^4 (u_3 - u_2)}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, u_2, \dots) - f(x, y, u_1, \dots)$$

segue, tenendo conto della (5),

$$|u_3 - u_2| < \left(\alpha \frac{c^2 d^2}{64} + \beta \frac{d^2 c}{16} + \gamma \frac{d c^2}{16} + \delta \frac{c d}{4} + \varepsilon \frac{d}{2} + \kappa \frac{c}{2} \right) N \frac{c^2 d^2}{64}, \\ \left| \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| < \left(\alpha \frac{c^2 d^2}{64} + \beta \frac{d^2 c}{16} + \gamma \frac{d c^2}{16} + \delta \frac{c d}{4} + \varepsilon \frac{d}{2} + \kappa \frac{c}{2} \right) N \frac{d^2 c}{16}, \text{ ecc.}$$

Si arriva così successivamente alle

$$|u_n - u_{n-1}| < \left(\alpha \frac{c^2 d^2}{64} + \beta \frac{d^2 c}{16} + \gamma \frac{dc^2}{16} + \delta \frac{dc}{4} + \varepsilon \frac{d}{2} + \kappa \frac{c}{2} \right)^{n-2} N \frac{c^2 d^2}{64},$$

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \right| < \left(\alpha \frac{c^2 d^2}{64} + \beta \frac{d^2 c}{16} + \gamma \frac{dc^2}{16} + \delta \frac{dc}{4} + \varepsilon \frac{d}{2} + \kappa \frac{c}{2} \right)^{n-2} N \frac{d^2 c}{16}, \text{ ecc.}$$

Dunque se

$$(6) \quad \alpha \frac{c^2 d^2}{64} + \beta \frac{d^2 c}{16} + \gamma \frac{dc^2}{16} + \delta \frac{dc}{4} + \varepsilon \frac{d}{2} + \kappa \frac{c}{2} < 1$$

le serie considerate sono assolutamente ed uniformemente convergenti, così che la $u_n(x, y)$ tenderà uniformemente in R verso una funzione $u(x, y)$ che ammette le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$, verso le quali ivi convergono uniformemente $\frac{\partial u_n}{\partial x}, \dots$. La continuità delle $\frac{\partial u_n}{\partial x}, \dots$, implica quella di $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$. Le deduzioni fatte permettono l'asserzione che $u(x, y)$ è l'integrale della (2) soddisfacente alle condizioni al contorno prescritte. Data l'equazione

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial x^2 \partial y^2} = f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x \partial y^2}\right)$$

si ha

$$\begin{aligned} u_n(x, y) = & \iint_{00}^{cd} (x - \xi)(y - \eta) f(\xi, \eta, u_{n-1}, \dots) d\xi d\eta - \\ & - \frac{y}{d} \iint_{00}^{xd} (x - \xi)(d - \eta) f(\xi, \eta, u_{n-1}, \dots) d\xi d\eta - \\ & - \frac{x}{c} \iint_{00}^{cy} (c - \xi)(y - \eta) f(\xi, \eta, u_{n-1}, \dots) d\xi d\eta + \\ & + \frac{xy}{cd} \iint_{00}^{cd} (c - \xi)(d - \eta) f(\xi, \eta, u_{n-1}, \dots) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

essendo x, y sostituite con ξ, η nella u_{n-1} e nelle sue derivate parziali che intervengono in $f(\xi, \eta, u_{n-1}, \dots)$. In virtù della condizione di Lipschitz e della convergenza uniforme di u_n, \dots , la funzione $f(\xi, \eta, u_{n-1}, \dots)$

che comparisce sotto ogni segno integrale converge uniformemente in tutto R verso la $f(\xi, \eta, u, \dots)$ e si ha

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^x \int_0^y (x - \xi)(y - \eta) f(\xi, \eta, u, \dots) d\xi d\eta - \\ & - \frac{y}{d} \int_0^x \int_0^d (x - \xi)(d - \eta) f(\xi, \eta, u, \dots) d\xi d\eta - \\ & - \frac{x}{c} \int_0^c \int_0^y (c - \xi)(y - \eta) f(\xi, \eta, u, \dots) d\xi d\eta + \\ & + \frac{xy}{cd} \int_0^c \int_0^d (c - \xi)(d - \eta) f(\xi, \eta, u, \dots) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

essendo, come precedentemente, gli argomenti della funzione u e delle sue derivate che entrano in $f(\xi, \eta, u, \dots)$, ξ, η . Ciò permette di mettere in evidenza l'esistenza di una derivata seconda totale della $u(x, y)$ uguale a $f(x, y, u(x, y), \dots)$ e quindi, la funzione $u(x, y)$, costruita nel modo indicato, soddisfa alle condizioni del problema. Si conclude facilmente col seguente

TEOREMA: *L'equazione (2), se $f(x, y, u, \dots)$ è continua e lipschitziana in C e se è soddisfatta la condizione (6), ammette uno ed un solo integrale $u(x, y)$, nullo su FR , definito in $R^{(1)}$.*

Le considerazioni fatte, sempre con la restrizione riguardante le dimensioni del dominio R , si possono estendere per un dominio limitato dalle due coppie di caratteristiche reali doppie non più rettilinee per l'equazione

$$(7) \quad \sum_0^4 a_{i, 4-i}(x, y) \frac{\partial^4 u}{\partial x^i \partial y^{4-i}} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right),$$

dove i coefficienti $a_{i, 4-i}(x, y)$ soddisfano a certe condizioni di continuità e la funzione $f(x, y, u, \dots)$ alle condizioni sopra indicate in un campo C . Per essere nelle condizioni del problema precedente suppongo che l'equazione

$$(8) \quad \sum_0^4 a_{i, 4-i}(x, y) \lambda^i = 0$$

(1) La condizione (6) che restringe le dimensioni del dominio R è necessaria. Si possono dare degli esempi ove non essendo questa soddisfatta il metodo delle approssimazioni successive conduce a serie divergenti.

ammetta in C soltanto le radici doppie. Senza ricorrere alla teoria generale delle caratteristiche, per una trasformazione di variabili reale, propria $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$, l'equazione (7) diventa

$$(9) \quad \sum_0^4 A_{i,4-i}(\xi, \eta) \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^i \partial \eta^{4-i}} = \varphi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \dots\right),$$

avendo la $\varphi(\xi, \eta, u, \dots)$ un significato evidente. Si hanno per le $A_{i,4-i}$, $i = 4 - i$, cambiando leggermente le notazioni, le formule seguenti:

$$A_{4,0} = a_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^4 + a_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^3 + a_5 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^4,$$

$$A_{3,1} = \left[4 a_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 + 3 a_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2 a_3 \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + a_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^3 \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ + \left[a_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 + 2 a_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + 3 a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 4 a_5 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^3 \right] \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$A_{1,3} = \left[4 a_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 + 3 a_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + 2 a_3 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + a_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^3 \right] \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ + \left[a_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 + 2 a_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + 3 a_4 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 4 a_5 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^3 \right] \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$A_{0,4} = a_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^4 + a_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + a_4 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^3 + a_5 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^4.$$

Ora se si prendono per $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (8), sono soddisfatte contemporaneamente le equazioni $A_{4,0} = 0$, $A_{0,4} = 0$, e $A_{3,1} = 0$, $A_{1,3} = 0$, com'è ben chiaro data la loro forma esplicita. Un tale cambiamento di variabili $\xi(x, y) = \text{cost.}$, e $\eta(x, y) = \text{cost.}$, porta dunque ad avere nel primo membro della (9) il solo termine $A_{2,2} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}$. Ora il metodo delle approssimazioni successive permette almeno in piccolo la risoluzione dell'equazione non lineare (8). Con ciò l'asserto è dimostrato.

Matematica. — *Proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati.*
Nota⁽¹⁾ di MARIA PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Questa Nota è la continuazione di una precedente dal titolo: *Tensori emisimmetrici coniugati*, nella quale ho introdotto la nozione di coniugato di un tensore emisimmetrico e ho mostrato che, a meno eventualmente del segno, la relazione di coniugio tra tensori è reciproca.

Qui dimostro una notevole proprietà relativa ai tensori coniugati. A questo scopo premetto alcune considerazioni sul rotore dei tensori. Mediante contrazione del rotore, come venne introdotto dal prof. Cisotti, ottengo un tensore indipendente dalla metrica, che chiamo *rotore completo* e che, in un caso particolare, venne già considerato, con altra denominazione, dal prof. Levi-Civita (cfr. nota a p. 316); esso gode di due proprietà che sono un'immediata estensione di due ben note dell'ordinario rotore di un vettore.

La proprietà dei tensori coniugati a cui ho accennato è la coincidenza della divergenza di un tensore emisimmetrico col rotore completo del coniugato.

Essa, per un caso particolare, è espressa da una formola contenuta in una recentissima Nota del prof. Cisotti⁽²⁾, e, pure in un caso particolare, venne usata, senza essere esplicitamente enunciata, dal prof. K. Hattori per porre sotto la forma ordinaria le equazioni del campo elettromagnetico da lui ottenute⁽³⁾. Da essa discende immediatamente la nota proprietà dei tensori emisimmetrici di aver nulla la divergenza seconda.

La nozione di tensore coniugato si può estendere anche ai tensori dotati di parziali emisimmetrie: è ciò a cui accenno da ultimo in questa Nota.

4. — ROTORE COMPLETO DI UN TENSORE⁽⁴⁾.

Il prof. Cisotti⁽⁵⁾ ha definito rotore di un generico tensore m^{plo} \mathbf{X} il tensore $(n + m - 3)^{plo}$ di componenti:

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1932.

(2) U. CISOTTI, *Sui tensori doppi a divergenza unica*. (Questi « Rendiconti », vol. XV, serie 6^a, 1^o sem. 1932, pp. 835-839, form. (5).

(3) K. HATTORI, loc. cit., n. 7.

(4) Continuo, in questa Nota, la numerazione dei paragrafi e delle formule iniziate nella precedente.

(5) U. CISOTTI, *Sul rotore dei tensori* (questi « Rend. », vol. VII, serie 6^a, 1928, pp. 169-172).

$$(5) \quad R_{i_1 \dots i_{m-1}}^{k_1 \dots k_{n-2}} = \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-2} j i_m} X_{i_1 \dots i_{m-1} i_m / j} \\ = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} (X_{i_1 \dots i_{m-1} k_n / k_{n-1}} - X_{i_1 \dots i_{m-1} k_{n-1} / k_n})$$

dove c è un numero pari o dispari secondo che è pari o dispari la classe della permutazione $k_1 k_2 \dots k_n k_{n-1}$.

Nel caso particolare dei vettori, la (5) diviene:

$$(5') \quad R^{k_1 \dots k_{n-2}} = \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-2} j i} X_{i / j} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial X_{k_n}}{\partial x_{k_{n-1}}} - \frac{\partial X_{k_{n-1}}}{\partial x_{k_n}} \right).$$

Tornando alla (5), e supponendo $m < n - 1$, operiamo una contrazione sul tensore \mathbf{R} , saturando tutti gli indici di covarianza con altrettanti di controvarianza. Otteniamo un tensore $(n - m - 1)^{plo}$ con le seguenti componenti controvarianti:

$$(6) \quad R^{k_1 \dots k_{n-m-1}} = \varepsilon^{k_1 \dots k_{n-m-1} i_1 \dots i_m i_{m+1}} X_{i_1 \dots i_{m+1} i_{m+2} / i} \\ = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \sum_{k_{n-m} \dots k_{n-1}} X_{k_{n-m} \dots k_{n-2} k_n k_{n-1}}$$

dove col simbolo \mathbf{S} si indica una somma estesa a tutte le permutazioni degli indici $k_{n-m} k_{n-m+1} \dots k_n$, ogni termine della quale ha il segno $+$ o $-$ secondo che corrisponde a una permutazione di classe pari o dispari rispetto a quella indicata, presa come fondamentale.

Ma in una tale somma si eliminano tutti i termini contenenti i simboli di Cristoffel e non rimangono che le derivate ordinarie delle $\mathbf{X}^{(1)}$. Si ha cioè:

$$(6') \quad R^{k_1 \dots k_{n-m-1}} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \sum_{k_{n-m} \dots k_n} \frac{\partial X_{k_{n-m} \dots k_{n-2} k_n}}{\partial x_{k_{n-1}}}$$

il tensore $(n - m - 1)^{plo}$ (6), (6') è quindi un tensore emisimmetrico, indipendente dalla metrica (1), come (5') che ne è un caso particolare. Lo chiamerò *rotore completo* del tensore \mathbf{X} . La (5') dice che per un vettore non esiste che il rotore completo.

Il rotore completo di un tensore gode di due proprietà, che sono una immediata estensione di due ben note per l'ordinario rotore di un vettore.

In primo luogo è un tensore solenoidale, cioè a divergenza nulla (2).

(1) Cfr. M. PASTORI, *Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati* (questi « Rend. », vol. IX, serie 6^a, 1929, pp. 474-479).

(2) Cfr. per la divergenza dei tensori U. CISOTTI, *Sulla divergenza dei tensori* (questi « Rend. », vol. VI, serie 6^a, 1927, pp. 81-84). Ved. pure B. CALDONAZZO, *Sulla divergenza dei tensori* (« Boll. dell'Acc. Gioenia di Scienze Nat. in Catania », fasc. 58).

Si ha infatti, per la divergenza del tensore (6), ricordando che il tensore ϵ ha nullo il derivato:

$$(7) \quad R^{k_1 \dots k_{n-m-2} l}_{j l} = \epsilon^{k_1 \dots k_{n-m-2} l i_1 \dots i_{m-1} j i_m} X_{i_1 \dots i_{m-1} j l} \\ = (-1)^{(m+1)} \epsilon^{k_1 \dots k_{n-m-2} i_1 \dots i_{m-1} l j} X_{i_1 \dots i_{m-1} j l} = 0 \quad (1).$$

In secondo luogo, se \mathbf{X} è il derivato di un tensore $(m-1)^{plo}$, se cioè si ha:

$$X_{i_1 \dots i_m} = Y_{i_1 \dots i_{m-1} j i_m}$$

il suo rotore completo è nullo. Si ha infatti, per (6):

$$(8) \quad R^{k_1 \dots k_{n-m-1}} = \epsilon^{k_1 \dots k_{n-m-1} i_1 \dots i_{m-1} j i_m} Y_{i_1 \dots i_{m-1} j i_m} = 0 \quad (2).$$

Per il rotore completo di un tensore continuano dunque a valere come nell'ordinaria analisi vettoriale, le due seguenti relazioni:

$$(9) \quad \begin{cases} \text{div rot } \mathbf{T} = 0 \\ \text{rot grad } \mathbf{T} = 0 \end{cases}$$

se col simbolo $\text{grad } \mathbf{T}$ si indica il tensore derivato di \mathbf{T} .

5. — RELAZIONE TRA DIVERGENZA DI UN TENSORE EMISIMMETRICO E ROTORE COMPLETO DEL CONIUGATO.

Tornando ai tensori emisimmetrici, consideriamo dapprima un tensore $(n-1)^{plo}$; e prendiamone le componenti controvarianti. Si ha (cfr. nn. 1-3)

$$(10) \quad T^{k_1 \dots k_{n-1}} = \epsilon^{k_1 \dots k_{n-1} h} U_h.$$

Abbiamo, per la sua divergenza:

$$(11) \quad T^{k_1 \dots k_{n-2} j}_{j} = \epsilon^{k_1 \dots k_{n-2} j h} U_h / j.$$

La (5') ci dice allora che la divergenza di un tensore $(n-1)^{plo}$ coincide col rotore del vettore coniugato (3). E si ha quindi:

$$(11') \quad T^{k_1 \dots k_{n-2} j}_{j} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial U_{k_n}}{\partial x_{k_{n-1}}} - \frac{\partial U_{k_{n-1}}}{\partial x_{k_n}} \right) \quad (4).$$

(1) Infatti, a meno eventualmente del segno, il terzo membro di (7) si riduce a $\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{h_{n-m-1} \dots h_n} X_{h_{n-m-1} \dots h_{n-2} j h_{n-1} h_n}$ che si annulla, come ho dimostrato nella Nota sopra citata.

(2) Cfr. nota precedente.

(3) Cfr. anche U. CISOTTI, secondo loc. cit., n. 3. La nostra (11) rientra anche, come caso particolare, in una formula ivi dimostrata dall'A.

(4) È questa, nel caso particolare di $n=4$, la relazione che permette di porre sotto la forma ordinaria le equazioni del campo elettromagnetico (cfr. K. HATTORI, loc. cit., n. 7).

Osservazione. — La (11') equivale alla nota proprietà che per i tensori emisimmetrici la divergenza si esprime sotto la forma (1):

$$(11'') \quad T^{k_1 \dots k_{n-2} j}_{l j} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{a} T^{k_1 \dots k_{n-2} j}).$$

Basta pensare che l'espressione tra parentesi del secondo membro rappresenta appunto una componente covariante del vettore U , osservare che, nella sommatoria rispetto all'indice j variabile da 1 ad n , due soli termini sono diversi da zero, quelli in cui j assume i valori k_{n-1} e k_n , e tenere presente la convenzione dei segni per il passaggio dalle componenti di T a quelle di U .

Consideriamo ora il caso generale di un tensore $(n-m)^{plo}$. Abbiamo, per le sue componenti controvarianti:

$$(12) \quad T^{k_1 \dots k_{n-m}} = \frac{1}{m!} \epsilon^{k_1 \dots k_{n-m} i_1 \dots i_m} U_{i_1 \dots i_m}.$$

E per la sua divergenza:

$$(13) \quad \begin{aligned} T^{k_1 \dots k_{n-m-1} j}_{l j} &= \frac{1}{m!} \epsilon^{k_1 \dots k_{n-m-1} j i_1 \dots i_m} U_{i_1 \dots i_m / j} \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \epsilon^{k_1 \dots k_{n-m-1} i_1 \dots i_{m-1} j i_m} U_{i_1 \dots i_m / j}. \end{aligned}$$

Per la (6) possiamo quindi concludere: *a meno di un fattore numerico la divergenza di un tensore emisimmetrico coincide col rotore completo del coniugato.*

Ne discende, per la prima delle (9), la proprietà, nota per altra via: *è nulla la divergenza seconda di un tensore emisimmetrico* (2).

Per la (6') si ha:

$$(13') \quad T^{k_1 \dots k_{n-m-1} j}_{l j} = \frac{(-1)^{c+m-1}}{m!} \sum_{i_1 \dots i_{m-1} k_n} \frac{\partial U_{k_1 \dots k_{n-m} \dots k_{n-2} k_n}}{\partial x_{k_{n-1}}}.$$

I termini del secondo membro dovrebbero essere $(m+1)!$, tanti cioè quante le permutazioni degli indici $k_{n-m} \dots k_n$; distribuiamo questi termini

(1) Cfr. U. CISOTTI, secondo loc. cit., n. 3.

(2) Cfr. B. CALDONAZZO, loc. cit. N. 3. A. PALATINI, *Sulla divergenza dei tensori emisimmetrici e dei vettori*. (« Rend. R. Istituto Lombardo », serie II, vol. LXII, 1929, pp. 281-286). V. anche T. LEVI-CIVITA, *Vereinfachte Herstellung der einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen*. (« Sitzungsberichten » 1929, pp. 137-153, n. 2). L'A. introduce anche, per il caso particolare di un tensore doppio emisimmetrico di una varietà a quattro dimensioni, ciò che noi abbiamo chiamato *rotore completo* (*Pfaffsche Divergenz*) e ne dimostra la proprietà espressa dalla prima delle (9) di questa Nota.

in $m + 1$ gruppi, in ciascuno dei quali l'ultimo indice (quello di derivazione) abbia lo stesso valore: lo precederanno le $m!$ permutazioni dei rimanenti indici; ma per la emisimmetria di \mathbf{U} e per la convenzione dei segni sottointesa nella sommatoria, tutti questi termini saranno eguali tra loro. Il secondo membro di (13') si riduce in definitiva ad $m + 1$ termini. In ciò si riscontra pure la corrispondenza con la nota formola, analoga alla (11''), della divergenza di un tensore emisimmetrico.

Sviluppiamo le (13) (13') nel caso particolare $m = 2$

$$\begin{aligned} (14) \quad T^{k_1 \dots k_{n-3} j}_{i_1 i_2 l j} &= \frac{1}{2} \epsilon^{k_1 \dots k_{n-3} j i_1 i_2} U_{i_1 i_2 l j} \\ &= \frac{(-1)^c}{2\sqrt{a}} \sum_{k_{n-2} k_{n-1} k_n} \frac{\partial U_{k_{n-1} k_n}}{\partial x_{k_{n-2}}} \\ &= \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial U_{k_{n-1} k_n}}{\partial x_{k_{n-2}}} + \frac{\partial U_{k_n k_{n-2}}}{\partial x_{k_{n-1}}} + \frac{\partial U_{k_{n-2} k_{n-1}}}{\partial x_{k_n}} \right). \end{aligned}$$

Per $n = 4$ i primi membri di (14) sono le componenti di un vettore, che, per la proprietà precedentemente rilevata, sarà solenoidale (1).

6. — ESTENSIONI.

La formola (2) si può evidentemente estendere al caso in cui il tensore \mathbf{T} , anzichè essere completamente emisimmetrico, presenti solo delle emisimmetrie parziali rispetto a diversi gruppi di indici. Basterà comporlo con una potenza di ϵ , eguale al numero dei gruppi in cui si distribuiscono gli indici.

Così per esempio, se $T_{h_1 \dots h_r i_1 \dots i_s k_1 \dots k_t} (r + s + t = m)$ muta solo di segno per lo scambio di due indici h o di due i o di due k (senza che ciò si verifichi per lo scambio di due indici appartenenti a due gruppi diversi), si potrà porre:

$$(15) \quad U^{h_r+1 \dots h_n i_s+1 \dots i_n k_t+1 \dots k_n} = \frac{1}{r! s! t!} \epsilon^{h_1 \dots h_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon^{k_1 \dots k_n} T_{h_1 \dots h_r i_1 \dots i_s k_1 \dots k_t}.$$

Ed anche in questo caso il secondo membro di (15) si riduce ad una sola componente di \mathbf{T} , moltiplicata per la terza potenza di $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Evidentemente qui non è necessario che sia $m < n$; basterà che lo siano separatamente i tre numeri r, s, t .

(1) Ved. K. HATTORI, loc. cit., n. 7.

Anche il tensore \mathbf{U} presenta in generale delle emisimmetrie parziali rispetto agli indici indicati con le stesse lettere ($h_{r+1} \dots h_n$ per es.). Ciò non può avvenire se in \mathbf{T} ogni gruppo di emisimmetria contiene $n - 1$ indici.

Se ne ha un classico esempio nel tensore di Ricci per le varietà a tre dimensioni. La formola che lo definisce è appunto un caso particolare della (15), ove al posto delle T si hanno i simboli di Riemann di prima specie, componenti covarianti del tensore di Riemann-Christoffel. Si ha infatti ⁽¹⁾

$$\alpha^{ik} = \frac{1}{4} \epsilon^{ipq} \epsilon^{hrs} (pq, rs).$$

La simmetria del tensore di Ricci consegue poi dalla simmetria dei simboli di Riemann di prima specie rispetto alle due coppie di indici.

Matematica (Geometria). — *Sulle superficie algebriche aventi il sistema canonico composto con un'involuzione.* Nota ⁽²⁾ di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

Mentre su di una curva algebrica la serie canonica — se non è semplice — risulta necessariamente composta con una g_2^1 (la curva essendo allora iperellittica), esistono notoriamente superficie algebriche col sistema canonico appartenente ad una involuzione I_n d'ordine $n > 2$ ⁽³⁾. Basta infatti pensare che sulle superficie aventi $p_g = 3$ e $p^{(1)} > 3$, il sistema canonico è una rete (non composta con un fascio) di grado $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, che quindi appartiene ad un'involuzione d'ordine $p^{(2)} > 2$; e si prova facilmente l'esistenza di superficie siffatte ⁽⁴⁾.

Non si conoscono invece esempi effettivi di superficie presentanti la

(1) T. LEVI-CIVITA, *The absolute differential Calculus* (London and Glasgow, 1927, p. 199), oppure *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, Zanichelli, 1928, p. 172). Ved. pure M. PASTORI, *Sulle varietà a curvatura costante* («Atti della Pontificia Accad. Nuovi Lincei», anno LXXXIV, 1931, pp. 474-478) dove si estende il tensore di Ricci per le varietà ad $n > 3$ dimensioni.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1932.

(3) Il NOETHER ha dimostrato che sulle superficie contenenti una I_2 razionale, il sistema canonico è composto colla I_2 . Per lo studio delle varie possibilità che il sistema canonico può presentare nei riguardi di un'involuzione (anche non razionale) di coppie di punti, v. A. MARONI, *Sistemi lineari speciali, sopra una superficie algebrica, composti con una involuzione di coppie di punti*, «Atti del R. Istituto Veneto», t. 89 (1930), p. 559.

(4) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (raccolte da L. CAMPEDELLI; Padova, Cedam, 1930), p. 345; il caso più semplice è dato dalle F^5 di S_3 con tacnodo, per le quali risulta $p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$.

suddetta particolarità, ed aventi $p_g > 3$ ⁽¹⁾; in questa Nota - fra l'altro - ne ottengo assai semplicemente due, forniti da una *superficie (regolare)* con $p_g = 4$, $p^{(1)} = 9$, *avente il sistema canonico composto con un'involuzione del 4° ordine*, e da una *superficie (regolare)* con $p_g = 4$, $p^{(1)} = 7$, *avente il sistema canonico composto con un'involuzione del 3° ordine*.

1. Incominciamo coll'esaminare l'influenza che presenta, nei riguardi dei caratteri aritmetici di una superficie F di S_3 , un punto doppio O tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un oscnodo, ossia - come brevemente diremo - un *oscnodo della F* .

Posta in O l'origine delle coordinate (x, y, z) , ed assunto il piano tangente in O alla F come piano $x = 0$, la F si rappresenta con un'equazione del tipo:

$$(1) \quad (x + \varphi_2)(x + \varphi_2 + \varphi_3) + x\varphi_4 + \varphi_6 + \dots = 0,$$

ove le $\varphi_i = \varphi_i(x, y, z)$ sono (per $i = 2, 3, \dots$) forme di grado i nelle (x, y, z) , ed i puntini stanno per termini di grado superiore al 6° ⁽²⁾. Effettuando la trasformazione quadratica speciale data dalle:

$$(2) \quad x = x' z' \quad ; \quad y = y' z' \quad , \quad z = z',$$

la F si muta nella superficie F' di equazione:

$$(x' + z' \varphi'_2)(x' + z' \varphi'_2 + z'^2 \varphi'_3) + x' z'^3 \varphi'_4 + z'^4 \varphi'_6 + \dots = 0,$$

ove, per abbreviare, si è posto $\varphi'_i = \varphi_i(x', y', 1)$; al punto O di F corrisponde su F' l'asse delle y' , che per questa superficie è retta doppia tacnodale.

Una superficie aggiunta alla F , deve intanto passare per O (poichè un oscnodo è caso particolare di un tacnodo), e quindi ha un'equazione della forma:

$$(3) \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots = 0,$$

ove i simboli hanno significato analogo a quelli usati nella (1). Mediante le (2), la (3) si trasforma nel piano $z' = 0$ e nella superficie di equazione

$$(4) \quad \psi'_1 + z' \psi'_2 + z'^2 \psi'_3 + \dots = 0;$$

(1) Si sa però che se la curva canonica generica contiene una g^1_3 , il sistema canonico risulta necessariamente composto con una I_3 : v. G. CASTELNUOVO, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica*, «Rendic. del R. Istituto Lombardo», serie II, t. 24 (1891), Nota II, § 2. L'effettiva esistenza di superficie algebriche presentanti la suddetta particolarità, risulterà dal seguito (n. 5).

(2) Cfr. C. SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, «Annali di Mat.», serie II, t. 25 (1896), § 19.

affinchè il piano $z' = 0$ e la (4) costituiscano insieme una superficie aggiunta alla F' (superficie che quindi dovrà toccare la F' lungo l'asse delle y'), è necessario che la (4) passi per l'asse delle y' , ossia che risulti identicamente:

$$\psi_1(0, y', 1) = 0.$$

Ritornando alla (3), si vede che le aggiunte di una superficie F avente un oscnodo O , passano per questo punto toccando ivi la $F^{(1)}$.

Dalla (1), poi, segùe facilmente che l'intersezione di una superficie F avente un oscnodo O con una sua aggiunta generica, ammette il punto O come quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini ad O in direzioni distinte; ne risulta che l'imposizione ad una superficie F di un oscnodo (che importa 19 condizioni non tutte lineari), ne diminuisce il genere aritmetico, p_a , di 3 unità ed il genere lineare, $p^{(1)}$, di 8 unità.

2. Una superficie F^6 del 6° ordine avente (come uniche singolarità) due oscnodi O_1 ed O_2 , presenta la particolarità segnalata in principio, in quanto ha $p_g = p_a = 4$, $p^{(1)} = 9$ ed il sistema canonico composto con una I_4 . Sulla F^6 infatti il sistema canonico, in base al n. 1, vien segato dal sistema lineare ∞^3 delle quadriche passanti per O_1, O_2 e quivi tangenti alla F^6 ; e questo sistema lineare è composto colla congruenza delle coniche che toccano la F^6 in tali punti.

Per essere completi, ci resta però da dimostrare l'effettiva esistenza di F^6 di quel tipo; e ciò verrà fatto nel n. 4⁽²⁾.

3. Occupiamoci prima delle superficie F^5 del 5° ordine con due oscnodi. Un conto di costanti lascerebbe supporre la loro esistenza; ma, ammessa tale esistenza, ci si urta nella seguente contraddizione. Una F^5 con due oscnodi — se esiste — è razionale, poichè possiede un fascio lineare di curve razionali (le sezioni coi piani passanti per i due oscnodi); ma il suo genere aritmetico (in base al n. 1) risulta negativo ($= -2$). L'apparente paradosso si dirime solo ammettendo che l'imposizione ad una F^5 di due oscnodi, tragga di conseguenza che F^5 abbia qualche linea multipla passante per essi; e ciò appunto ora proveremo e meglio preciseremo per via analitica.

Una qualunque superficie del 5° ordine con due punti doppi unipolarari, si rappresenta in coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) con un'equazione della forma:

$$(5) \quad c_1 x_1^3 x_2^2 + c_2 x_1^2 x_2^3 + \omega_{22} x_1^2 x_2^2 + 2c_1 \omega_{21} x_1^2 x_2 + 2c_2 \omega_{12} x_1 x_2^2 + \\ + \omega_{20} x_1^2 + \omega_{11} x_1 x_2 + \omega_{02} x_2^2 + \omega_{10} x_1 + \omega_{01} x_2 + \omega_{00} = 0,$$

(1) Ciò avrebbe anche potuto ottenersi per via sintetica, fondandosi su quanto è detto a p. 154 delle *Lezioni* citate di F. ENRIQUES.

(2) La necessità di tale dimostrazione, risulta anche — ove se ne dubitasse — da quanto diciamo più sotto (n. 3) per le superficie del 5° ordine.

ove le c_1, c_2 son costanti non nulle, e le ω_{ik} sono forme nelle x_3, x_4 , di grado $5 - i - k$: basta per ciò che i due punti doppi coincidano coi punti fondamentali $[1], [2]$, e che i relativi piani tangenti siano ordinatamente i piani fondamentali $x_2 = 0, x_1 = 0$. Affinchè poi detti punti risultino dei tacnodi, deve essere identicamente:

$$\omega_{20} = 0 \quad , \quad \omega_{02} = 0 ;$$

ed inoltre, se si vuole che le sezioni piane generiche della superficie passanti per uno qualunque di essi, abbiano in tal punto un regresso di 2^a specie, occorre sia

$$\omega_{10} = c_1 \omega_{21}^2 \quad , \quad \omega_{01} = c_2 \omega_{12}^2 .$$

Infine, le ulteriori condizioni affinchè i punti doppi considerati siano per la superficie degli oscnodi, sono:

$$\omega_{00} = \omega_{21} (\omega_{11} - \omega_{22} \omega_{21}) \quad ; \quad \omega_{00} = \omega_{12} (\omega_{11} - \omega_{22} \omega_{12}) .$$

Uguagliando i due valori forniti per ω_{00} da queste ultime formule, si ottiene la condizione:

$$(\omega_{21} - \omega_{12}) [\omega_{11} - \omega_{22} (\omega_{21} + \omega_{12})] = 0 ;$$

si hanno dunque due casi da distinguere, secondochè risulta o meno identicamente $\omega_{21} = \omega_{12}$.

Nel primo caso, tenuto conto delle precedenti relazioni, l'equazione (5) della nostra superficie, F_5 , si può porre sotto la forma:

$$(x_1 x_2 + \omega_{12}) [(c_1 x_1 + c_2 x_2) (x_1 x_2 + \omega_{12}) + \omega_{22} (x_1 x_2 - \omega_{12}) + \omega_{11}] = 0 ;$$

questa mostra che F_5 si spezza in una quadrica ed in una superficie cubica, comportantesi opportunamente nei punti $[1]$ e $[2]$.

Nel secondo caso si perviene parimente all'equazione:

$$c_1 x_1 (x_1 x_2 + \omega_{21})^2 + c_2 x_2 (x_1 x_2 + \omega_{12})^2 + \omega_{22} (x_1 x_2 + \omega_{21}) (x_1 x_2 + \omega_{12}) = 0 ,$$

che rappresenta una superficie F_5 del 5° ordine (irriducibile), avente due coniche doppie passanti pei punti $[1], [2]$; tali coniche costituiscono precisamente l'intersezione delle due quadriche bitangenti:

$$x_1 x_2 + \omega_{12} = 0 \quad , \quad x_1 x_2 + \omega_{21} = 0 .$$

4. Si ottiene una superficie del 6° ordine avente come uniche singolarità due oscnodi, considerando la superficie generica del sistema lineare congiun-

gente quello che si ha aggregando un piano variabile ad una delle F^5 determinate al n. 3, e quello costituito dalle sestuple di piani passanti pei due oscnodi di F^5 .

5. Mediante considerazioni analoghe a quelle svolte nei nⁱ. precedenti, si dimostra che *l'imposizione ad una superficie F di un punto triplo avente infinitamente vicina una retta doppia infinitesima (che importa 17 condizioni non tutte lineari), ne diminuisce il genere aritmetico, p_a , di 3 unità ed il genere lineare, $p^{(1)}$, di 10 unità.*

Una superficie del 5° ordine avente un oscnodo ed un punto singolare di quel tipo esiste, ma si spezza necessariamente in una quadrica ed in una cubica, segantesi lungo tre coniche passanti pei due punti singolari considerati. Esistono per contro *superficie (irriducibili) del 6° ordine, aventi come uniche singolarità un oscnodo ed un punto triplo con infinitamente vicina una retta doppia; per una siffatta F^6 risulta $p_g = p_a = 4$, $p^{(1)} = 7$, ed il sistema canonico è composto con una I_3 .*

Meccanica. — *Sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a sè stesso.* — II. *Centro istantaneo di velocità e conseguenze.* Nota ⁽¹⁾ di M. PASCAL, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

In una Nota dallo stesso titolo e pubblicata in questi « Rendiconti », abbiamo fatto vedere che in ogni retta di un corpo deformabile che si muove mantenendosi simile a sè stesso, vi è in ogni istante un punto la cui velocità è perpendicolare alla retta stessa; e che inoltre esiste un *asse di moto* definito come il luogo di tutti i punti del corpo la cui velocità è parallela all'asse stesso.

È chiaro allora che la retta che nell'istante che si considera è asse di moto dovrà contenere un punto la cui velocità dovendo essere contemporaneamente perpendicolare e parallela all'asse, non potrà che essere nulla.

Per determinare un siffatto punto proponiamoci il problema di trovare il luogo di tutti i punti del corpo deformabile la grandezza della cui velocità è in un certo istante uguale ad un prefissato valore costante m .

Se nell'istante considerato è O un punto dell'asse di moto, ed indichiamo con l la distanza di un generico punto P da O e con φ l'angolo che il vettore $P - O$ forma con il vettore Ω relativo a quell'istante, la condizione imposta si esprime scrivendo

$$v_o^2 + \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi + k^2 l^2 + 2kv_o l \cos \varphi = m^2,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1932.

avendo indicato con v_0 la grandezza della velocità di O. Assumiamo ora come asse x l'asse di moto relativo a quell'istante, come asse y una retta perpendicolare all'asse di moto in O e contenuta nel piano $P\Omega$, e come asse z la perpendicolare in O a tale piano.

In tal caso $l \cos \varphi = x$, $l \sin \varphi = y$ e quindi la formula precedente si scrive

$$(1) \quad k^2 (x^2 + y^2) + \omega^2 y^2 + 2kv_0 x + v_0^2 - m^2 = 0;$$

il luogo cercato è dunque un ellissoide di rotazione intorno all'asse di moto, la cui curva meridiana è la (1): i semiassi sono $\frac{m}{k}$, $\frac{m}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}$ e il centro è sull'asse di moto nel punto $x = -\frac{v_0}{k}$.

Al variare di m si ha una famiglia di ellissoidi rotondi concentrici e coassiali: se si fissa per m il valore zero l'ellissoide si riduce al suo centro sull'asse di moto, che è il punto del corpo che in quell'istante ha velocità nulla. Esso naturalmente non dipende dalla scelta del punto O sull'asse di moto, come si potrebbe facilmente mostrare con l'ausilio delle formule trovate nella precedente Nota già citata.

Chiameremo tale punto *centro istantaneo delle velocità*. Rispetto ad un qualunque punto O del corpo, esso è definito dalla

$$(2) \quad P - O = -\frac{1}{k^2 + \omega^2} \left[kO' + O' \wedge \Omega + \frac{1}{k} O' \times \Omega \cdot \Omega \right].$$

Nel caso del corpo rigido esso evidentemente si porta a distanza infinita. Se C è il centro istantaneo delle velocità, la formula fondamentale già trovata potrà scriversi

$$P' = \Omega \wedge (P - C) + k(P - C)$$

cioè per quel che riguarda la velocità, il moto istantaneo di un corpo deformabile che si muove mantenendosi simile a sè stesso equivale al moto composto di una rotazione rigida istantanea intorno ad un asse passante per il centro di velocità, e di una deformazione pura.

2. Viene ora naturale il considerare la curva luogo dei centri istantanei delle velocità (curva Γ) e la curva luogo di tutti i punti dello spazio mobile che successivamente coincidono coi centri delle velocità (curva Γ).

Queste due curve hanno evidentemente in ogni istante un punto in comune (che è il centro attuale delle velocità) e si può facilmente dimostrare che hanno anche la tangente in comune nel centro attuale, di guisa che nel moto continuo del corpo deformabile che si muove mantenendosi simile a sè stesso, le curve luogo dei centri istantanei delle velocità e luogo dei punti dello

spazio mobile che successivamente coincidono coi centri istantanei delle velocità, rotolano senza strisciare l'una sull'altra.

Le coordinate del centro istantaneo delle velocità rispetto ad una terna di riferimento fissa sono:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = x_0 - \lambda \\ \eta_1 = y_0 - \mu \\ \zeta_1 = z_0 - \nu \end{array} \right.$$

essendo x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto O arbitrario del corpo nell'istante che si considera, ed essendo λ, μ, ν le componenti del vettore $\sigma O'$ che si ottiene applicando al vettore O' l'omografia

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{k^2 + \omega^2} \left[k \cdot + \frac{1}{k} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \times - \boldsymbol{\omega} \wedge \right] = \\ &= \frac{1}{k^2 + \omega^2} \left[k \cdot + \frac{1}{k} H(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \wedge \right]. \end{aligned}$$

Le coordinate del medesimo punto rispetto ad una terna connessa col corpo con l'origine in O sono:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\frac{1}{\rho} \{ \alpha \lambda + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \nu \} \\ \eta = -\frac{1}{\rho} \{ \beta \lambda + \beta_1 \mu + \beta_2 \nu \} \\ \zeta = -\frac{1}{\rho} \{ \gamma \lambda + \gamma_1 \mu + \gamma_2 \nu \}. \end{array} \right.$$

Le componenti secondo gli assi fissi della velocità del centro istantaneo di velocità lungo la curva Γ_1 sono:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_1}{dt} = x'_0 - \lambda' \\ \frac{d\eta_1}{dt} = y'_0 - \mu' \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = z'_0 - \nu'. \end{array} \right.$$

Derivando le (6) si hanno le componenti secondo gli assi mobili della velocità del centro C lungo la curva mobile Γ : si ha:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\rho'}{\rho^2} \{ \alpha\lambda + \alpha_1\mu + \alpha_2\nu \} - \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \{ \alpha'\lambda + \alpha'_1\mu + \alpha'_2\nu + \alpha\lambda' + \alpha_1\mu' + \alpha_2\nu' \} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\rho'}{\rho^2} \{ \beta\lambda + \beta_1\mu + \beta_2\nu \} - \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \{ \beta'\lambda + \beta'_1\mu + \beta'_2\nu + \beta\lambda' + \beta_1\mu' + \beta_2\nu' \} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\rho'}{\rho^2} \{ \gamma\lambda + \gamma_1\mu + \gamma_2\nu \} - \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \{ \gamma'\lambda + \gamma'_1\mu + \gamma'_2\nu + \gamma\lambda' + \gamma_1\mu' + \gamma_2\nu' \}. \end{aligned} \right.$$

Ricavando di qui le componenti della medesima velocità di C lungo la curva Γ secondo gli assi fissi, si ottiene con facili riduzioni:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\xi}{dt} &= \frac{1}{\rho} \{ -\lambda' + k\lambda - (\mu r_1 - \nu q_1) \} \\ \frac{\delta\eta}{dt} &= \frac{1}{\rho} \{ -\mu' + k\mu - (\nu p_1 - \lambda r_1) \} \\ \frac{\delta\zeta}{dt} &= \frac{1}{\rho} \{ -\nu' + k\nu - (\lambda q_1 - \mu p_1) \} \end{aligned} \right.$$

cioè come si può facilmente verificare:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\xi}{dt} &= \frac{1}{\rho} (x'_0 - \lambda') = \frac{1}{\rho} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{\delta\eta}{dt} &= \frac{1}{\rho} (y'_0 - \mu') = \frac{1}{\rho} \frac{d\eta_1}{dt} \\ \frac{\delta\zeta}{dt} &= \frac{1}{\rho} (z'_0 - \nu') = \frac{1}{\rho} \frac{d\zeta_1}{dt} \end{aligned} \right.$$

Le componenti secondo gli assi fissi della velocità del centro istantaneo delle velocità sulla curva fissa Γ_1 sono proporzionali nel rapporto ρ alle componenti secondo gli assi fissi della velocità del medesimo punto sulla curva mobile Γ .

Il centro istantaneo delle velocità è l'unico punto dell'asse di moto che goda di questa proprietà, come si potrebbe facilmente mostrare.

3. Non è inutile aggiungere infine qualche osservazione circa le rette del corpo che sono parallele all'asse di moto in un certo istante, ed al piano perpendicolare all'asse di moto e passante per il centro delle velocità. Tale

piano risulta eccezionale per parecchi riguardi: esso è infatti l'unico piano di cui tutti i punti hanno la velocità contenuta nel piano stesso (per un piano generico si ha invece che il luogo dei punti del piano che hanno la velocità contenuta nel piano stesso è, come nel caso del corpo rigido, una retta); esso non possiede quindi alcun punto la cui velocità sia perpendicolare al piano; se si presceglie inoltre su di esso un punto qualunque e si ricerca il luogo di tutti i punti del corpo la cui velocità è diretta verso quel punto, si trova che la cubica gobba che abbiamo trovata in generale degenera nell'insieme di una circonferenza sul piano eccezionale ed una retta parallela all'asse di moto.

Le rette del corpo parallele all'asse di moto sono appunto tali che le direzioni delle velocità di tutti i loro punti concorrono in un punto del piano eccezionale. Il luogo dei secondi estremi dei vettori di velocità, che in generale è, per una retta generica, una retta sghemba con la prima, per una retta parallela all'asse di moto è un'altra retta pure parallela all'asse di moto.

Le dimostrazioni di queste semplici proprietà non offrono difficoltà alcuna.

Astronomia. — *Sopra la variazione della eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili.* Nota⁽¹⁾ di F. ZAGAR, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Il prof. Armellini ha pubblicato recentemente una Nota⁽²⁾, nella quale egli tratta l'interessante problema dell'incremento della eccentricità delle orbite binarie, dimostrando come sia inesatta l'opinione, generalmente ammessa, che la detta eccentricità rimanga secolarmente costante al decrescere della massa totale⁽³⁾. Egli ricerca dapprima quali devono essere le condizioni perchè la eccentricità resti costante, quindi mette in evidenza che se in generale la eccentricità osculatrice assume in un istante il valore 1, mentre m tende a zero per t tendente all'infinito, da quell'istante in poi l'eccentricità cresce all'infinito insieme a t , e infine egli riporta un particolare esempio in cui l'eccentricità cresce, a partire da qualunque valore, col diminuire di m .

Ritengo opportuno fare conoscere in questa Nota due casi particolari integrabili del problema, il primo quale esempio per le asserzioni della

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1932.

(2) « Rendiconti R. Accademia Lincei », vol. XV, fasc. 9 (maggio 1932). « Contr. Scient. R. Osserv. Astr. di Roma », N. 38.

(3) Conclusioni dedotte da JEANS in *Cosmogonic Problems associated with a Secular Decrease of Mass*, « M. N. », 85-2 (1924) e in *Astronomy and Cosmogony*, p. 291.

prima parte della predetta ricerca, riguardante il caso di eccentricità costante, il secondo analogo all'esempio dato dal prof. Armellini, ma un poco più generale, con la eccentricità dunque sempre crescente.

1. Mantenendo notazioni e unità di misura adoperate nella Nota citata, supponiamo dapprima che la massa del sistema decresca secondo la legge

$$(I) \quad m = \frac{4 + \varepsilon^4}{1 + \varepsilon \sqrt{1+t}} \quad (\varepsilon \text{ costante positiva qualsiasi});$$

allora le equazioni del moto relativo nel problema dei due corpi

$$(I) \quad r^2 \ddot{\vartheta} = 1, \quad \ddot{r} = \frac{1}{r^3} - \frac{m}{r^2},$$

ammettono, come facilmente si può verificare, la seguente soluzione

$$(2) \quad r = \varepsilon \sqrt{1+t}, \quad \vartheta = \frac{1}{\varepsilon^2} \log(1+t),$$

avendo supposto $\vartheta = 0$ per $t = 0$.

Segue allora

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad B_0 = -\dot{r}_0 = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad m_0 = \frac{1}{4\varepsilon} (4 + \varepsilon^4), \\ dm = -\frac{1}{8\varepsilon} (4 + \varepsilon^4) \frac{1}{\sqrt{(1+t)^3}} \cdot dt, \quad d\vartheta = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{1+t} \cdot dt \\ \frac{dm}{d\vartheta} = -\frac{\varepsilon}{8} (4 + \varepsilon^4) (1+t)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\varepsilon}{8} (4 + \varepsilon^4) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\vartheta}, \end{aligned} \right.$$

dove si denota con e la base dei logaritmi naturali.

Con queste quantità si ha

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_0^\vartheta \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta &= -\frac{\varepsilon}{8} (4 + \varepsilon^4) \int_0^\vartheta e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= -\frac{\varepsilon}{8} (4 + \varepsilon^4) \frac{4}{4 + \varepsilon^4} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\vartheta} \left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos \vartheta + \sin \vartheta \right) \right\}_0^\vartheta = \\ &= -\frac{\varepsilon^3}{4} - \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\vartheta} \left(\sin \vartheta - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos \vartheta \right) \end{aligned}$$

e

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_0^\vartheta \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta &= -\frac{\varepsilon}{8} (4 + \varepsilon^4) \int_0^\vartheta e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\vartheta} \left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin \vartheta + \cos \vartheta \right). \end{aligned}$$

Da quanto precede, le relazioni (12) e (13) del prof. Armellini diventano allora, per le (3), (4) e (5),

$$(6) \quad \begin{cases} me \cos \omega = A_0 - m_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta = + \frac{1}{2} \varepsilon c^{-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \vartheta} \left(\sin \vartheta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos \vartheta \right) \\ me \sin \omega = B_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = - \frac{1}{2} \varepsilon c^{-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \vartheta} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \vartheta + \cos \vartheta \right) \end{cases}$$

e perciò segue, quadrando e sommando, tenendo conto della seconda delle (2),

$$m^2 e^2 = \frac{1}{4} \varepsilon^2 c^{-\varepsilon^2 \vartheta} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^4 \right\} = \frac{\varepsilon^2 (4 + \varepsilon^4)}{16 (1 + t)}$$

cioè infine, per la (1),

$$e^2 = \frac{\varepsilon^4}{4 + \varepsilon^4},$$

$$(7) \quad e = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{4 + \varepsilon^4}} \quad (\text{costante } e < 1)$$

In questo caso il numeratore della (16) del prof. Armellini,

$$\left\{ A_0 - m_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta \right\}^2 + \left\{ B_0 - \int_0^{\vartheta} \frac{dm}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \right\}^2,$$

per le (6) diventa

$$\begin{aligned} & \left\{ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 c^{-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \vartheta} \left(\sin \vartheta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos \vartheta \right) \right\}^2 + \\ & + \left\{ - \frac{1}{2} \varepsilon^2 c^{-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \vartheta} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \vartheta + \cos \vartheta \right) \right\}^2 \end{aligned}$$

ed esso si annulla effettivamente per $t \rightarrow \infty$ ed $m \rightarrow 0$, come facilmente può verificarsi, conformemente all'enunciato al numero 3 della Nota citata.

Per controllo si può calcolare l'eccentricità mediante la nota relazione

$$(8) \quad e^2 = 1 + \frac{2h}{m^2}$$

essendo

$$(9) \quad 2h = \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2m}{r}.$$

Introducendo in queste la (I) e la prima delle (2) con la sua derivata si ha

$$\frac{2b}{m^2} = -\frac{4}{4 + \varepsilon^4},$$

$$e = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{4 + \varepsilon^4}},$$

che è appunto la (7).

2. Consideriamo in secondo luogo il secondo caso integrabile del Mestschersky ⁽¹⁾, nel quale la massa decresce secondo la legge

$$(II) \quad m = \frac{1}{\sqrt{a + bt + ct^2}},$$

dove si deve supporre

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac - \frac{1}{4}b^2 \geq 0$$

perchè m rimanga sempre reale. Di questo caso un particolare integrale è

$$(IO) \quad r = k\sqrt{a + bt + ct^2}$$

con k costante e positivo, legato alle tre quantità a, b, c dalla relazione

$$(II) \quad \frac{1}{k} - k^3 \left(ac - \frac{1}{4}b^2 \right) = 1,$$

come può facilmente verificarsi mediante la seconda delle (I). (Essendo il coefficiente $ac - \frac{1}{4}b^2$ positivo, la equazione (II) in k ha una sola radice reale positiva).

Per applicare in questo caso direttamente la (8) deriviamo la (IO) ed introduciamo questa derivata insieme alla (I) ed alla (IO) stessa nella (9) e poi sostituiamo $2b$ e la (I) nella (8), con che risulta

$$(I2) \quad e^2 = 1 + \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{4}k^2(b + 2ct)^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{4}k^2(b + 2ct)^2,$$

dalla quale si rileva subito che l'eccentricità è funzione crescente di t , ed anzi tende all'infinito per t tendente all'infinito.

(1) J. MESTSCHERSKY, *Ueber die Integration der Bewegungsgleichungen ecc.*, « A. N. », Bd. 159, n. 3807.

Per riconoscere che in questo caso possono esistere anche eccentricità minori di 1, basta osservare che la precedente per $t = 0$ prende la forma

$$e_{t=0}^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{4} k^2 b^2,$$

cosicchè per $b = 0$ e per tutti i valori di b che soddisfanno alla condizione

$$b^2 < \frac{4}{k^4} (2k - 1)$$

il valore iniziale della eccentricità è certamente minore dell'unità.

Se le costanti sotto la radice della (II) soddisfanno alla condizione

$$4ac - b^2 = 0,$$

risulta $k = 1$ e il caso (1° caso del Mestschersky)

$$m = \frac{1}{a + bt}, \quad r = a + bt,$$

e da questo, per $a = 1$, $b = \varepsilon$, segue infine l'esempio del prof. Armellini.

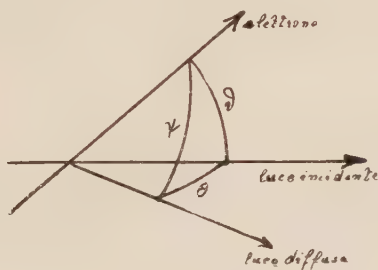
Fisica. — *Sopra un'estensione della formola di Woo. Intensità della luce diffusa da un elettrone in moto.* Nota⁽¹⁾ di C. CANNATA, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

1. Il problema della intensità di un fascio di radiazioni diffuse per effetto Compton è stato oggetto, fin dai primi tempi della scoperta di questo fenomeno, di numerose e interessanti ricerche. In tempi più recenti la teoria di Schrödinger (e di Heisenberg) ha portato ad una soluzione piuttosto soddisfacente riconducendo il calcolo dell'intensità effettiva della radiazione diffusa al calcolo analogo fatto in base alla teoria ondulatoria prequantistica (che brevemente denominerò *teoria classica*). Questo calcolo classico riesce semplicissimo poichè nel campo dei raggi X (e meglio ancora dei raggi γ) a cui d'ordinario ci si limita, è lecito ritenere che gli elettroni diffondenti si trovino in quiete; ciò che nel terreno quantistico equivale in fondo a trascurare l'energia cinetica dell'elettrone di fronte a quella molto più grande del quanto incidente. Tale semplificazione non è però più lecita qualora si voglia studiare la diffusione su elettroni liberi e comunque mobili, di radiazioni a grande lunghezza d'onda (come la luce visibile e le onde hertziane).

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1932.

Il fenomeno della diffusione di queste radiazioni su elettroni liberi, benchè di solito trascurato, presenta un certo interesse anche dal punto di vista applicativo: così per es. il Fabry ⁽¹⁾ seguendo un processo strettamente classico ne fa l'applicazione allo studio della propagazione delle onde hertziane.

Successivamente anche il Glocker ⁽²⁾ si è occupato brevemente della questione dal punto di vista quantistico, mettendo specialmente in evidenza l'enorme variazione di frequenza che si può ottenere con elettroni veloci. È giusto però dire che molti dei suoi risultati sono sostanzialmente già contenuti nella geniale Tesi di Dottorato del De Broglie ⁽³⁾.



Non mi sembra pertanto privo d'interesse di riprendere, da un punto di vista più generale e moderno, lo studio dell'intensità di una radiazione diffusa da elettroni liberi e comunque mobili.

Secondo quanto ho detto in principio, la nostra questione si potrà ritenere risolta quando si riuscisse a calcolare l'intensità della radiazione diffusa in base alla teoria classica ⁽⁴⁾.

Questo calcolo è stato eseguito da Woo ⁽⁵⁾ nel caso particolare in cui l'elettrone diffondente si muova nella stessa direzione del fascio incidente.

Io, seguendo un metodo sostanzialmente analogo, ma formalmente più semplice di quello del Woo, ritrovo in questa Nota il suo risultato, estendendolo poi al caso in cui l'elettrone diffondente si muova in una direzione qualunque.

2. Prenderò le mosse da una relazione stabilita da Gordon ⁽⁶⁾ in base alla teoria di Schrödinger. Denotando con I_{el} e ν_{el} l'intensità e la frequenza

(1) « C. R. », 187, 797 (1928).

(2) « Phys. Rev. », 33, 116 (1929).

(3) « Annales de Phys. », 3, 22 (1925).

(4) Per semplicità escludo dal mio studio il campo delle radiazioni a frequenza altissima (raggi γ duri) per i quali entra in conto la correzione di KLEIN-NISHINA (« Zeit. f. Physik. », 52, 853, (1928)). Questa correzione è notoriamente trascurabile per lunghezza d'onde superiori a 0,1 Å, cioè anche per i raggi X più duri.

(5) « Phys. Rev. », 25, 444 (1925).

(6) « Zeit. f. Physik », 40, 117 (1927). Nel caso particolare dell'elettrone inizialmente

della radiazione diffusa, secondo la teoria classica, da un elettrone comunque mobile, e I^* , v^* i valori effettivi di queste stesse grandezze, la su detta relazione si può scrivere:

$$(1) \quad I^* = \left(\frac{v^*}{v_{cl}} \right)^3 I_{cl}.$$

D'altro canto se v_0 denota la frequenza della radiazione incidente si ha notoriamente ⁽¹⁾:

$$(2) \quad v^* = v_0 \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos \psi + \alpha (1 - \cos \theta)}$$

essendo:

$$\alpha = \frac{h v_0}{m c^2};$$

h la costante di Planck; m la massa dell'elettrone; c la velocità della luce; βc la velocità dell'elettrone diffondente; ϑ l'angolo formato dalla velocità dell'elettrone con la direzione del fascio incidente; ψ l'angolo tra la direzione dell'elettrone e quella del fascio diffuso; θ l'angolo compreso tra le direzioni del fascio incidente e del fascio diffuso.

La frequenza v_{cl} irradiata dall'elettrone mobile secondo la teoria classica è quella originaria v_0 modificata per effetto Doppler e cioè:

$$(3) \quad v_{cl} = v_0 \frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos \psi}$$

che si può ottenere anche dalla (2) ponendovi $\alpha = 0$.

In particolare è da notare che per le grandi lunghezze d'onda (luce visibile e onde hertziane) il termine α è trascurabile di fronte all'unità ⁽²⁾, sicchè si può praticamente ritenere

$$v^* = v_{cl}$$

e quindi per la (1),

$$I^* = I_{cl},$$

in conformità al principio di corrispondenza.

In ogni caso, in base alla (1) e alla (2), il problema della determinazione dell'intensità del fascio diffuso si potrà considerare risoluto, una volta che si sappia calcolare I_{cl} .

fermo, questa formula era stata dedotta mediante considerazioni di corrispondenza da BREIT. « Phys. Rev. », 27, 362 (1926), e successivamente da Dirac in base alla teoria di HEISENBERG. « Proc. Roy. Society », 111, 405 (1926).

(1) DE BROGLIE, loc. cit.

(2) Per la luce gialla si ha infatti $\frac{h v_0}{m c^2} \cong 4 \cdot 10^{-6}$.

3. Conservando il significato dei simboli ϑ, ψ, θ , sia inoltre I_0 l'intensità del fascio incidente in un sistema K solidale con l'osservatore; denoteremo poi per semplicità con gli stessi simboli accentati, i valori delle varie grandezze giudicati però da un sistema K' solidale con l'elettrone (nelle sue condizioni iniziali di moto).

Nella teoria classica dell'effetto Doppler si trova ⁽¹⁾

$$(4) \quad I'_0 = I_0 \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2}{1 - \beta^2}.$$

Nel sistema K' , l'elettrone colpito dal fascio d'intensità I'_0 irradierà secondo la nota legge (di Thomson)

$$(5) \quad I'_{cl} = I'_0 \frac{1 + \cos^2 \theta'}{2} \frac{e^4}{c^4 m^2 r'^2}$$

in cui e denota la carica elettronica ed r' la distanza (giudicata in K') dell'osservatore dall'elettrone. L'intensità I_{cl} del fascio diffuso, giudicata da K , sarà al solito:

$$(6) \quad I_{cl} = I'_{cl} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \psi)^2}$$

ossia, tenendo conto della (5) e della (4),

$$(7) \quad I_{cl} = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r'^2} \left(\frac{1 - \beta \cos \vartheta}{1 - \beta \cos \psi} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta'}{2}.$$

Nel caso particolare in cui il moto dell'elettrone fosse diretto secondo il fascio incidente si ha $\vartheta = \theta$, $\psi = \theta$ e quindi

$$(8) \quad I_{cl} = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r'^2} \cdot \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta'}{2}.$$

È facile esprimere, con la formula dell'aberrazione, θ' mediante θ :

$$(9) \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}.$$

Inoltre si ha evidentemente

$$r \sin \theta = r' \sin \theta'$$

e quindi

$$(10) \quad \frac{r^2}{r'^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta'} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

(1) V. per es. LAUE, *Relativitätsprinzip*. Braunschweig, 1911, p. 91.

Tenendo presenti le (9) e (10), con ovvie riduzioni, la (8) diviene infine:

$$(11) \quad I_{cl} = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r^2} \cdot \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \left\{ (1 + \beta^2) \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} - 2\beta \cos \theta \right\}$$

che è appunto la formula dedotta dal Woo.

4. Partendo dalla formula generale (7) è facile estendere il calcolo al caso in cui la velocità dell'elettrone mobile sia comunque diretta rispetto al fascio incidente. Nel sistema K' si ha evidentemente

$$(12) \quad \cos \theta' = \cos \psi' \cos \vartheta' + \sin \psi' \sin \vartheta' \cos \varphi'$$

essendo φ' l'angolo formato dal piano *fascio incidente-velocità dell'elettrone* con il piano *fascio diffuso-velocità dell'elettrone*.

Intanto si ha al solito ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' &= \frac{\cos \vartheta - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta} & , & & \cos \psi' &= \frac{\cos \psi - \beta}{1 - \beta \cos \psi} \\ \sin \vartheta' &= \frac{\sin \vartheta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta} & , & & \sin \psi' &= \frac{\sin \psi \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \psi} \end{aligned}$$

Inoltre, evidentemente, $\varphi' = \varphi$ sicchè la (12) diviene:

$$(13) \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta (\cos \vartheta + \cos \psi) + \beta^2 (1 - \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi)}{(1 - \beta \cos \vartheta)(1 - \beta \cos \psi)}$$

Nel caso generale la (10) viene poi sostituita dalla relazione analoga

$$(14) \quad \frac{r^2}{r'^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \psi)^2}$$

Sostituendo infine nella (8) i valori di $\cos \theta'$ e r'^2 dati rispettivamente dalla (13) e dalla (14) si trova la formula cercata per l'intensità della luce diffusa.

Questa formula viene molto a semplificarsi nel caso in cui β sia abbastanza piccolo per poterne trascurare il quadrato (di fronte all'unità). Si ottiene allora in base alla (13).

$$1 + \cos^2 \theta' = \frac{1 + \cos^2 \theta - 2\beta (\cos \vartheta + \cos \psi)(1 + \cos \theta)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 (1 - \beta \cos \psi)^2}$$

e la (8) diviene:

$$(15) \quad I_{cl} = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r^2} \cdot \frac{1}{(1 - \beta \cos \psi)^6} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} - \beta (\cos \vartheta + \cos \psi)(1 + \cos \theta) \right\}$$

(1) V. LAUE, loc. cit.

Volendo l'espressione dell'intensità effettiva I^* di una radiazione diffusa comunque, basterà tener presente la (1) e la (2) ed osservare che I_{cl} è data dall'espressione precedente (15), mentre v_{cl} è data dalla (3). Si trova così

$$(16) \quad I^* = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r^2} \cdot \frac{(1 - \beta \cos \psi)^{-3}}{[1 - \beta \cos \psi + \alpha (1 - \cos \theta)]^3} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} - \right. \\ \left. - \beta (\cos \vartheta + \cos \psi) (1 + \cos \theta) \right\}.$$

Nel caso dell'elettrone in quiete $\beta = 0$, e quindi

$$(17) \quad I^* = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r^2} \cdot \frac{1}{[1 + \alpha (1 - \cos \theta)]^3} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$$

che è la nota formula data da Breit⁽¹⁾.

Ponendo invece $\alpha = 0$ si ottiene:

$$(18) \quad I^* = I_{cl} = I_0 \frac{e^4}{c^4 m^2 r^2} (1 - \beta \cos \psi)^{-6} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} - \right. \\ \left. - \beta (\cos \vartheta + \cos \psi) (1 + \cos \theta) \right\}$$

la quale esprime l'intensità della radiazione diffusa da un elettrone in moto, nel caso delle grandi lunghezze d'onda (luce visibile ed onde hertziane).

È naturale che se la diffusione avviene su un gran numero di elettroni mobili con velocità diverse, una radiazione originariamente monocromatica darà luogo ad una riga espansa (e spostata rispetto alla riga eccitatrice).

Il calcolo di questo spostamento, insieme al calcolo della larghezza della riga diffusa, formerà oggetto di una prossima Nota.

(1) «Phys. Rev.», 27, 366 (1926).

Fisica. — *Sui circuiti che hanno una capacità in parallelo su un diodo in saturazione.* Nota ⁽¹⁾ di C. DEI, presentata dal Socio A. LO SURDO.

1. In lavori precedenti ⁽²⁾ ho avuto occasione di studiare i circuiti elettrici che si ottengono inserendo nei circuiti elettrici comuni un diodo in modo che esso rimanga nella fase di saturazione. A tale uopo si utilizzava una forza elettromotrice pulsante del tipo $E = \bar{E} + E_0 \sin \omega t$ ove la f. e. m. \bar{E} era dovuta ad una batteria di piccoli accumulatori e la f. e. m. $E_0 \sin \omega t$ era quella esistente agli estremi del secondario di un trasformatore.

Come mostrò il prof. Lo Surdo ⁽³⁾ la intensità che attraversa il diodo nella fase di saturazione è rappresentata con molta approssimazione da una relazione lineare del potenziale V esistente fra placca e filamento:

$$i = j + KV = j \cdot (1 + \alpha V)$$

ove j e K sono costanti che dipendono dalla temperatura del filamento mentre il loro rapporto $\alpha = \frac{K}{j}$, per una data valvola termoionica, ne è indipendente. Col variare della temperatura T la $j = j(T)$ varia rapidamente seguendo la legge di Richardson.

Tenendo conto di ciò furono esaminati i due casi:

1° circuito avente in serie, una self L , una resistenza R , il diodo K e la f. e. m. E ;

2° circuito uguale al precedente ma avente in più in parallelo sul diodo la capacità C .

Mentre i risultati teorici del primo caso li sottoposi ad una verifica sperimentale, il secondo caso lo trattai solo teoricamente. Scopo di questa Nota è soprattutto di verificare sperimentalmente i risultati salienti relativi al secondo caso; ed inoltre è data anche una interpretazione sia ricorrendo alla nota rappresentazione geometrica delle grandezze sinusoidali, sia al calcolo simbolico.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1932.

(2) C. DEI, *La fase della corrente di saturazione termoionica in un circuito a tensione pulsante*, «R. Acc. Naz. dei Lincei», 1928; *Sui circuiti con valvola termoionica in saturazione derivata su un condensatore*, «R. Acc. Naz. dei Lincei», 1928.

(3) A. LO SURDO, *La corrente di saturazione delle valvole termoioniche*, («R. Acc. Naz. dei Lincei»; fasc. 5, marzo 1927).

2. La fig. 1 rappresenta schematicamente la disposizione adoperata.

L'autoinduzione L era rappresentata dai secondari di due rocchetti di Rumkorff posti in serie ed il suo valore era circa 800 Henry. La resistenza ohmica totale R (somma della resistenza ohmica dei rocchetti e di altra resistenza R' non induttiva e regolabile) era circa 50000 Ohm. L'ampiezza E_0 era circa 700 Volta ed \bar{E} circa 2400 Volta. A era un milliamperometro

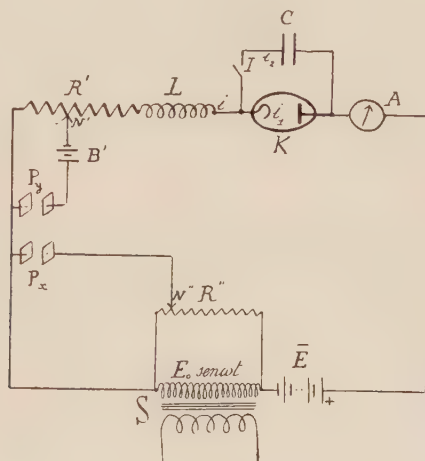


Fig. 1.

che indicava l'intensità media attraversante il ramo principale; I era un interruttore che serviva al momento opportuno ad inserire la capacità C ⁽¹⁾ in parallelo sul diodo K ⁽²⁾.

Studiando questo secondo caso ⁽³⁾ furono trovate le espressioni seguenti delle intensità i, i_1, i_2 del circuito principale e dei rami derivati:

$$(1) \quad i = \frac{\frac{1}{\alpha} + \bar{E}}{R + \frac{1}{K}} + \frac{E_0 \cdot \sqrt{K^2 + C^2 \omega^2}}{\sqrt{(CR + LK)^2 \cdot \omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + KR)]^2}} \cdot \sin(\omega t - \Phi)$$

$$(2) \quad i_1 = \frac{\frac{1}{\alpha} + \bar{E}}{R + \frac{1}{K}} + \frac{KE_0}{\sqrt{(CR + LK)^2 \cdot \omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + KR)]^2}} \cdot \sin(\omega t - \Psi)$$

$$(3) \quad i_2 = \frac{CE_0 \omega}{\sqrt{(CR + LK)^2 \cdot \omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + KR)]^2}} \cdot \cos(\omega t - \Psi')$$

(1) Furono adoperati e trovati ottimi allo scopo i condensatori fissi Manens della ditta Ducati di Bologna.

(2) Il diodo adoperato è MR 4 n. 623.

(3) Cfr. pag. prec. (2), Nota II.

ove:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{-C\omega + 2\omega (C^2 \omega^2 + K^2)}{K + R (C^2 \omega^2 + K^2)}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} \Psi = \frac{(CR + LK) \cdot \omega}{1 + KR - \omega^2 LC}.$$

Come già osservammo secondochè $\frac{I}{K} \geq 2\omega L$ si deduce che esistono due valori C_1 e C_2 distinti o coincidenti della capacità che rendono l'intensità totale i in fase con la f. e. m. $E_0 \sin \omega t$:

$$(6) \quad C_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - (2L\omega K)^2}}{2L\omega^2}, \quad C_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - (2L\omega K)^2}}{2L\omega^2}.$$

È appunto il fatto singolare della esistenza dei due valori C_1, C_2 della capacità che vogliamo mettere in evidenza col dispositivo della fig. 1.

Per studiare la differenza di fase fu adoperato un oscillografo della Western a catodo incandescente nel quale il sottile fascio elettronico col l'ausilio di un opportuno campo anodico era costretto a passare fra una coppia di placche parallele e poi fra un'altra coppia ad angolo retto rispetto alla prima.

L'anodo dell'oscillografo (non rappresentato in figura) veniva collegato con una placca di ciascuna delle due coppie ed al tempo stesso con le estremità a comune delle resistenze R', R'' . Perciò ponendo in comunicazione il contatto scorrevole N' della resistenza R' con la placca libera della coppia P_y si otteneva fra queste due placche un campo elettrostatico proporzionale alla intensità i traversante il circuito. Ponendo invece il contatto scorrevole N'' della resistenza R'' (posta in derivazione sul secondario del trasformatore) in comunicazione con la placca libera della coppia P_x si otteneva fra quest'altra coppia di placche un campo elettrostatico proporzionale al potenziale istantaneo esistente alle estremità del trasformatore.

Così facendo, quando l'interruttore I era aperto, si notava sullo schermo fluorescente dell'oscillografo una ellisse più o meno schiacciata a seconda della minore o maggiore accensione del diodo K (e quindi a seconda del

valore minore o maggiore della intensità media $\bar{i} = \frac{\frac{I}{\alpha} + \bar{E}}{R + \frac{1}{K}}$ che era mi-

surata da A).

Nella esecuzione pratica riuscì utile inserire una piccola batteria B' in guisa da eliminare fra le placche P_y tutta od in parte la deviazione elet-

trostatica dovuta alla parte costante di i $\left(\text{ossia } \frac{\frac{I}{\alpha} + \bar{E}}{R + \frac{1}{K}} = \bar{i} \right).$

3. Tenendo costante la intensità media fornita da A, la piccola ellisse ottenuta sullo schermo dell'oscillografo subiva delle modificazioni col variare della capacità C. Tali cambiamenti furono trovati essere d'accordo con quanto è prevedibile dalle formule (1) e (4). Difatti ponendoci nelle condizioni che sia soddisfatta la disuguaglianza $\frac{1}{K} > 2 L\omega$ non solo si trovano due valori della capacità C_1 e C_2 in corrispondenza ai quali la ellisse degenera in una retta, ma si trova anche che l'ampiezza P_y aumenta coll'aumentare di C come vuole l'espressione
$$\frac{E_0 \cdot \sqrt{K^2 + C^2 \omega^2}}{\sqrt{(CR + LK)^2 \cdot \omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + KR)]^2}}$$
 nelle condizioni e dati di queste esperienze.



fig. 2
 $C = 0$



fig. 3
 $C = 3000 \mu F$



fig. 4
 $C = 6000 \mu F$

Col crescere di C in principio (cioè per piccoli valori della capacità) si trova che l'ellisse si schiaccia sempre più sino ad avere una retta, poi ritorna ellisse (con una P_y maggiore), poi di nuovo retta (con una P_y sempre maggiore) e finalmente ellisse che per grandi valori di C si avvicina alla forma del cerchio.

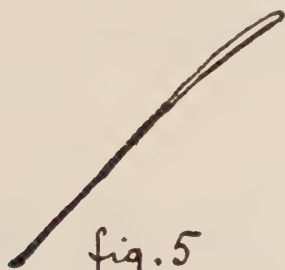


fig. 5
 $C = 11000 \mu F$



fig. 6
 $C = 50000 \mu F$

Le figg. 2, 3, 4, 5, 6 rappresentano queste successive condizioni nel caso che $\bar{z} = 17$ m. a.; precisamente furono fatte delle fotografie delle diverse ellissi ottenute sullo schermo dell'oscillografo (i valori delle capacità

sono indicati sotto ogni figura) e siccome le negative riuscirono assai deboli, con della carta trasparente furono fatti dei calchi fedeli il più possibile.

Come si vede i valori C_1 e C_2 ottenuti sperimentalmente in quelle condizioni di intensità media, risultarono approssimativamente

$$C_1 \approx 0.3 \cdot 10^{-8} \text{ Farad,}$$

$$C_2 \approx 1.1 \cdot \quad \gg$$

Siccome la frequenza della corrente alternata era di circa 46 periodi al secondo, il valore sperimentale di K che si ottiene (per $i = 17 \text{ m. a.}$) risulta:

$$(7) \quad K = \omega / \sqrt{C_1 \cdot C_2} \approx 1.66 \cdot 10^{-6}$$

al quale corrisponde il valore $\approx 10^{-4}$ della costante caratteristica α del diodo adoperato

La sensibilità dell'oscillografo è la seguente: 11 mm. di deviazione per 10 volt di differenza di potenziale fra le placche. Ci siamo posti in condizioni che l'ellisse immagine sulla lastra fosse uguale all'ellisse oggetto. Inoltre le fotografie qui riprodotte sono state stampate in grandezza naturale. Si noti la leggera deformazione delle varie ellissi.

Possiamo ora in base ai valori sperimentali di K e L calcolarci sia l'ampiezza I_0 della parte variabile di i , sia i valori di $\text{tg } \Phi$ per vari valori della capacità C . Otteniamo così la tabella seguente (ove $R' = 4000 \Omega$):

C (1)	$\text{tg } \Phi$ (2)	$I_0 = \frac{E_0 \sqrt{K^2 + C^2 \omega^2}}{\sqrt{(CR + LK)^2 \omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + KR)]^2}}$	Differenza di potenziale massima fra le due placche $P_y (= R' I_0)$	Deviazione massima in mm., nella direzione y , misurata sulla lastra
0	$\approx 3.5 \cdot 10^{-1}$	$\approx 10^{-3}$	4 volta	$\approx 8.8/2 = 4.4$
3000 $\mu\mu\text{ F}$	$\approx 3.0 \cdot 10^{-2}$	$\approx 1.35 \cdot 10^{-3}$	5.4 »	$\approx 12/2 = 6$
6000 $\mu\mu\text{ F}$	$\approx 2 \cdot 10^{-1}$	$\approx 2.02 \cdot 10^{-3}$	8.1 »	$\approx 17.5/2 = 8.7$
11000 $\mu\mu\text{ F}$	$\approx 9 \cdot 10^{-2}$	$\approx 3.88 \cdot 10^{-3}$	15.5 »	$\approx 34/2 = 17$
50000 $\mu\mu\text{ F}$	≈ 2.8	$\approx 4.06 \cdot 10^{-3}$	16.2 »	$\approx 37/2 = 18.5$

(1) In tutte queste misure è stata trascurata la capacità propria del diodo poichè in genere è piccolissima.

(2) I valori di $\text{tg } \Phi$ calcolati colla (4) e corrispondenti a C_1 e C_2 non risultano nella tabella esattamente uguali a zero: ma questo non deve meravigliare affatto perchè sia il valore sperimentale di L e sia i valori sperimentali di K , ω , E_0 , R sono certamente affetti da errori e sarebbe assurdo pretendere in generale che tali errori si compensassero a vicenda

Come si vede i valori dell'ultima colonna sono praticamente proporzionali ai valori corrispondenti della penultima colonna ed in più sono anche uguali ai valori che sono da prevedersi tenendo conto dei dati relativi alla sensibilità. In conclusione quindi nella tabella precedente i dati sperimentali concordano bene coi dati teorici.

4. Facciamo ora vedere come per mezzo della nota rappresentazione geometrica delle grandezze sinusoidali si riesca a provare, in modo facile, che esistono due valori della capacità che rendono nulla la differenza di fase Φ .

Dato che il caso è analogo, esaminiamo la disposizione rappresentata nella fig. 7 (ove in luogo del diodo della fig. 1 vi è una resistenza r ⁽¹⁾).

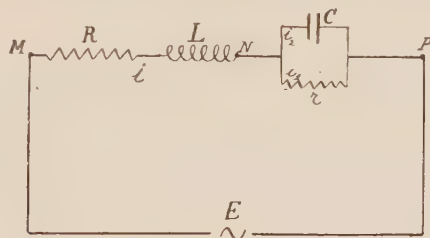


Fig. 7.

Dette i, i_1, i_2 le intensità nel circuito principale e nei rami derivati si avrà se la f. e. m. è $E = E_0 \sin \omega t$:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int i_2 dt \\ E = L \frac{di}{dt} + iR + i_1 r. \end{array} \right.$$

Derivando la prima relazione rispetto a t , si trova con facili operazioni (dopo aver tenuto conto che $i = i_1 + i_2$):

$$E_0 \sin \omega t + E_0 Cr \omega \cos \omega t = CLr \frac{d^2 i}{dt^2} + (L + CRr) \frac{di}{dt} + (R + r) i.$$

Affinchè quindi i sia in fase con E cioè sia del tipo $I_0 \sin \omega t$ (siccome deve essere soddisfatta anche la precedente relazione) devono essere soddisfatte le due relazioni seguenti:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_0 = I_0 [(R + r) - LrC\omega^2] \\ E_0 = \left(\frac{L}{C} + Rr \right) \frac{I_0}{r}. \end{array} \right.$$

(1) Abbiamo già osservato nelle precedenti Note che il diodo si comporta in satu-

Eguagliando i secondi membri si ottiene la relazione seguente (cui deve soddisfare la capacità)

$$(10) \quad -C + L \left(C^2 \omega^2 + \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

la quale è analoga a quella che si ha eguagliando a zero il numeratore di $\operatorname{tg} \Phi$ in (4).

Dalla (10) si vede quindi analiticamente che esistono due valori C_1 e C_2 che rendono nullo l'angolo di fase Φ .

Vogliamo ora vedere la stessa cosa per via geometrica: a tale uopo facciamo la rappresentazione grafica nella ipotesi che i sia in fase con E . La seconda delle relazioni (8) può scriversi

$$(E_0 - I_0 R) \cdot \sin \omega t = L \frac{di}{dt} + i_1 r.$$

Se il 1° membro è rappresentato dal vettore \vec{OM} di grandezza $E_0 - I_0 R$ (cf. fig. 8), il vettore \vec{NM} normale ad esso e di grandezza $L\omega I_0$ rappresenterà

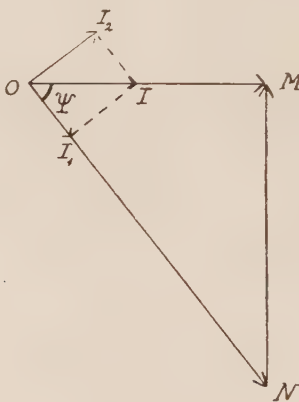


Fig. 8.

$L \frac{di}{dt}$, perciò il vettore \vec{ON} di grandezza $I_1 r$ rappresenterà $i_1 r = \frac{1}{C} \int i_2 dt$.

Nella fatta ipotesi i vettori \vec{OI} , $\vec{OI_1}$, $\vec{OI_2}$ (di grandezze ordinatamente I_0 , I_1 , $C r I_1 \omega$) rappresentino rispettivamente i , i_1 , i_2 . Sia Ψ l'angolo MON.

razione come una resistenza ohmica $r = \frac{1}{K}$. I risultati sono quindi analoghi a quelli che si possono ottenere in un circuito come quello della fig. 1 quando in luogo della lampada si sostituisce una resistenza ohmica. Allora non occorre che la f. e. m. sia pulsante ma basta (fig. 7) che sia semplicemente alternata.

Dall'esame dei triangoli OMN , OI₁I abbiamo fra l'altro le relazioni seguenti :

$$Cr I_1 \omega = I_1 \operatorname{tg} \Psi$$

$$L\omega I_0 = I_1 r \operatorname{sen} \Psi$$

$$I_1 = I_0 \cdot \cos \Psi .$$

Dalla prima si ha

$$(11) \quad \operatorname{tg} \Psi = Cr \omega (1)$$

e moltiplicando membro a membro le ultime due :

$$(12) \quad \frac{L\omega}{r} = \operatorname{sen} \Psi \cos \Psi .$$

Nella fatta ipotesi deve dunque essere soddisfatta la relazione (12). Ora si vede chiaramente (fissando L , ω , r) che quando $\frac{L\omega}{r} \leq \frac{1}{2}$ sussistono certamente due valori Ψ_1 , Ψ_2 dell'angolo Ψ complementari soddisfacenti alla (12); per la (11) esistono dunque corrispondentemente due valori C_1 , C_2 della capacità che rendono la *i* in fase con E. Siccome $\operatorname{tg} \Psi_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} \Psi_1}$ si ha

$$C_2 r \omega = \frac{1}{C_1 r \omega}$$

ossia

$$(13) \quad C_1 C_2 = \frac{1}{\omega^2 r^2}$$

la quale è analoga alla relazione (7) del diodo.

5. Vogliamo infine terminare mostrando come il calcolo simbolico permetta di trovare la relazione cui deve soddisfare la capacità affinché *i* ed E siano in fase. Per questo basta chiederci quali sono le condizioni alle quali deve soddisfare il tratto di circuito MNP (fig. 7) perchè si comporti come una resistenza senza reattanza.

Ora le reattanze simboliche di più sistemi di conduttori in serie si sommano; perciò saremo sicuri che quelle condizioni saranno soddisfatte quando la reattanza simbolica $jL\omega$ (ove *j* rappresenta qui l'unità immagi-

(1) L'analoga di (11), nella fatta ipotesi, pel diodo è $\operatorname{tg} \Psi = \frac{C\omega}{K}$ la quale si può ottenere con calcolo diretto dalla espressione generale (5) di $\operatorname{tg} \Psi$ (tenendo conto che deve essere $-C + L(C^2 \omega^2 + K^2) = 0$).

naria) della parte MN del circuito è uguale e contraria a quella del sistema NP formato dalle due parti in parallelo (condensatore e resistenza). Ma un sistema di conduttori in parallelo presenta una ammittanza simbolica uguale alla somma delle ammittanze dei diversi rami. Perciò nel caso nostro se l'operatore $[P]$ rappresenta l'impedenza simbolica del sistema NP, allora $\frac{I}{[P]}$ rappresenterà l'ammittanza simbolica del medesimo. E siccome l'ammittanza del ramo presentante resistenza è $\frac{I}{r}$ e quella dell'altro ramo che contiene il condensatore è $jC\omega$ (poichè l'impedenza è $\frac{-j}{C\omega}$), si avrà:

$$\frac{I}{[P]} = \frac{I}{r} + jC\omega$$

da cui

$$[P] = \frac{r(I - jC\omega r)}{I + C^2 \omega^2 r^2}.$$

La reattanza simbolica del sistema NP è quindi $\frac{-jC\omega r^2}{I + C^2 \omega^2 r^2}$, perciò, per l'osservazione iniziale, affinchè Φ sia zero, occorre che sia

$$(14) \quad jL\omega = \frac{jC\omega r^2}{I + C^2 \omega^2 r^2}$$

dalla quale uguagliando i coefficienti dell'immaginario si arriva appunto alla relazione che si ottiene uguagliando a zero il numeratore di (4) dopo aver posto $\frac{I}{r}$ in luogo di K.

Chimica (Chimica-fisica). — *Ricerche sul comportamento delle miscele di ossido di zinco e di cloruro di zinco anidro ad alta temperatura*⁽¹⁾. Nota di A. FERRARI e G. TRAMPETTI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Abbiamo già ricordato, in altro lavoro⁽³⁾, la grande discordanza che presentano i valori del punto di fusione del cloruro di zinco determinati dai diversi autori. Infatti dal valore di Grünauer⁽⁴⁾ (365°) a quello di Hampe⁽⁵⁾ (250°) intercorrono ben 115 gradi, differenza enorme anche in relazione al fatto che si tratta di temperature relativamente basse.

Il punto di fusione del cloruro di zinco è stato oggetto di molti lavori, anche recenti⁽⁶⁾, tra i quali quello citato di Grünauer è di ben 85 pagine.

Tutti coloro che ebbero occasione di lavorare col cloruro di zinco sono d'accordo nell'ammettere la grande difficoltà di ottenere cloruro di zinco perfettamente anidro. Tuttavia non riesce facilmente comprensibile come quantità estremamente piccole di cloruri basici, possano avere un'influenza tanto grande sulla temperatura di fusione del cloruro, quanto appare dalle ricerche di diversi sperimentatori. Infatti, ammettendo come esatto il valore di Grünauer (365°), da quello di H. Bassett e L. Bedwell (315°) corrispondente ad un cloruro di zinco leggermente impuro di sale basico (0,18% di $\text{Zn}(\text{OH})_2$), si dovrebbe concludere che basta questa quantità estremamente piccola di idrato nel cloruro per abbassare la temperatura di fusione di quest'ultimo di ben 50 gradi. Questa quantità di idrato corrisponde ad un contenuto in acqua del 0,032% e ad un minor percento di cloro del 0,06 valori dell'ordine di grandezza degli errori sperimentali, tenuto conto anche dell'estrema igroscopicità del cloruro di zinco.

Per indagare quale influenza abbia l'ossido di zinco sul punto di fusione del cloruro abbiamo voluto esaminare dal punto di vista termico il comportamento delle miscele di ossido di zinco e di cloruro anidro di zinco.

Il cloruro di zinco impiegato nelle nostre ricerche proveniva dalla disidratazione, in corrente di acido cloridrico, del cloruro di zinco puro, fuso

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 10 novembre 1931.

(3) Questi « Rendiconti » (6) XII (1930), 673.

(4) « Z. anorg. Ch. », 39 (1904), 402, 403, 441.

(5) « Ch. Ztg. », 11 (1887), 846.

(6) H. BASSETT e W. L. BEDWELL, « J. Ch. Soc. », 1931, 2479.

in cannelli, della ditta C. Erba. L'analisi di esso, dopo questo trattamento ci ha dato il seguente risultato:

	trovato	calcolato
zinco	47,95	47,96
cloro	51,96	52,04

Il punto di fusione di questo cloruro di zinco, determinato col solito dispositivo da noi usato nello studio di alcuni sistemi ⁽¹⁾ fra cloruri ed impiegando una coppia termoelettrica, platino-platino-rodio tarata col benzo-fenone (punto di ebollizione 305,5°) è risultato 304°.

Le fusioni delle miscele sono state fatte col dispositivo sopra ricordato sostituendo alla corrente di acido cloridrico quella di azoto depurato, prima facendolo gorgogliare attraverso colonne contenenti ammoniacca e trucioli di rame per trattenere l'ossigeno, poi attraverso acido solforico diluito che assorbe i vapori ammoniacali ed infine nell'acido solforico concentrato allo scopo di disidratarlo perfettamente.

La temperatura di fusione dell'ossido di zinco recentemente determinata in $1975 \pm 25^\circ$ ⁽²⁾ operando sotto pressione non può naturalmente essere raggiunta nelle nostre esperienze perchè il cloruro di zinco bolle a 720°.

Le miscele lasciate fuse anche per un tempo abbastanza grande (più di dieci ore) mostrano sempre l'esistenza di uno strato fuso sovrastante e di un residuo solido verosimilmente di ossido di zinco. Dopo solidificazione le due parti si possono separare in modo netto.

Abbiamo analizzato lo strato sovrastante che corrisponde ad una massa perfettamente omogenea proveniente dalla solidificazione della fase liquida.

Anche nelle miscele rimaste fuse fino a 14-15 ore e contenenti forti percentuali di ossido di zinco la quantità di questo che si ritrova nello strato superiore e che quindi corrisponde alla parte di esso che si è disciolta, è sempre molto piccola e non supera mai il 5 %. Le curve di raffreddamento di tutte le miscele presentano un arresto alla temperatura di circa 240° che sta ad indicare l'esistenza di un eutectico a questa temperatura.

L'impossibilità di ottenere a pressione ordinaria miscele fuse con qualunque proporzione di ossido di zinco non permette di stabilire se questo eutectico abbia luogo tra l'ossido di zinco ed il cloruro, oppure tra il cloruro ed un'eventuale ossicloruro. A questo proposito gli elementi che abbiamo potuto raccogliere in queste ricerche starebbero a dimostrare la non esistenza di ossicloruri di zinco anidri.

Infatti in appoggio a questa ammissione sta il fatto che l'ossicloruro di zinco idrato (che si ottiene portando a secco una soluzione al 50 % di

(1) Questi « Rendiconti » (6) VII, 849.

(2) BUNTING, « Jour. Amer. cer. Soc. », 13, (1930) 5.

cloruro di zinco saturata di ossido), portato ad alta temperatura (750°), dapprima fonde dando un liquido perfettamente limpido, poi va segregando un residuo solido verosimilmente di ossido di zinco. Dopo 14 ore di riscaldamento a 750° , la massa fusa sovrastante il residuo presenta la composizione 96,18 % di ZnCl_2 — 3,82 % di ZnO . Si vede così che anche partendo dall'ossicloruro si giunge per fusione ad un prodotto di composizione all'incirca coincidente con quella della fase liquida che si ottiene riscaldando l'ossido di zinco col cloruro di zinco fuso. Questo prodotto non corrisponde verosimilmente ad un ossicloruro, ma rappresenta soltanto il limite di solubilità dell'ossido di zinco nel cloruro all'atto della sua solidificazione.

La non esistenza di ossicloruri di zinco anidri starebbe in accordo col fatto che finora, ad eccezione del composto $2\text{ZnCl}_2 \cdot 11\text{ZnO}$ ⁽¹⁾ (il cui rapporto è già così complicato da renderne dubbia l'esistenza) non si conoscono ossicloruri anidri.

Riassumendo: L'ossido di zinco presenta una piccola solubilità nel cloruro di zinco fuso, questa solubilità non pare superare il 5 % molecolare.

Si dimostra poco verosimile l'esistenza di ossicloruri di zinco anidri.

Gli ossicloruri idrati si decompongono nella fusione in ossido e cloruro di zinco.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Primi risultati del metodo combinato: suscettibilità differenziale e colori vitali, nello sviluppo degli Anfibi* ⁽²⁾. Nota ⁽³⁾ di C. GUARESCHI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Esistono oggi vari metodi che si propongono di studiare i più complessi fenomeni biologici dello sviluppo degli esseri.

Fra tali metodi uno è quello della suscettibilità differenziale, col quale, agendo sugli embrioni in via di sviluppo con i più svariati agenti (sali, tossici, caldo, freddo, corrente elettrica, ecc.) si studiano le deviazioni dallo sviluppo normale che gli embrioni, e le varie parti degli stessi presentano, e da tali deviazioni si tende a risalire alle cause che producono il normale sviluppo; un altro è quello degli organizzatori, con tanto successo applicato dallo Spemann e dai suoi allievi, specialmente dal Mangold; un terzo infine è quello, esteso specialmente per opera del Vogt, della colorazione di piccole zone del germe, onde meglio seguirne il divenire.

(1) SORDELLI, « Anales. Soc. quim. Argentina », 2 (1914), 97, C. A. (1915), 3185.

(2) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della Regia Università di Roma, con fondi concessi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(3) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1932.

È noto come i risultati scaturiti dagli ultimi due metodi siano qualche volta discordanti fra loro: non è però da dubitare che le ricerche che in ogni parte del mondo si vanno eseguendo, riusciranno a conciliare i dati discordanti e a valutare sempre meglio il valore dei due metodi di lavoro.

Per consiglio del mio Maestro prof. Cotronei sono stato indotto a vedere quali risultati possono dare l'uso contemporaneo di due di questi metodi di studio: quello della suscettibilità differenziale e quello dei colori vitali. Ho in tal modo ripreso le ricerche condotte parecchi anni or sono dal Cotronei sullo sviluppo degli Anfibi, studiato mediante l'azione dei sali di litio ⁽¹⁾.

Tale unione, avendo già dato ognuno dei due metodi buoni frutti non poteva non riuscire ad ottimi risultati, e mentre permetteva un controllo e una verifica dei singoli metodi, per la natura stessa del procedimento adottato mi dava il modo di compiere un'analisi assai più minuziosa di molti problemi dello sviluppo embrionale.

Il metodo che fu poi detto della suscettibilità differenziale, già in opera da molti anni per lo studio dello sviluppo dei Vertebrati (Morgan, Jenkinson, Stockard) ⁽²⁾ è stato adoperato (Cotronei, Bellamy) ⁽³⁾ per la verifica della teoria del gradiente assiale di Child.

Non è qui il caso di esporre le idee di questi vari Autori in proposito, né i concetti del Cotronei sulla valutazione da dare nello studio dei fattori morfogenetici dello sviluppo ai concetti di tempo e di luogo per lo sviluppo dei singoli abbozzi, anche se queste idee del Cotronei sono state dimenticate da alcuni Autori.

Le teorie del Child anche sono state attaccate, ma nemmeno di questo posso occuparmi in questa Nota, lo scopo della quale è di portare anche pel gradiente assiale nuovi elementi di studio con nuovi risultati sperimentali. Solo così, io penso, sarà possibile introdurre nella valutazione delle questioni elementi obbiettivi, ed è questo che è necessario, in luogo di inutili discussioni puramente verbali, per far progredire l'argomento.

I primi risultati ottenuti già permettono di vedere quale possa essere il valore del metodo: alcuni fatti, che possono presentarsi non privi d'interesse sono già stati messi in evidenza.

Mentre lo Stockard ed il Cotronei operavano sulle zone più suscettibili un'azione tale che, se le inibiva e le deviava dal loro normale sviluppo,

(1) COTRONEI, « Arch. It. de Biol. », 1921, t. LXXI; « Rend. R. Acc. Lincei », 1922, vol. XXXI.

(2) Per tutte le indicazioni bibliografiche dei lavori antecedenti al 1922 e qui non riportate, vedi: COTRONEI, *Ric. di Morf.*, 1921, vol. II e « Rend. R. Acc. Lincei », 1922, vol. XXXI.

(3) BELLAMY, « Am. Journ. of Anat. », 1922, vol. 30.

peraltro non produceva una se pure parziale citolisi, per cui le anomalie non si dovevano interpretare, secondo il Cotronei, come distruzioni ma come fenomeni di inibizione, il Bellamy, con azioni più forti provocava la morte cellulare e quindi la necrosi delle zone più sensibili.

Io ho cominciato agendo con quest'ultimo metodo sulle gastrule in cui il tappo vitellino è già ben delimitato e un po' impiccolito, ciò che indica che il processo di gastrulazione è in atto, ed ho così riconosciuto le zone più suscettibili; come controprova le ho colorate col metodo di Vogt⁽¹⁾, prima del trattamento con la soluzione m/10 di LiCl (che è il solo sale che ho finora adoperato); infine, dopo la colorazione come nel caso precedente, ho agito più blandamente col metodo usato da Stockard e da Cotronei, ottenendo la sola inibizione delle zone che più risentivano dell'azione del LiCl. Ho potuto così provare che queste zone sono quelle che effettivamente danno gli occhi e le parti encefaliche precordali, delimitate dal Cotronei.

In questa Nota tratto solo di alcuni fra i risultati più caratteristici ottenuti.

In varie esperienze, riportabili a quella riprodotta nella fig. 1, embrioni trattati per lungo tempo con una soluzione m/10 di LiCl (24^h a 25°) presentano punti di necrotizzazione in una zona compresa fra i 20° e gli 85° dal centro del blastoporo. Da questa zona, o almeno da parte di essa, come vedremo nella seconda esperienza descritta, si svilupperà l'encefalo precordale e in essa, in questo momento, non è in atto alcun processo di differenziazione. Solo con un trattamento più prolungato, seppur di poco, compare una seconda zona necrotica in corrispondenza del labbro dorsale del blastoporo. Ciò dimostra che nello stadio gastrulare esiste una zona di alta suscettibilità che corrisponde, come confermeranno le esperienze successive, alla regione di formazione dell'encefalo precordale e degli occhi.

La coordinazione del metodo della suscettibilità differenziale con quello dei colori vitali doveva servire, come ho accennato in principio, a dimostrare se la zona che l'esperienza precedente indica come la più suscettibile, fosse effettivamente quella di cui si sviluppano le parti (encefalo precordale, occhi) che nelle esperienze di Cotronei si dimostrano più inibite. Naturalmente esso valeva ancora per una valutazione obbiettiva dei risultati di Vogt e della sua scuola.

A questi scopi serve il secondo gruppo di esperienze che descrivo, il quale inoltre, se ce ne fosse ancora bisogno, dimostra anche la duplicità dell'abbozzo oculare.

In questo secondo gruppo di esperienze ho ottenuto un caso sommamente dimostrativo, in cui un embrione di *Rana esculenta* in fase gastrulare

(1) VOGT, « Arch. f. Entw. mech. », 1929, Bd. 120.

è stato colorato col metodo di Vogt, in modo che la parte destinata a dare gli occhi e la zona del chiasma (compresa fra i 60° e gli 80° dal centro del blastoporo) fosse bleu ai due lati (Bleu Nilo solfato) e rossa al centro (Rosso neutro). Dopo trattamento per 7^h a 26°-27° con soluzione m/10 di LiCl, il risultato è quello mostrato dalla fig. 2. L'embrione si è sviluppato ciclope, ad alto grado di inibizione; l'occhio è bleu, il pavimento del diencefalo, ridotto, è rosso.

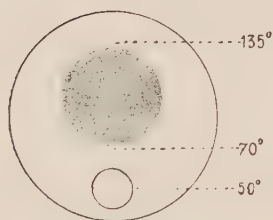


Fig. 1.

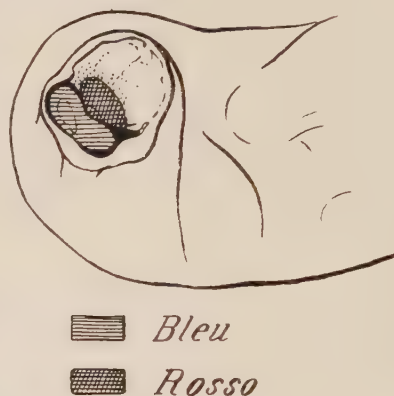


Fig. 2.

La zona diencefalica intermedia agli abbozzi oculari, per quanto possa essere magari ridotta, non è quindi sparita nè ha cambiato destino. Essa è solo più piccola per l'inibizione delle sue cellule prodotta dal LiCl; nella sua inibizione risiede la causa del mancato allontanamento degli abbozzi oculari, che hanno potuto perciò, crescendo, venire a contatto e fondersi ventralmente ad essa. La mancanza di spazio, dovuta alla formazione del « Cervello massiccio » (Cotronei)⁽¹⁾ è la causa che ha prodotto la malformazione in esame.

Il tutto è quindi da ricondursi a *processi d'inibizione della zona destinata a dare l'encefalo precordale*.

Queste due esperienze sono già sufficienti a dimostrare come oltre alla zona del blastoporo esista nella gastrula in formazione un'altra zona ad alta suscettibilità formata dall'ectoderma che si trova ad una certa distanza dal blastoporo e più rivolto verso il polo animale.

Da questa zona si svilupperanno l'encefalo precordale con gli occhi; questa zona quindi già precocemente delinea la regione nervosa più cefalica.

Ammettendo, come è logico che le zone più suscettibili siano quelle a più elevato metabolismo, siamo portati a concludere che esiste, già nella giovane gastrula, una zona ad alto metabolismo, distinta da quella inerente

(1) Va ricordato che nelle interessanti ricerche sulla ciclopia degli embrioni al litio degli Anfibî il Leplat aveva già notato la formazione di Cervelli « massifs ».

al blastoporo e che può essere omologata con la parte cefalica del gradiente di Child.

Ricordo anche che le mie esperienze concordano perfettamente quanto a localizzazione del sistema nervoso e degli abbozzi oculari con quelle di Vogt, della Manchot⁽¹⁾ e di Woerdermann⁽²⁾, e, quanto alla duplicità degli abbozzi oculari stessi con quelle di Spemann⁽³⁾, di Cotronei e di Woerdermann.

Riassumendo: Le ricerche sopra esposte dimostrano che il metodo combinato suscettibilità differenziale-colori vitali da me usato si manifesta utilissimo per lo studio di molti problemi embriologici. Dalle prime esperienze eseguite sorgono già prove atte a illuminare alcune questioni quali quella riguardante la suscettibilità e la localizzazione della zona neurale cefalica, della origine pari degli abbozzi oculari, della ciclopia come fusione di due abbozzi ottici distinti, dell'influenza causale dell'inibizione encefalica e del destino del terzo mediano anteriore della piastra neurale.

Con queste ricerche si sono anche potute distinguere due zone di suscettibilità: una, che si potrebbe chiamare di 1° grado, più cefalica ed una di 2° grado, in rapporto col blastoporo e ben distinta dall'altra.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Sul comportamento dell'abbozzo oculare espantato di Anfibi. Esperienze di fusione e regolazione*⁽⁴⁾. Nota⁽⁵⁾ di T. PERRI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Studiando col metodo dei trapianti l'autodifferenziamento di un abbozzo, rimane sempre il dubbio se i fattori che lo determinano siano tutti insiti nell'abbozzo stesso, ovvero se siano da attribuirsi, almeno in parte, all'embrione ospite. I metodi usati, per evitare siffatto dubbio nell'interpretazione dei risultati, sono diversi: tra questi quello dei trapianti xenoplastici, che può servire solo per alcuni problemi. Un altro metodo, usato negli Anfibi da molti Autori, è quello di espantare in mezzo adatto, soprattutto in soluzione salina e particolarmente in quella di Ringer, l'abbozzo in esame (Ekman, 1920-1924; Stöhr, 1924-1926; Filatow, 1926; v. Ubisch, 1927; Görttler, 1928; Bautzmann, 1929; Holtfreter, 1931; Erdmann, 1931;...).

(1) MANCHOT, « Arch. f. Entw. mech. », 1929, Bd. 116.

(2) WOERDERMANN, « Arch. f. Entw. mech. », 1929, Bd. 116.

(3) SPEMANN, « Zool. Jahrb. (Abt. All. Zool. u. Physiol.) », 1912, Bd. 32; Id., 1912 (Supp. 15).

(4) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della Regia Università di Roma, coi fondi concessi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(5) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1932.

Una condizione, che consideravasi indispensabile per la sopravvivenza del pezzo, è che esso sia interamente rivestito da presunta epidermide; tuttavia questa condizione, dopo le recentissime ricerche dell'Holtfreter, non avrebbe più un valore assoluto.

Per l'argomento della presente Nota, debbo ricordare in particolar modo le ricerche sull'espianto dell'abbozzo oculare. Il Filatow (1926)⁽¹⁾ espantò in soluzione di Ringer la vescicola ottica primaria di vari Anfibì, fra cui la *Rana esculenta*; notò che sia l'abbozzo retinico che quello lentogeno proseguono nello sviluppo, e che intervengono processi regolativi se si espanta la porzione distale della vescicola. Nel 1927 il v. Ubisch⁽²⁾ espantò pezzi di ectoderma cefalico di *Bombinator pachypus*, e, quando nell'espantato vevivano a trovarsi cellule lentogene insieme con materiale oculare, vide svilupparsi un piccolo occhio con cristallino. Holtfreter (1931)⁽³⁾ ottenne: isolando singole cellule di una morula di *Triton alpestris*, un complesso di tessuti tra cui è riconoscibile un cristallino con fibre; isolando un pezzo di blastula di *Amblystoma*, un occhio con cristallino; e sperimentando su neurula di *Amblystoma*, ebbe risultati ancora migliori, giungendo alla pigmentazione dell'occhio. Debbo tuttavia notare che l'Holtfreter non espantò mai il solo abbozzo oculare, ma sempre un complesso di abbozzi interi o meno, tra cui l'abbozzo oculare nei casi ora detti.

I processi di fusione e regolazione degli abbozzi oculari sono ormai noti da vari decenni (Born, 1896⁽⁴⁾; Anastasi, 1913; Pasquini, dal 1927 in poi; Truniger, 1927; Detwiler, 1929; ...), in innesti e in trapianti omoplastici⁽⁵⁾. Nei trapianti xenoplastici furono ottenuti, per la prima volta, da Cotronei e Spirito (1929-1931)⁽⁶⁾.

Le ricerche di cui mi occupo nella presente Nota studiano bensì i processi di fusione e regolazione degli abbozzi oculari, ma li studiano in con-

(1) FILATOW D., *Ueber die Entwicklung des Augenkeimes einiger Amphibien in vitro*. «Roux' Arch. f. Entw.-Mech.», Bd. 107 (1926).

(2) von UBISCH L., *Beiträge zur Erforschung des Linsenproblems*. «Zeitsch. f. wiss. Zool.», Bd. 129 (1927).

(3) HOLTFRETER J., *Ueber die Aufzucht isolierter Teile des Amphibienkeimes*. II. *Züchtung von Keimen und Keimteilen in Salzlösung*. «Roux' Arch. f. Entw.-Mech.», Bd. 124 (1931).

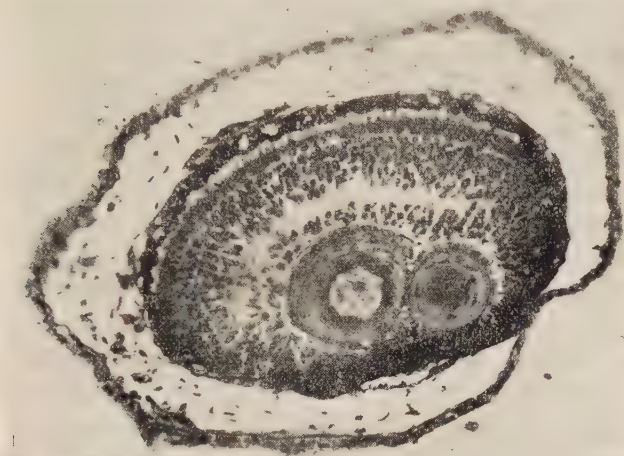
(4) BORN G., *Ueber Verwachsungsversuche mit Amphibienlarven*. «Arch. f. Entw.-Mech.», Bd. 4 (1897).

(5) È forse opportuno ricordare che Cotronei in una sua pubblicazione del 1922 concludeva: «Le ricerche di Anastasi [sulla fusione degli abbozzi oculari e degli abbozzi lentogeni] sono quindi una verifica della legge di Born dell'affinità, con fusione ad opera del tessuto specifico, tra gli organi simili». («Archivio Zoologico», vol. 10, p. 88).

(6) COTRONEI G. e SPIRITO A., *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli*. Nota I, in questi «Rendiconti», vol. X (1929), pp. 212-214. *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli*. Nota VII, in questi «Rendiconti», vol. XIV (1931), pp. 149-153.

dizioni sperimentali del tutto nuove, con metodo non prima usato in questo campo di ricerche: perchè nel nostro caso gli abbozzi, essendo isolati ed espianati, sono precocemente sottratti all'influenza degli organi vicini, specie del neurasse.

Ho sperimentato su embrioni di *Rana esculenta*, allo stadio di vescicola ottica primaria (bottone codale).



Sezione di un occhio proveniente da fusione e regolazione di due abbozzi oculari espianati da 5 giorni. Si noti la perfetta regolazione ed il perfetto differenziamento; i cristallini però non si sono fusi. (Microfotografia: obb. 6; ocul. 4; Koristka).

Per porre a contatto le due vescicole ottiche, ciascuna da quasi intera fino a poco più di metà, e per renderle del tutto rivestite da presunta epidermide, ho operato come segue: le due vescicole ottiche le trapiantavo ventralmente ad un embrione di *Rana esculenta*: avvenuta la cicatrizzazione — che per l'alta temperatura ambiente (esperienze eseguite in luglio) avveniva in brevissimo tempo, di solito in 30-40 minuti primi — toglievo le due vescicole ottiche con ampio lembo di ectoderma, cui rimanevano aderenti mesenchima e vitello: indi ponevo l'escisso in una capsula di vetro piena di liquido Ringer diluito.

Nel pezzo espianato ho visto anch'io, al pari di precedenti Autori, quanto già aveva notato il Born isolando da embrioni di *Rana arvalis* ed *esculenta* strisce di tegumento: l'ectoderma si accartoccia ed i margini si saldano: il tutto prende la forma di uno sferoide costituito da ectoderma e sottostante mesenchima, che racchiude una massa di vitello: si stabilisce costantemente un turgore: per movimento di ciglia, gli sferoidi si spostano ruotando. Sulla superficie di ciascun d'essi, stanno a contatto i due abbozzi oculari.

Al microscopio binoculare ho seguito la pigmentazione del risultante abbozzo, che dopo qualche giorno appare nerissimo ma non lucente.

All'esame seriale delle sezioni notasi in molti casi la fusione e regolazione ad unico occhio; la quale talvolta è così perfetta, che non sempre si riesce a rintracciare la zona di fusione (v. l'annessa figura).

In un caso di fusione c'è il cristallino che mostra — in modo chiarissimo — essere le fibre orientate rispetto a due centri: è questo un caso di fusione dei due abbozzi lentogeni; ne ho avuto altri, ma meno interessanti. Fusione di abbozzi lentogeni, in casi di fusioni oculari, fu già vista dal Born e successivamente da altri Autori in trapianti o innesti omoplastici. Ho pure osservato occhi fusi con due cristallini.

Nei casi in cui non ho avuto fusione, i due occhi si sono tra loro allontanati, forse in rapporto al turgore, almeno in parte; i due abbozzi si sono perfettamente regolati, e questo punto riconferma i relativi risultati del Filatow.

Sia gli occhi risultanti da due abbozzi fusi, sia quelli sviluppatisi da unico abbozzo nei casi di non fusione, si sono differenziati talvolta in modo perfetto (vedi l'annessa figura). Nei casi finora esaminati non ho mai riscontrato il nervo ottico.

Per l'interpretazione dei risultati raggiunti debbo meglio richiamare l'attenzione sul turgore che sempre si stabilisce nel pezzo isolato. Per esso ne aumenta la pressione interna, e si distende la parete degli sferoidi; questo fatto, essendo gli abbozzi in superficie, spiega parte dei casi di non fusione.

Riassumendo: queste ricerche mi permettono di concludere che le due vescicole ottiche possono — talora in modo perfetto — fondersi e regularsi ad occhio unico del tutto differenziato, anche nelle condizioni di espianto, cioè, ripeto, al di fuori delle influenze dell'intero organismo specie del neurasse; e tali fusioni si verificano non solo per l'abbozzo retinico ma anche per quello lentogeno, onde un cristallino con le fibre orientate rispetto a due centri.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Ancora sulla possibilità di ottenere fenomeni beri-berici durevoli da privazione del fattore B* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. AMANTEA e V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una nostra Nota precedente ⁽³⁾ abbiamo messo in evidenza, che è possibile ottenere nel Colombo fenomeni beri-berici durevoli e resistenti anche a energici trattamenti curativi, i quali poi guariscono spontaneamente, di regola dopo 2-4 mesi successivi: tale risultato si raggiunge in maniera costante ricorrendo a un espediente assai semplice, cioè lasciando l'animale per 2 o più giorni a digiuno completo (con sola acqua a volontà), non appena comparsa in esso la sindrome beri-berica netta da alimentazione orizantica. Durante il digiuno i disturbi subiscono — pei motivi discussi altrove ⁽⁴⁾ — un'ulteriore accentuazione. Col ritorno all'alimentazione normale, integrata dalla somministrazione quotidiana di dosi generose di lievito di birra, anche prolungando per molti giorni tale trattamento curativo, una parte di essi, e precisamente quelli insorti per primi, resistono alla cura, mentre regrediscono e scompaiono i più recenti.

L'espediente del digiuno serve secondo noi a prolungare, nonché ad aumentare lo squilibrio interno vitaminico, garantendo d'altra parte contro la grave complicazione, rappresentata dai fenomeni tossici (da turbe digestive), che in tutti i casi minacciano la vita dell'animale, quando si insista incongruamente nella somministrazione di riso brillato ancora a sindrome beri-berica conclamata. La minaccia di questa complicazione, quasi costante, non permetterebbe il più delle volte di prolungare la durata delle condizioni interne disadatte e lesive quanto è necessario per la cronicizzazione dei disturbi, dando la sicurezza di salvare e di far sopravvivere poi l'animale; mentre appunto una sufficiente durata di dette condizioni sembra essere essenziale, perchè i medesimi divengano resistenti al trattamento curativo.

Si può pensare, che, al loro primo insorgere, i fenomeni del beri-beri sperimentale, per quanto imponenti, siano ancora sostenuti da lesioni, come

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(3) AMANTEA G. e V. FAMIANI, *Sulla possibilità di ottenere fenomeni beri-berici durevoli da privazione del fattore B nel Colombo*. « Rendic. delle R. Accad. dei Lincei », vol. XIV, serie 6, 2° semestre, fasc. 5-6, 1931.

(4) AMANTEA G. *Sull'azione del fattore B nei suoi rapporti coll'inanizione*. « Boll. d. Soc. ital. di Biol. sper. », vol. II, 1927; Id., *Avitaminosi e inanizione*, « ibidem », vol. I, 1926.

suol dirsi, reversibili; ma che qualora si riesca a prolungare l'azione della causa lesiva (deficienza del fattore B al disotto di un determinato limite) senza danno per la vita dell'animale, come precisamente si può ottenere ricorrendo all'espedito del tempestivo e ben proporzionato digiuno, le suaccennate lesioni procedano oltre la fase di reversibilità, fino ad altra di grado più avanzato, che si può presumere corrispondente, per le fibre nervee, a un vero e completo stato degenerativo, tale da resistere anche al più energico trattamento curativo. Con ciò concorda il fatto, che le lesioni spinte a questo stadio, e che devono stare a base dei disturbi durevoli descritti, ci sono risultate guaribili poi spontaneamente entro limiti di tempo, che possono bene armonizzare coll'ipotesi di processi rigenerativi di fibre nervee degenerate, (di regola 2-4 mesi).

Su tali fatti e considerazioni ci è sembrato anche utile richiamare l'attenzione particolare degli anatomo-patologi.

Dal canto nostro per l'interesse che attribuiamo all'argomento, ne abbiamo continuato lo studio, col proposito di approfondirne la conoscenza sulla base di nuove esperienze. E qui appunto vogliamo sommariamente informare circa i principali rilievi potuti fare a integrazione dei precedenti.

In termini generali possiamo senz'altro affermare, che i fatti già riferiti hanno sostanzialmente trovato costante conferma in tutti i risultati delle nuove prove istituite (dodici complessive).

Ma con queste ultime non ci siamo proposti soltanto la semplice revisione di quello, che avevamo prima osservato; cosicchè le abbiamo impostate e condotte in maniera, da servire anche a estendere ulteriormente la conoscenza dei dati acquisiti, e a chiarirne qualche punto.

Ci è sembrato opportuno controllare le osservazioni fatte sul colombo anche su animali di altra specie; e tre esperienze sono state perciò eseguite su galli adulti. In questi animali, e in genere in tutti gli uccelli, che non sono costretti ad allevare i loro piccoli imbeccandoli, com'è stato accertato nell'Istituto di Fisiologia di Assuncion sotto la direzione del Prof. G. Martino, manca il fenomeno del vomito o rigurgito dell'alimento durante l'alimentazione orizantica; pertanto, qualora ricevano sufficienti quantità giornaliere di riso, essi arrivano ai disturbi beri-berici con una perdita percentuale del peso corporeo relativamente bassa. Questo comportamento poteva rappresentare una condizione favorevole pel nostro tipo di esperienze, perchè avrebbe permesso di prolungare più liberamente il digiuno, dopo la comparsa dei primi sintomi beri-berici netti. I risultati hanno confermato le previsioni. In ciascuno dei tre galli è stato possibile ottenere disturbi resistenti ai mezzi curativi; le differenze fra i singoli casi sono state solo di grado, e precisamente spiegabili colla diversa durata del digiuno, sostenuto da ciascun animale.

Tenendo presente quanto sopra è stato detto, appare ovvio infatti, che nei casi, in cui le condizioni di nutrizione dell'animale permettono di spin-

gere più oltre il digiuno, e per conseguenza di mantenere così più a lungo la condizione interna di squilibrio vitaminico, una parte maggiore delle lesioni deve evolvere verso lo stadio di irreversibilità, e più grave deve risultare il quadro definitivo dei corrispondenti disturbi, divenuti resistenti alle cure. In proporzioni più limitate questi invece residuano nei casi di digiuni più brevi.

Tutte le nostre recenti esperienze si sono svolte secondo questa regola generale.

Così pure tanto quelle eseguite sui colombi che quelle eseguite sui galli hanno concordemente tutte permesso di confermare il rilievo già fatto, che solo una parte dei fenomeni beri-berici presentati dall'animale si riesce a fissare o a rendere resistente al trattamento curativo, mentre gli altri cedono già alle prime cure. Precisamente guariscono i più recenti, e persistono gli altri, cioè tutti quelli giustificati da lesioni, le quali, per essere state le più precoci, hanno potuto meglio evolvere fino allo stadio di irreversibilità.

Per ciò che concerne la sede e il tipo dei disturbi, di cui si è potuta ottenere la cronicizzazione, possiamo dire, che il più delle volte si è trattato di paresi o paralisi a carico degli arti inferiori, associate o non a paresi delle ali. Neppure in queste nuove esperienze ci è stato possibile di ottenere la persistenza del quadro a tipo cerebellare o labirintico. Comunque per la cronicizzazione non crediamo che abbia valore tanto la sede, quanto invece piuttosto la data di comparsa dei disturbi: quando si sono visti residuare quelli a carico degli arti inferiori o delle ali, si è trattato pur sempre, in ogni caso, dei primi manifestatisi; e, se finora abbiamo visto sempre scomparire colle prime cure quelli a tipo cerebellare o labirintico, è anche vero, che mai finora abbiamo avuto la fortuna di vedere insorgere proprio questi per primi negli animali esplorati.

La fig. 1 rappresenta una colomba adulta, che già per un mese, dopo l'esperienza, ha ricevuto alimento misto (grano, granturco, ecc.) a volontà, più 2 gr. al giorno di lievito di birra (della Casa « C. Erba »). La fig. 2 rappresenta un gallo adulto dopo circa due settimane di rialimentazione curativa (alimento misto a volontà, più 5 gr. giornalieri di lievito di birra). Tanto il primo che il secondo animale forniscono esempi evidenti di paralisi residue a carico degli arti inferiori (con associazione di lieve paresi delle ali nel caso della colomba); mentre la fig. 3 rappresenta il caso eccezionale di un Colombo adulto, ricordato anche nella citata nostra Nota precedente, il quale dopo 6 mesi dall'esperienza, trascorsi a vita ed alimentazione libera, messo a giacere sul dorso è ancora incapace di rimettersi in posizione normale, per la paralisi completa dei muscoli elevatori delle ali. Abbiamo definito questo caso eccezionale, perchè, oltre ad essere l'unico finora con fenomeni beri-berici durevoli esclusivamente localizzati alle ali, è anche il solo, in cui la guarigione spontanea ha subito un notevole ritardo rispetto al tempo medio, risultato necessario per gli altri animali studiati.

A questo particolare problema del decorso della guarigione spontanea dei disturbi, rivelatisi resistenti al trattamento curativo, abbiamo creduto utile rivolgere speciale attenzione. In generale sono così procedute le cose negli ultimi animali studiati: interrotto il periodo — più o meno protratto — di digiuno, e iniziata la rialimentazione curativa, si è sempre verificato, entro le 24-72 ore successive un netto miglioramento, per la scomparsa di una parte più o meno rilevante dei sintomi paralitici o paretici; è seguita quindi una fase, della durata di 2-4 settimane circa, in cui quelli residuati si sono mantenuti stazionari; in seguito pure questi si sono visti lentamente e gradatamente regredire, in modo da aversi la guarigione completa dopo 2-4 mesi in media dall'esperienza. Un tempo più lungo occorre nei casi, in cui più oltre si era potuto spingere il digiuno, e viceversa. Il descritto comportamento generale corrisponde a quanto ci era risultato già dalle prime osservazioni, e induce ovviamente a pensare o a immaginare quasi tutta una scala di lesioni di grado diverso e guaribili di conseguenza anche in tempi diversi. Come unica eccezione alla regola generale resta finora il caso menzionato del colombo della fig. 3 con paralisi degli elevatori delle ali: questa si è mantenuta completa e invariabile per oltre un semestre, e solo più tardi è migliorata alquanto; attualmente — dopo circa 15 mesi — l'animale, che seguiamo ancora, è capace di compiere limitati movimenti di volo.

Un'ultima questione infine, che abbiamo creduto opportuno riprendere in esame, soprattutto ad eliminare eventuali incertezze o dubbi, è quella riguardante l'effettivo valore, che spetta al digiuno nel determinismo dei fatti descritti. Insistiamo ancora nel fare rilevare, che esso per noi ha sempre rappresentato un semplice quanto comodo espediente, destinato a permettere alla vera causa prossima ed essenziale nociva (squilibrio interno vitaminico, deficienza del fattore B) di agire per il tempo necessario all'evoluzione delle lesioni verso lo stadio, che coincide coll'irreversibilità delle medesime, e ciò con garanzia contro la morte dell'animale per complicazioni tossiche. Si sarebbe potuto comunque dubitare della giustezza di tale nostra convinzione, attribuendo al digiuno una più diretta e specifica azione. Ad eliminare appunto tale dubbio, abbiamo tentato di accertare sperimentalmente, se fosse possibile ottenere disturbi beri-berici durevoli ritardando l'intervento curativo, ma evitando il digiuno completo e sostituendolo con una alimentazione (orizantica) opportunamente ridotta. A tale scopo in tre colombe e in un gallo, a sindrome beri-berica conclamata, anzichè sospendere, abbiamo continuato la somministrazione quotidiana di riso brillato, regolandone cautamente la quantità e preferendo le piccole razioni frazionate durante la giornata; si sperava così di riuscire a prolungare le condizioni di squilibrio interno vitaminico, escludendo l'espediente del completo digiuno, ma alimentando gli animali in maniera, da rimanere molta probabilità di salvarli alla prima minaccia di complicazioni tossiche. Abbiamo potuto infatti in tal



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

guisa ritardare impunemente la cura per 2-5 giorni, e accertare quindi negli animali sopravvissuti la prevista cronicizzazione di una parte dei disturbi beri-berici. È chiaro, che questi risultati depongono decisamente a favore della nostra tesi.

Ci proponiamo di non abbandonare lo studio dell'argomento, e di riferire a suo tempo le ulteriori osservazioni, che ci sarà dato di fare.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sulla capacità di consumo alimentare nella rialimentazione dopo digiuno* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. FARMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

I fenomeni ricostruttivi, quei fenomeni cioè che accompagnano la ripresa del peso corporeo dopo un periodo di digiuno, non erano stati presi, fino a pochi anni or sono, nella considerazione, che senza dubbio meritano. Sull'importanza, che avrebbe avuto lo studio metodico, sistematico di tali fenomeni ha richiamato l'attenzione G. Amantea ⁽³⁾, facendo giustamente rilevare come un tale studio, « oltre ad integrare utilmente gli stessi fatti, raccolti per l'inanizione, avrebbe avuto anche una indiscutibile e più generale importanza scientifica, nonchè un evidente interesse pratico per le applicazioni soprattutto alla terapia ».

Le osservazioni che già esistevano nella letteratura erano scarse e frammentarie; ed isolate erano anche rimaste le ricerche iniziate sull'argomento dal Pugliese ⁽⁴⁾.

Per tali considerazioni appunto, nel laboratorio del prof. G. Amantea, G. Martino iniziò ricerche tendenti ad una indagine metodica di detti fenomeni ricostruttivi; ed in un interessante lavoro ⁽⁵⁾ egli riferì i primi rilievi personali circa alcuni « dati elementari, ma tuttavia indispensabili per poter procedere in maniera sistematica nello studio del problema ».

Un gruppo delle osservazioni di G. Martino riguarda precisamente le variazioni della capacità di consumo alimentare nei colombi rialimentati dopo un pregresso digiuno di durata e grado variabile. Dopo avere stabilito preventivamente la quantità massima di alimento, che l'animale era capace di elaborare nelle 24 ore, egli determinava la quantità massima di alimento

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1932.

(3) AMANTEA G., *Sulla rialimentazione dopo il digiuno*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », n. 2, p. 39 (1927).

(4) PUGLIESE A., *Études sur la réalimentation. Les matières organiques et inorganiques du foie et des muscles dans les premiers jours de la réalimentation*. « Journ. de Physiol. et de Path. gen. », n. 2 (1904).

(5) MARTINO G., *Sulla rialimentazione dopo il digiuno nel colombo*. « Arch. Sc. Biol. », n. 13, p. 421 (1929).

che lo stesso animale era capace di elaborare nel periodo di rialimentazione dopo il digiuno.

La capacità di consumo alimentare risultò diminuita notevolmente al 1° giorno di rialimentazione, ma a cominciare dal 2° giorno essa si andò a mano a mano elevando, fino a ritornare normale dopo un numero di giorni variabile a seconda del digiuno pregresso; risultò inoltre che spesso negli ultimi giorni di rialimentazione essa è maggiore che prima del digiuno.

Questa osservazione ci è sembrata interessante, e meritevole anche di una ulteriore analisi.

Come naturale conseguenza di essa, infatti, varî quesiti sorgevano: quali rapporti ha l'aumento della capacità di elaborazione dell'alimento, notato da G. Martino nella rialimentazione, con la ripresa del peso corporeo, e quale grado può esso raggiungere? Subisce esso qualche variazione per effetto del ripetersi, per uno stesso animale, del digiuno e della rialimentazione? La capacità di elaborazione dell'alimento ritorna al normale precisamente in coincidenza col completo ricupero del peso corporeo ovvero persiste a un livello più alto anche dopo la ripresa del peso?

Questi ed altri quesiti ci siamo proposti di tenere presenti in una serie di ricerche, eseguite con la collaborazione dell'allievo interno E. Biocca.

Le esperienze sono state tutte condotte su colombi, maschi e femmine, adulti, ma non vecchi, ed in ottime condizioni di nutrizione.

Per ogni animale si aveva cura di accertare, imbeccandolo quotidianamente con quantità opportunamente variate dell'alimento a volta a volta scelto per l'esperienza, la normale capacità di elaborazione; dopo di che esso veniva tenuto a digiuno, con sola acqua a disposizione, fino a perdita di circa il 20 % del peso corporeo iniziale. A questo punto si incominciava a rialimentarlo, somministrando sempre l'alimento di 24 ore in 24 ore, per imbeccamento, tutto in una sola volta, partendo da una quantità eguale o lievemente inferiore a quella che si era rivelata capace di essere completamente elaborata nelle 24 ore, e aumentandola o diminuendola a seconda che l'ingluvie si presentava vuota o con residuo più o meno sensibile dell'alimento somministrato il giorno precedente.

Così fino a che l'animale non avesse totalmente riguadagnato il peso perduto durante il periodo di digiuno, e fino a che il livello del peso non fosse divenuto costante.

Gli animali erano quotidianamente pesati, sia durante il digiuno che nel periodo di rialimentazione. Si teneva conto anche del quantitativo di acqua da essi spontaneamente assunto nelle 24 ore.

Su alcuni animali vennero eseguite 2 o 3 prove, su altri fino a 7 o 8. Alimenti usati nelle varie prove e pei diversi animali furono: il grano, il granturco, l'orzo, le lenticchie e le fave; queste ultime si somministravano spezzettate, dopo essere state tenute a bagno in acqua condotta per 24 ore.

Abbiamo in tal modo esplorato 5 animali, eseguendo in tutto 24 prove.

I risultati complessivi da noi ottenuti si possono così riassumere: i nostri colombi, in condizioni normali, fornendo loro l'alimento quotidianamente per imbeccamento ed in una sola volta, si mostrarono capaci di elaborarne in media da 30 a 35 grammi al giorno. Ma al 1° giorno di rialimentazione dopo un digiuno, che aveva comportato una perdita di circa il 20 % del loro peso corporeo, i nostri animali, conformemente a quanto aveva già potuto notare G. Martino pei suoi, non si rivelarono più capaci di elaborare una quantità di alimento eguale a quella normale, in quanto, dei gr. 30 di alimento da noi somministrati, grande parte residuava ancora l'indomani nell'ingluvie. Tuttavia a cominciare dal 2° giorno di rialimentazione, la capacità di elaborazione dell'alimento mostrò di elevarsi a mano a mano, fino a divenire pari a quella normale (gr. 30-35) al 3°, 4° giorno; continuò ad elevarsi ancora, parallelamente all'aumentare del peso corporeo dell'animale, e in grado notevole, fino quasi a raddoppiarsi (gr. 55-60), rispetto alla normale. Ciò avveniva mentre il peso corporeo si avviava a toccare il suo livello iniziale, e talvolta anche quando questo risultò superato. Allora gradatamente essa tornò ad abbassarsi fino ad assumere il suo valore normale, quando le condizioni di equilibrio del peso dell'animale si furono ristabilite e stabilizzate.

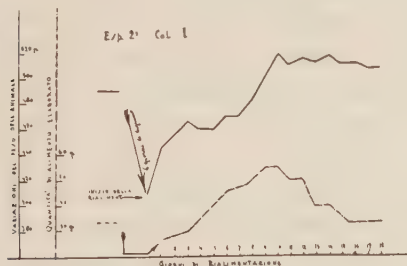


Fig. 1.

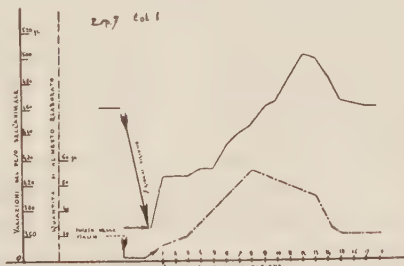


Fig. 2.

Riportiamo in grafico due delle nostre esperienze, dalle quali risulta che la capacità di elaborazione dell'alimento presenta una curva caratteristica e pressochè costante, la quale segue dapprima quella del peso corporeo in ascesa, per poi abbassarsi quando quella del peso si avvicina alla orizzontale, e per decorrere infine — a equilibrio ristabilito — di nuovo parallela all'altra, come normalmente di regola prima del digiuno.

Tale caratteristico comportamento è risultato costante (a parte lievissime variazioni di grado), sperimentando con i vari alimenti da noi studiati, e non ha mostrato di subire sostanziali modificazioni in più prove successive ripetute su uno stesso animale. I grafici si riferiscono infatti ad uno stesso Colombo (Col. I), e riproducono l'uno l'esperimento n. 2 (Fig. 1, alimento: grano), e l'altro l'esperimento n. 7 (Fig. 2, alimento: fave).

Il quantitativo infine di acqua spontaneamente assunto dagli animali, che è risultato minimo o quasi nullo negli ultimi giorni di digiuno, nella rialimentazione ha presentato un comprensibile brusco aumento, seguendo quindi, ma con oscillazioni piuttosto ampie, la curva dell'alimento elaborato.

Abbiamo voluto fissare nella presente Nota queste nostre recenti osservazioni, perchè mentre ci sembra che valgano ad integrare quelle analoghe precedenti di G. Martino, insieme con queste ultime potranno costituire un utile nucleo di partenza o di riferimento per indagini successive e più fini relative al vasto problema dei fenomeni ricostruttivi.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Contributo alla conoscenza del valore alimentare ricostruttivo degli embrioni di vari semi di cereali e leguminose*⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una precedente Nota ⁽³⁾ abbiamo riferito circa i primi risultati da noi ottenuti, in una serie di ricerche dirette ad indagare il valore nutritivo dei semi di piccola dimensione di alcuni cereali, in confronto con i corrispondenti grossi. Abbiamo potuto allora mettere in rilievo, che i chicchi di piccola dimensione presentavano — nei riguardi dell'accrescimento dei ratti albinì in via di sviluppo, ai quali venivano somministrati come alimento esclusivo — un valore nutritivo maggiore di quello dei corrispondenti chicchi grossi.

Vantaggio questo, che i risultati di successive recenti ricerche ⁽⁴⁾ ci hanno permesso precisamente di attribuire (come peraltro si era autorizzati già a prevedere) al maggior quantitativo di costituenti embrionali contenuti — a parità di peso — nei semi di dimensione piccola, rispetto agli altri.

Allo scopo di integrare convenientemente queste due serie di nostre osservazioni, ci è sembrato utile controllare, se vantaggi analoghi a quelli determinati dai semi di piccole dimensioni, o dai costituenti embrionali, sui fenomeni di accrescimento o costruttivi, fosse possibile osservare anche nei riguardi dei fenomeni ricostruttivi, di quei processi cioè che accompagnano la ripresa del peso corporeo dopo un periodo di digiuno.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Univers. di Roma. All'esecuzione delle presenti ricerche ha collaborato l'allievo interno E. Biocca.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(3) FAMIANI V., *Contributo alla conoscenza del valore nutritivo di alcuni cereali*. «Rendic. R. Accad. dei Lincei», vol. XIV, p. 306 (1931).

(4) FAMIANI V., *Contributo alla conoscenza del valore nutritivo degli embrioni di grano*. In corso di stampa sui «Rendic. R. Accad. dei Lincei».

Vogliamo in questa Nota riferire i risultati ottenuti con ricerche, dirette appunto a rispondere a tale quesito.

Come animali di esperimento abbiamo scelto i colombi, perchè prestandosi all'imbeccamento, ci permettevano di poter somministrare le quantità volute di alimento, e inoltre di sorvegliarne bene il progresso nell'apparato digerente, col controllo diretto del contenuto dell'ingluvie (mercè la palpazione). Abbiamo sperimentato su tre colombi maschi, adulti, mai precedentemente sottoposti ad altri esperimenti, ed in buone condizioni di nutrizione ed abbiamo eseguito sui medesimi 16 prove complessive, così divise per ciascun animale: Col. I, prove 8; Col. II, prove 4; Col. III, prove 4. Gli animali si lasciavano a digiuno completo, in gabbia, con sola acqua a volontà, fino a perdere un dato peso, che fu differente nelle varie prove, in quanto si sono seguite al riguardo norme diverse. E precisamente, nelle prime 4 prove sul Colombo I, e in quelle eseguite sul Colombo II, gli animali furono tenuti a digiuno fino alla perdita globale rispettivamente di gr. 80-85, e 77-80 del peso corporeo; in seguito invece, e cioè in tutte le altre prove successive (da 5 a 8 pel Col. I, e in quelle sul Col. III), essendoci sembrato più logico adottare il criterio della valutazione percentuale della diminuzione del peso, allo scopo di garantire una maggiore uniformità di tecnica, il digiuno fu prolungato fino a raggiungere sempre una perdita di circa il 20 % del peso iniziale dell'animale. Chiuso il periodo di digiuno si iniziava la rialimentazione, somministrando l'alimento per imbeccamento di 24 ore in 24 ore, e sempre in una sola volta. Si cominciava col somministrare una dose eguale o leggermente inferiore (di regola 30 gr.) a quella, che l'animale si era dimostrato capace di elaborare in condizioni normali; la quantità veniva poi aumentata o diminuita, a seconda che dopo 24 ore si trovava l'ingluvie vuota o con residuo. Quando quest'ultimo si valutava piuttosto rilevante, la nuova razione era opportunamente graduata in proporzione; e di ciò si teneva conto. Gli animali venivano giornalmente pesati; si determinava la loro temperatura cloacale, e si tenevano presenti pure le variazioni della temperatura ambiente. Alimenti usati nelle varie prove furono grano, fave e grano integrato coll'aggiunta di embrioni ottenuti dalla molitura dello stesso grano. Quest'ultimo materiale ci è stato gentilmente fornito dalla Ditta Gio. e F.lli Buitoni di Sansepolcro. Per maggiore chiarezza aggiungiamo che nelle prime 4 prove sul Col. I, ed in quelle sul Col. II, abbiamo adoperato lo stesso grano, che già avevamo utilizzato per le citate nostre esperienze precedenti⁽¹⁾, e di cui era stata fatta meccanicamente la separazione in due distinte frazioni, a semi grossi, ed a semi piccoli — che indichiamo nella tabella come «grano piccolo I» —. Tanto per l'una che per l'altra porzione fu allora calcolata, in base ai dati forniti da 4-5 campioni, la media del numero di

(1) FAMIANI V., loc. cit

chicchi contenuti in 10 ccm. (e in 1 ccm.), del numero di chicchi in 1 gr., ed infine del peso di n. 100 chicchi; e qui vogliamo ricordare le medie ottenute:

	porzione a chicchi grossi	porzione a chicchi piccoli	differenza
Numero di chicchi in 10 ccm:	188	236	48
» » » » 1 »	18.8	23.6	4.8
» » » » 1 gr.	25	31	6
peso di numero 100 chicchi gr.:	3.99	3.21	0.78

Entrambe queste porzioni di grano sono state successivamente studiate (nell'ordine che risulta dalla tabella) sui due colombi (Col. I e Col. II). Oltre ad esse, si provò anche un altro tipo di grano a chicchi eminentemente piccoli (che indichiamo come « piccolo II »), e che diede le seguenti medie:

Numero dei chicchi in 10 ccm.:	270
» » » » 1 »	27
» » » » 1 gr.	34
peso di numero 100 chicchi gr.:	2.75

Nelle prove 5 e 6 sul Col. I e nelle prime due sul Col. III, si sperimentò invece con fave. Queste, pesate allo stato secco, si tenevano per 24 ore in acqua; quindi si sbucciavano e si dividevano, con un taglio mediano in senso longitudinale, in due parti, di cui una portante l'embrione e l'altra non. La parte embrionata veniva somministrata ad uno dei due colombi, il quale nella prova successiva era rialimentato invece con la porzione non embrionata; l'inverso si faceva per l'altro animale. Infine nelle prove 7 e 8 per il Col. I, 3 e 4 per il Col. III, usammo solo grano, o lo stesso adizionato ad embrioni. Gli embrioni si impastavano con poca acqua, e si somministravano in pillole. Come nel caso precedente, di una coppia di colombi, l'uno riceveva solo grano, l'altro grano più embrioni; nella prova successiva il secondo riceveva solo grano e l'altro grano più embrioni.

Riassumiamo i risultati ottenuti nell'unita tabella, nella quale sono anche calcolati la quantità media di alimento giornalmente consumato, ed il peso medio riguadagnato giornalmente dagli animali. Abbiamo anche calcolato il guadagno in peso corporeo, corrispondente ad una data quantità — 100 gr. — di alimento, ricavandolo dal rapporto $\frac{P \times 100}{A}$, in cui P è il peso ricuperato dall'animale, ed A la quantità di alimento consumato.

N. dell'animale	N. dell'esperienza		Peso dell'animale		Durata del digiuno in giorni		Peso alla fine del digiuno		Peso perduto		Perdita percentuale di peso		Alimento usato nella rialimentazione	Durata della rialimentazione in giorni	Quantità di alimento consumato nella rialimentazione		Quantità media di alimento giornalmente consumata		Peso medio giornalmente riacquistato		$\frac{P \times 100}{A}$
	gr.		gr.		gr.		gr.		gr.		gr.				gr.		gr.		gr.		
I	1	490	7	405	85	17.3							Grano: piccolo I	9	360	40	9.44	23.6			
	2	527	6	442	85	16.1							» grosso	16	588	36	5.31	14.5			
	3	460	8	375	85	18.4							» piccolo II	9	335	37	9.44	25.4			
	4	440	8	360	80	18.1							» grosso	9	290	32	8.99	27			
	5	430	8	365	89	20.7							Fave con l'embrione	9	345	38	9.89	26			
	6	480	11	387	93	19.3							Fave senza l'embrione	11	390	35	8.45	23.2			
	7	485	7	385	100	20.6							Grano più embrioni	6	266	44	16.66	37.4			
	8	450	8	360	90	20							Grano	8	⁽¹³³⁺¹³⁵⁾ 325	40	11.25	27.6			
II	1	485	5	408	77	15.6							Grano: grosso	11	380	34	7	20.2			
	2	468	6	392	76	16							» piccolo I	13	445	34	5.76	17			
	3	435	9	356	79	18.1							» piccolo II	10	335	33	7.9	23.5			
	4	420	8	340	80	19							» piccolo I	9	245	26	8.99	32.6			
III	1	540	9	432	108	20							Fave senza l'embrione	14	600	42	7	18			
	2	520	12	415	105	20.1							» con l'embrione	10	390	39	10.5	26.9			
	3	525	10	421	104	19.8							Grano	8	340	42	13	30.5			
	4	510	9	405	105	20.5							Grano più embrioni	5	⁽⁹⁶⁺⁹⁶⁾ 192	38	21	54.6			

Da un esame della tabella risulta, che nelle prove eseguite con grano grosso, i colombi I e II, per riguadagnare gr. 85 e 80 il primo, e gr. 77 il secondo, hanno impiegato giorni 16 e 9 il primo e giorni 11 il secondo, consumando di alimento rispettivamente gr. 588 e 290 e gr. 380. Il valore del rapporto $\frac{P \times 100}{A}$, cioè il guadagno in peso corporeo corrispondente ad un consumo di 100 gr. di alimento, è stato pari a 14.5 e a 27 per il Col. I, ed a 20,2 per il Col. II. Gli stessi animali nella prova eseguita

con grano « piccolo I », per riguadagnare gr. 85 il primo, e gr. 76 e 80 il secondo, hanno impiegato rispettivamente giorni 9 e giorni 13 e 9, consumando gr. 360 di alimento il Col. I, e gr. 445 e 245 il Col. II. Il valore di $\frac{P \times 100}{A}$ è stato eguale a 23.6 per il primo, ed a 17 e 32.6 per il secondo.

Quando nella rialimentazione è stato adoperato il grano « piccolo II », gli stessi due animali hanno riguadagnato gr. 85 il primo e gr. 79 il secondo, rispettivamente in giorni 9 e 10, consumando tanto l'uno che l'altro gr. 335 di alimento. Il valore del rapporto $\frac{P \times 100}{A}$ è stato pari a 25.4 per il Col. I, ed a 23.5 per il Col. II.

Nella prova eseguita con le fave non embrionate, il Col. I, per riguadagnare gr. 93, ha impiegato 11 giorni, e consumato gr. 390 di alimento. La quantità media di alimento giornalmente consumata ed il ricupero medio giornaliero del peso perduto, sono stati rispettivamente di gr. 35 e gr. 8.45; il valore del rapporto $\frac{P \times 100}{A}$ è stato eguale a 23.2.

Nella prova invece eseguita con le stesse fave, embrionate, l'animale ha riguadagnato in 9 giorni gr. 89 e consumato gr. 345 di alimento; consumò in media gr. 38 di fave per giorno, con un ricupero medio di gr. 9.89; il valore di $\frac{P \times 100}{A}$ è stato pari a 26.

Analogamente il Col. III nella prova con le fave non embrionate ha impiegato giorni 14 per riguadagnare gr. 108, consumando gr. 600 di alimento. La quantità media di alimento giornalmente consumata ed il ricupero medio giornaliero del peso, sono stati rispettivamente di gr. 42 e gr. 7, ed il valore del rapporto $\frac{P \times 100}{A}$ eguale a 18. Nella prova invece eseguita con le stesse fave, embrionate, lo stesso animale riguadagnava gr. 105 in 10 giorni, consumando in tutto 390 gr. di alimento: consumò in media gr. 39 di fave per giorno, con un ricupero medio di gr. 10.5; il valore di $\frac{P \times 100}{A}$ fu eguale a 26.9.

Risultati ancora più netti e marcati si sono ottenuti nell'ultima serie di osservazioni. Il Col. I, nella prova eseguita con grano solo ha impiegato giorni 8 per riguadagnare gr. 90 di peso, consumando in totale gr. 325, e giornalmente in media gr. 40 di grano, con un ricupero medio di gr. 11.25; il valore di $\frac{P \times 100}{A}$ è stato eguale a 27.6. Nella prova invece eseguita con lo stesso grano, con aggiunta però di embrioni a parti eguali, lo stesso animale impiegò giorni 6 per riguadagnare 100 gr. di peso perduti, consumando in tutto gr. 266 di alimento, con un consumo medio

giornaliero di gr. 44 ed un ricupero medio di gr. 16.66; il rapporto $\frac{P \times 100}{A}$ ha dato un valore di 37.4.

Corrispondentemente il Col. III nella prova eseguita con solo grano riguadagnò in 8 giorni gr. 104 e consumò in totale gr. 340 di grano; il consumo medio giornaliero fu di gr. 42, con un ricupero medio di gr. 13; il valore di $\frac{P \times 100}{A}$ fu eguale a 30.5. Nella prova invece eseguita con grano più embrioni, a parti eguali, riguadagnò in 5 giorni gr. 105, consumando solo gr. 190 di alimento: consumò in media gr. 38 al giorno ricuperando giornalmente gr. 21 del peso perduto; il valore di $\frac{P \times 100}{A}$ fu eguale a 54.61.

Volendo prescindere dalla eccezione costituita dai risultati dell'esp. 4 sul Col. I, e dell'esp. 2 sul Col. II, che per cause non bene identificabili (probabilmente connesse con variazioni abnormi di condizioni interne), si presentano diversi dagli altri, e fondandosi precisamente su questi ultimi, possiamo riassumendo affermare, che i fatti principali trovati sono i seguenti:

1) Di regola i nostri animali hanno mostrato di riguadagnare una determinata, eguale perdita di peso, da digiuno, più prontamente e consumando una quantità minore di alimento, allorquando nella rialimentazione è stato adoperato grano a chicchi di piccole dimensioni, che non quando è stato adoperato grano a chicchi di dimensione maggiore.

2) La ripresa del peso corporeo è stata più pronta e la quantità di alimento consumato minore, allorchè gli animali sono stati rialimentati con frammenti di fave portanti la parte embrionale, che non quando si sono adoperati i frammenti non embrionati degli stessi semi.

3) Quando infine gli animali sono stati rialimentati con grano addizionato a parti eguali ad embrioni ricavati colla molitura del medesimo, la ripresa del peso corporeo perduto nel precedente periodo di digiuno, è avvenuta assai rapidamente, e con un consumo di alimento molto minore, che non quando nella rialimentazione è stato adoperato lo stesso grano, ma senza alcuna aggiunta dei corrispondenti embrioni.

In base pertanto ai risultati suesposti, noi ci crediamo autorizzati a ritenere, che, analogamente a quanto in precedenza abbiamo potuto stabilire pei fenomeni costruttivi di accrescimento, anche per ciò che concerne i fenomeni ricostruttivi, cioè quei processi che accompagnano la ripresa del peso corporeo dopo un periodo di digiuno, i costituenti embrionali, si sono rivelati capaci di apportare netti vantaggi.

In altre parole, dal complesso delle nostre ricerche abbiamo tratto la convinzione, che essi hanno, non solo un notevole valore alimentare costruttivo, ma anche un evidente valore alimentare ricostruttivo.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Azione di alcuni alcaloidi sullo sviluppo dell'Aspergillus Niger* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. MEZZADROLI e A. AMATI, presentata dal Socio B. LONGO.

In una Nota precedente ⁽³⁾ fu dato conto dell'azione di alcuni alcaloidi sullo sviluppo dei saccaromiceti; nel presente lavoro è studiata particolarmente l'azione degli stessi alcaloidi (stricnina, caffeina, chinina) sullo sviluppo dell'Aspergillus Niger.

Il liquido adoperato per queste esperienze aveva la seguente composizione:

Acqua	gr. 100
Zucchero	» 6.5
Nitrato d'ammonio	» 1
Fosfato monopotassico	» 0.5
Solfato di magnesio (crist.)	» 0.52
Cloruro ferrico	» 0.001
Solfato di zinco	» 0.02
Acido fosforico (al 45 %)	cc. 0.15
Acidità: 5.5 cc. di Na OHN/10 per 10 cc.	

MODO OPERATORIO.

In 14 palloni della capacità di 500 cc. abbiamo posto cc. 250 di liquido nutritizio, a 12 di essi furono aggiunti alcaloidi in forma solubile nella quantità di 0.5-1-2-3 ‰, mentre due furono adoperati per le prove in bianco. Tutti i palloni dopo sterilizzazione e raffreddamento vennero seminati con la stessa quantità di spore di Aspergillus Niger e posti in termostato alla temperatura costante di 30° C. per otto giorni consecutivi. Durante l'accrescimento delle muffe esse furono periodicamente tenute in osservazione. Ecco riunite in forma di tabella le annotazioni fatte durante le fasi dello sviluppo:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Tecnologia dello zucchero e delle fermentazioni industriali della R. Scuola Superiore di Chimica Industriale.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1932.

(3) G. MEZZADROLI e A. AMATI, *Azione di alcuni alcaloidi sull'incremento e moltiplicazione dei saccaromiceti e in particolare dell'aerolievito di melasso*. Lavoro in corso di pubblicazione presentato al XIV Congresso Internazionale di Fisiologia in Roma, 29 agosto-3 settembre 1932.

N. camp.	Alcaloide	di alcaloide gr. in 1000 cc.	Osservazioni sullo sviluppo dell'Aspergillus		
			dopo 38 ore	dopo 62 ore	dopo 86 ore
1	(controllo)	0	minimo sviluppo, in 3 o 4 focchi solamente	poco sviluppato	continua lo sviluppo della muffa mantenendosi inalterate le differenze con gli altri campioni osservati nella tabella precedente.
2	id.	0	id.	id.	
3	Stricnina nitrato	0.5	inizio sviluppo mediocre	sviluppo completo su tutta la superficie	
4	id.	1	buon sviluppo	sviluppo abbondantissimo e completo	
5	id.	2	sviluppo molto accentuato	id.	
6	id.	3	sviluppo ottimo	id.	
7	Caffeina	0.5	inizio appena accentuato	poco sviluppato	sviluppo debole con molte spore pochi focchi con spore pochissimi focchi sporificati continua a crescere molto bene
8	id.	1	sviluppo minimo e solo in alcuni punti	tre, quattro focchi sviluppati	
9	id.	2	id.	pochissimi focchi sviluppati	
10	id.	3	id.	tre, quattro focchi isolati	
11	Chinina solfato	0.5	inizio sviluppo ottimo	sviluppo abbondante quasi completo	
12	id.	1	buon sviluppo	id.	id.
13	id.	2	sviluppo mediocre in pochi focchi	poco sviluppo	id.
14	id.	3	inizio a focchi isolati	mediocre non completo	id.

Il nono giorno i palloni furono tolti dal termostato e ogni tappeto della cultura di *Aspergillus* venne raccolto su filtro tarato e dopo lavaggio con acqua distillata, essiccato in stufa a vuoto e pesato.

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella seguente:

N. camp.	Alcaloide	gr. di alcaloide in 1000 cc.	Peso del micelio secco
1	(controllo)	—	gr. 4.236
2	id.	—	» 4.320
3	Stricnina nitrato	0.5	» 4.423
4	id.	1	» 4.830
5	id.	2	» 4.486
6	id.	3	» 4.433
7	Caffeina	0.5	» 3.628
8	id.	1	» 3.690
9	id.	2	» 2.430
10	id.	3	» 1.060
11	Chinina solfato	0.5	» 4.650
12	id.	1	» 4.736
13	id.	2	» 5.040
14	id.	3	» 5.046

CONCLUSIONI.

In questo lavoro è stata provata l'azione degli alcaloidi (stricnina, caffeina, chinina) sullo sviluppo dell'*Aspergillus Niger* coltivato in liquido tipo di Wehmer; dai dati delle presenti esperienze si possono trarre le seguenti conclusioni:

1) La chinina sotto forma di solfato in concentrazioni crescenti da 0.5 a 3 per 1000 cc. favorisce lo sviluppo dell'*Aspergillus Niger*.

2) La caffeina pura, esercita un'azione inibente sullo sviluppo dello *Aspergillus Niger* anche alla concentrazione del 0.5 ‰.

3) La stricnina (nitrato) favorisce l'accrescimento e lo sviluppo dell'*Aspergillus Niger* però meno della chinina; la dose ottima risulta quella dell' 1 ‰.

Come è stato riscontrato delle esperienze compiute sui saccaromiceti, anche per l'*Aspergillus Niger* gli alcaloidi sperimentati, determinano azioni stimolanti o ritardanti, secondo l'alcaloide e la dose impiegata.

Precedenti ricercatori, G. Ciamician e C. Ravenna (1918), M. Padoa e A. Spada (luglio 1929), B. Longo e C. Paderi (settembre 1929) in lunghe e numerose esperienze sulla germinazione dei semi in presenza di alcaloidi, avevano ottenuto azioni analoghe.

Nelle fermentazioni furono osservate azioni eccitanti: C. Neuberg trovò che la caffeina e la xantina agiscono favorevolmente sulla fermentazione alcoolica e U. Haehn impiegò la chinina come eccitante nella fermentazione citrica ⁽¹⁾.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Contributo alla conoscenza della natura e del valore della Reazione di Bezssonoff per fattore C* ⁽²⁾. Nota ⁽³⁾ di A. SALVATORI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto che l'esistenza del fattore C, come pure degli altri, antiberiberico, antirachitico, ecc., è stata ammessa in base ad osservazioni biologiche, e che soltanto particolari e determinate reazioni biologiche hanno guidato, e guidano tuttora, lo sperimentatore nello studio dei fattori medesimi.

Tuttavia l'indole degli esperimenti che si richiedono, la loro durata talvolta anche molto lunga, il loro svolgimento non sempre scevro da complicazioni, e altre difficoltà, hanno fatto sentire il bisogno di pervenire alla conoscenza di adatte e specifiche reazioni chimiche, capaci di sostituire, tutte le volte che fosse possibile, le prove sugli animali.

Si comprende bene, pertanto, tutto l'interesse che destò la proposta del Bezssonoff circa la sua reazione chimica pel fattore C, e conseguentemente il nostro desiderio di volerci formare al riguardo una personale e fondata convinzione.

Nel 1922 il Bezssonoff ⁽⁴⁾, studiando la possibilità di applicare il reattivo di Folin per l'acido urico e per i fenoli, alla ricerca del fattore C, riuscì a preparare un acido molibdo-fosfotungstico, che dava una colorazione grigio-ardesia virante al bleu con vari materiali di sperimentata azione antiscorbutica, mentre non dava tale colorazione con materiali non antiscor-

(1) Per economia di spazio si omette la bibliografia la quale è riportata nella precedente Nota: *Sull'Azione di alcuni alcaloidi sull'incremento e moltiplicazione dei saccaromiceti*, inviata al Congresso Internazionale di Fisiologia di Roma, 1932-x.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologia della R. Università di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1932.

(4) M. N. BEZSSONOFF, *Sur les reactions colorées des extraits antiscorbutiques et des polyphenols avec un acide phosphomolybdotungstique*. « Bulletin Soc. Chim. Biol. », 1922, tomo IV, n. 2.

butici e con vari composti a tipo fenolico e polifenolico, eccettuato l'idrochinone.

Nella preparazione del reattivo, noi seguimmo scrupolosamente le prescrizioni date dal Bezssonoff nel 1926, per ottenerlo cristallizzato in un tempo relativamente breve e usammo la tecnica descritta dall'autore⁽¹⁾:

Grammi 74 di tungstato di sodio e gr. 8 di acido fosfomolibdico vennero sciolti in 250 cc. di acqua bidistillata su permanganato. A questa soluzione vennero aggiunti 10 cc. di acido ortofosforico conc. (d. 1.75), e portato il tutto in bagnomaria a 45°; goccia a goccia si addizionarono 85 cc. di acido solforico al 50 %, ottenendosi così un precipitato cristallino. Si lasciò raffreddare e dopo tre ore la cristallizzazione fu completa. La precipitazione venne ripetuta tre volte allo scopo di ottenere cristalli di grande purezza. I cristalli stessi vennero seccati su carta da filtro svedese e poi sciolti in tanto acido solforico al 5 %, da formare una soluzione al 15 %.

Come materiale di sicura azione antiscorbutica noi usammo succo di limone, di arancio e di mandarino, ottenuto per semplice spremitura. Fin dalle prime esperienze, non sfuggì alla nostra osservazione che i succhi usati possedevano una notevole azione riducente, che si esercitava sul permanganato, sul bicromato e anche, sebbene in maniera non completamente dimostrativa, sullo iodio. D'altra parte è noto, che gli elementi, che entrano nella composizione del reattivo, possiedono vari stadi di ossidazione aventi, ciascuno, una colorazione caratteristica, con preponderanza dei colori bleu e violetto. Logica dunque l'ipotesi che la particolare colorazione bleu-violetta data dal reattivo di Bezssonoff in soluzione solforica al 5 %, potesse essere un prodotto di riduzione o del molibdeno, o del tungsteno, o di tutti e due contemporaneamente. In questa ipotesi ci confermava il fatto che l'idrochinone, noto per le sue proprietà riducenti, dava una netta reazione.

Quest'ultima circostanza ci indusse anzi a verificare, se il metolo, anch'esso fenolo con spiccate proprietà riducenti, desse la reazione. Un rapido saggio dette risultato positivo. E allora sperimentammo vari riducenti come solfato ferroso, cloruro stannoso, iposolfito, metalli, come ferro e zinco, con acido solforico. In ogni caso ottenemmo costantemente la caratteristica colorazione bleu-violetta. Vari altri riducenti si dimostrarono inefficaci e tra questi citiamo l'anidride arseniosa, il glucosio, l'idrogeno molecolare. Non abbiamo, di proposito, voluto approfondire questa differenza di comportamento, ma con tutta probabilità essa è dovuta all'ambiente in cui avviene la reazione ed alla temperatura. Noi sperimentammo sempre a freddo ed in ambiente acido. Comunque le riduzioni sopra citate, sono più che sufficienti per farci affermare che la colorazione bleu-violetta è dovuta ad una

(1) *Preparation rapide de l'acide mono-molybdo-phosphotungstique, reactif des polyphénols et des vitamines.* « Compt. Rend. », tom. 186, p. 1223, anno 1926.

reazione di riduzione del reattivo. Se questo è vero, non è necessario ricorrere alla laboriosa preparazione dell'acido mono-molibdofosfotungstico di Bezssonoff, ma è sufficiente usare un opportuno composto del solo molibdeno o del solo tungsteno. Seguendo questa idea abbiamo voluto sperimentare l'acido fosfomolibdico in soluzione acquosa. Con questo composto la riduzione decorre fino all'ossido azzurro di molibdeno con i più noti materiali antiscorbutici, con l'idrochinone, con metolo: si ottiene, invece, l'ossido rosso di molibdeno, con pirogallolo e con l'acido tannico. Nessuna riduzione, nelle stesse condizioni di ambiente e di temperatura, si ha con l'acido urico, con fenolo, con resorcina ecc. L'acido fosfo-molibdico si comporta in una parola, in maniera perfettamente analoga al reattivo di Bezssonoff, l'unica differenza consistendo nel fatto, che col primo la colorazione caratteristica è un bell'azzurro, mentre col secondo si ha la nota colorazione bleu-violetta. Si potrebbe indirizzare la ricerca verso un composto ancora più semplice dell'acido fosfo-molibdico e verso tutti quei coloranti organici che per riduzione danno il leucoderivato od altro colore, ma non vogliamo insistere su ciò, sembrandoci che l'uso di un reattivo piuttosto di un altro, basato però sullo stesso principio, non abbia una seria importanza.

Più importante, invece, ci sembra il fatto che tutti i materiali antiscorbutici più noti e più efficaci, possiedono proprietà riduttive. Se ora si tiene presente che l'ossidazione, in qualunque maniera avvenga, distrugge o attenua fortemente le proprietà antiscorbutiche di un dato materiale, questa circostanza acquista un rilievo degno, senza dubbio, della massima considerazione.

Quale relazione esiste tra questo fattore riducente e il fattore antiscorbutico? È un fattore accessorio o è esso stesso il fattore C?

Ci proponiamo di rispondere a queste due domande con esperimenti che abbiamo in corso. Intanto come conclusione del presente lavoro, crediamo di poter affermare:

I. Che il reattivo di Bezssonoff non è specifico pel fattore C. Esso mette soltanto in evidenza in tutti i materiali antiscorbutici un fattore riducente, che può o non coincidere con la vitamina C;

II. Che a tale scopo si può ricorrere come reattivo ad un composto più semplice, in cui entri un elemento che abbia almeno due stadi di ossidazione colorati differentemente.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 novembre 1932 (anno XI)

Presidenza del Socio anziano prof. sen. E. MARCHIAFAVA

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geofisica. — *Materiali per la ricostruzione delle carte magnetiche d'Italia (IV Contributo: Piemonte).* Nota ⁽¹⁾ del Socio L. PA-LAZZO.

1. Nel 1928 ho potuto riprendere il lavoro di raccolta di nuove osservazioni per la ricostruzione delle carte magnetiche d'Italia, lavoro che, iniziato nel 1921 e proseguito fino al 1924, m'era capitato poi di lasciare interrotto per alcune estati, a motivo di altri lavori sopraggiunti e di altre missioni dovute successivamente compiere, tra cui il viaggio in Africa per le osservazioni dell'eclisse solare del 1926 e per il rilievo magnetico della Somalia. Intanto, per ciò che riguarda i rilievi italiani, io avevo comunicato a suo tempo, alla R. Accademia, i rapporti concernenti l'intero bacino Adriatico, il versante medio Tirrenico con le minori isole, e poi le isole maggiori di Corsica, Sardegna e Sicilia ⁽²⁾, cosicchè la presente Nota, relativa alle misure fatte nel 1928 e 1929 in Piemonte, può considerarsi come il IV contributo del genere ⁽³⁾.

(1) Presentata nella seduta del 6 novembre 1932.

(2) V. rispettivamente in «Rendiconti», serie 5^a, vol. XXXI, XXXII e XXXIII, sedute 2 aprile 1922, 4 marzo 1923, 7 dicembre 1924.

(3) Mi ero proposto di rilevare nel 1928 la regione ovest della Valle Padana, ma malauguratamente cominciarono allora a manifestarsi seri disturbi nella mia vista, per cui il lavoro subì nuovi indugi ed intralci. Nel 1928 non riuscii a finire le misure del

2. Le stazioni scelte per le misure nel Piemonte sono qui appresso elencate, per ordine di data della loro occupazione, e con l'indicazione della natura del suolo circostante. Esse, ad eccezione di Gressoney⁽¹⁾, sono tutte stazioni di *ripetizione* nelle quali, cioè, erano già stati determinati in altri tempi gli elementi magnetici, dal prof. Chistoni o dal P. Denza.

Nel 1928:

1^a Domodossola, nel recinto adibito a campo calcistico del Collegio Rosmini (settembre 13, 14, 15): terreno alluvionale con numerosi ciottoli di gneiss e scarsi ciottoli serpentinosi.

2^a Alagna, in un prato dietro l'Albergo Guglielmina (settembre 19, 20): morena con detriti vari; in vicinanza rocce serpentinee.

3^a Gressoney Saint Jean, in un prato a destra del viale d'accesso all'Albergo Delapierre (settembre 23, 24): alluvione terrazzata del Lys, gneiss minuti.

4^a Aosta, in un prato dell'Ospizio di Carità, già podere della Scuola pratica d'agricoltura (settembre 27, 28, 29, 30): terreno agrario, alluvione terrazzata della Dora Baltea.

5^a Piccolo San Bernardo, al margine sinistro della strada poco prima di arrivare all'Ospizio (ottobre 2, 3): dolomia breccioide; in vicinanza micascisti, privi d'azione sul magnete.

6^a Courmayeur, frazione Larzey, nella prateria retrostante alla Pensione del Viale (ottobre 5, 6): alluviale, detriti di gneiss e granito porfiroide.

7^a Bardonecchia, frazione Borgonuovo, in un prato che è dipendenza dell'Albergo Savoia, al di là del torrentello Merdovine (ottobre 9, 10, 11): alluviale, cono di deiezione.

8^a Torrepellice, in un prato ad est della Pensione Gelli (ottobre 13, 14): alluvione terrazzata del Pellice, con detriti di gneiss e micascisti.

9^a Lanzo, in un prato all'estremo sud-orientale del colle detto Monte Buriasco su cui sorge il Collegio Salesiano (ottobre 23, 24, 25): serpentina del pre-triassico.

Nel 1929:

1^a Alessandria, in regione « Orti », nell'orto annesso all'Ospizio della Divina Provvidenza (settembre 4, 5): terreno agrario argilloso, su alluvione ciottolosa.

Piemonte, ed il programma, limitatamente a quest'ultimo, potè essere completato, per le poche stazioni rimaste, soltanto nel settembre dell'anno appresso 1929. All'elaborazione poi, ed al calcolo delle osservazioni raccolte, coll'aggravarsi dell'infermità, io non fui più in grado di accudire se non in questi ultimi mesi dopo il parziale recupero della vista. Questo ho voluto dire per spiegare il ritardo nella presentazione della Nota, ed a chiarimento dell'opera mia.

(1) Parve indicato comprendere, fra i punti da determinarsi, anche uno nuovo: Gressoney, nella cui valle abbiamo la stazione di base degli osservatorii geofisici del Monte Rosa.

2^a Cuneo, in un prato di proprietà Marchisio Battista tra il viale degli Angeli e la ripa verso il torrente Gesso (settembre 10, 11, 12): terreno agrario, alluvione ghiaiosa del piano terrazzato dal Gesso.

3^a Novara, nel centro del nuovo campo sportivo, sotto il vecchio baluardo di S. Lucia (settembre 14, 15, 16): sabbie giallastre di alluvione.

4^a Domodossola, nello stesso punto dell'anno precedente (settembre 27, 28).

3. Al finire della breve campagna del 1929, ho voluto ripetere la stazione di Domodossola, già compresa nella serie del 1928, e ciò per avere modo di operare la saldatura fra le due serie benchè distanziate di quasi un anno; vale a dire, ebbi l'intendimento di procurarmi (almeno per una stazione presa come caposaldo) la conoscenza delle variazioni nell'intervallo, allo scopo di ricondurre poi tutte le misure ad un'epoca comune, intermedia, quale il principio d'anno 1929.

Nel fatto, le misure ripetute hanno dato:

	<i>Domodossola</i>		
	D	I	H
In settembre 1928:	7° 50'.5 W	61° 59'.5 N	07.21147
In settembre 1929:	7 39.6	61 57.7	0.21124
Variazioni in 1 anno:	— 10'.9	— 1'.8	— 23 γ

I valori di variazione per D e per H appaiono buoni; la diminuzione della declinazione (occidentale) di 10–11' per anno è precisamente quella ammessa attualmente nelle nostre regioni; e sappiamo pure che l'intensità orizzontale diminuisce ora annualmente di qualche decina di γ⁽¹⁾. Invece la variazione ottenuta a Domodossola per l'inclinazione ci lascia incerti anche in riguardo al segno, perchè essa sta entro il limite dell'errore tollerabile nelle determinazioni di I fatte coll'ordinario inclinometro a cerchio, che è ± 2' ⁽²⁾.

4. Ciò premesso, possiamo presentare in tabella i nostri risultati.

Ai valori di D e H, osservati e raccolti in semplici medie ⁽³⁾ per le singole stazioni, abbiamo apportato i necessari ritocchi (piccole frazioni

(1) Invero le variazioni a me risultate per Domodossola in D e H, a distanza di un anno, collimano molto bene con le quasi contemporanee variazioni determinate all'osservatorio magnetico di Seddin (Prussia), e che il collega Direttore Nippoldt mi ha gentilmente comunicate. Le differenze fra i valori normali (medi di 12 mesi) a Seddin per le epoche 1928.5 e 1929.5 sono state: 10'.45 di diminuzione nella declinazione occidentale, 24'.3 di diminuzione nell'intensità orizzontale; l'inclinazione è invece aumentata di 2'.76.

(2) Il dubbio sul risultato di Domodossola per I è motivato pure dal fatto che nell'Italia Centrale oggi l'inclinazione mostra invece tendenza a lieve aumento, forse di 1' all'anno.

(3) Già ho detto altre volte che per lo speciale modo con cui io sono solito a condurre le determinazioni magnetiche in campagna, in due o più giorni e con opportuna

delle variazioni annue testè trovate, rispettivamente $-10'.9$ e $-23\gamma^{(1)}$ per la riduzione all'epoca 1929.0; invece, quanto all'inclinazione, piuttosto che introdurre correzioni incerte, preferiamo lasciare così come sono, le medie ricavate immediatamente dalle misure, ritenendo che esse rappresentino già ad ogni modo, assai da vicino, i valori di I quali si sarebbero osservati intorno al 1929.0.

I dati portati nella tabella appresso, sono divisi in due gruppi. A sinistra figurano ordinate le stazioni secondo la longitudine da est ad ovest, con a fianco i valori della declinazione magnetica, perchè è soprattutto con la longitudine che varia la declinazione. Nella sezione di destra sono offerti i valori dell'inclinazione e dell'intensità orizzontale delle stazioni disposte in ordine di latitudine decrescente, con la quale I ed H essenzialmente variano.

Elementi magnetici determinati in Piemonte per l'epoca 1929.0.

STAZIONI	Longitu- dine est da Green. λ	Declina- zione occi- dentale D	STAZIONI	Latitudine nord φ	Inclina- zione bo- reale I	Intensità orizzontale H
Alessandria . . .	$8^{\circ}37'.1$	$7^{\circ}38'.3$	Domodossola . .	$46^{\circ}06'.7$	$61^{\circ}58'.6$	$0^{\circ}.21142$
Novara	$8\ 36.9$	$7\ 35.3$	Alagna	$45\ 51.2$	$61\ 12.1$	0.20837
Domodossola . .	$8\ 17.3$	$7\ 48.0$	Courmayeur . .	$45\ 47.8$	$61\ 47.4$	0.21194
Alagna	$7\ 56.1$	$7\ 32.9$	Gressoney . . .	$45\ 46.6$	$61\ 16.4$	0.21498
Gressoney . . .	$7\ 49.7$	$8\ 38.8$	Aosta	$45\ 44.1$	$61\ 35.5$	0.21324
Cuneo	$7\ 32.8$	$8\ 05.4$	Piccolo S. Ber- nardo	$45\ 40.2$	$61\ 38.8$	0.21281
Lanzo	$7\ 29.0$	$8\ 48.0$	Novara	$45\ 26.6$	$61\ 25.0$	0.21511
Aosta	$7\ 19.0$	$8\ 18.3$	Lanzo	$45\ 16.1$	$61\ 57.3$	0.21174
Torrepellice . .	$7\ 13.2$	$7\ 56.1$	Bardonecchia . .	$45\ 04.6$	$61\ 03.6$	0.21578
Courmayeur . .	$6\ 58.3$	$8\ 16.1$	Alessandria . .	$44\ 55.3$	$60\ 50.1$	0.21814
Piccolo S. Ber- nardo	$6\ 52.6$	$8\ 27.7$	Torrepellice . .	$44\ 49.1$	$60\ 51.2$	0.21729
Bardonecchia . .	$6\ 12.4$	$8\ 21.1$	Cuneo	$44\ 23.0$	$60\ 23.0$	0.22065

scelta delle ore, i valori *genuini* da me dati come medie immediate delle osservazioni, devono in genere corrispondere con grande approssimazione ai valori medi diurni degli elementi. — Noi non avevamo fino a poco fa un osservatorio magnetico in Italia su cui appoggiarci per sceverare dai risultati di campagna le variazioni di tempo. Solo recentemente è entrato in funzione, per cura dell'Istituto Idrografico di Genova, un osservatorio magnetico sull'altura del Castellaccio.

(1) Questi valori di variazione propri di Domodossola possono pure applicarsi alle altre stazioni del Piemonte, trattandosi di regione limitata.

5. Se i valori di declinazione s'inscrivono sulla carta geografica (non è possibile qui riprodurla), il tracciamento delle isogone mostra che esse corrono in Piemonte poco regolari, cioè subiscono inflessioni, e tuttavia mantengono ad un dipresso la direzione lungo i meridiani, con diminuzione di D (occid.) da ovest ad est in ragione di $24'$ per 1° di longitudine, a somiglianza di quanto avviene in altre regioni d'Italia ⁽¹⁾. Valori di D nella tabella non conformi a questa regola si notano specialmente per Alagna e più ancora per Gressoney. Lanzo poi si isola dalla rappresentazione generale delle isogone per un'anomalia notevole, quasi 1° in più. La causa di queste anomalie si arguisce facilmente. Il ripiano morenico di Alagna su cui ho lavorato, può nascondere in profondità detriti provenienti dalle vicine formazioni serpentinosi. A Gressoney io avevo cercato di allontanarmi abbastanza dalle serpentine della valle superiore del Lys, discendendo da La Trinité fin oltre Saint Jean, e ponendomi su terreno d'alluvione, in cui non riscontrai elementi serpentinosi; ma non sappiamo poi quali rocce si cèlino sotto la coltre alluvionale. Quanto a Lanzo, già sapevo che il colle Buriasco era costituito da massi serpentinosi, e tuttavia io volli fare quel punto, in cui aveva posto la sua stazione il Chistoni nel 1887, perchè mi interessava di vedere quali valori di variazioni magnetiche (secolari) sarebbero venuti fuori dal confronto fra le nuove e le vecchie misure, su terreno magneticamente anomalo.

Se poi mettiamo sulla carta geografica i valori di inclinazione, vediamo che le isocline in Piemonte corrono pressochè nella direzione dei paralleli, scalandosi abbastanza regolarmente da sud a nord, con aumento di quasi un grado d'inclinazione per ogni grado di ascesa in latitudine. Ma fanno spiccata eccezione a tale legge i tre punti, già riconosciuti anomali per D : Alagna, Gressoney e Lanzo. Quest'ultimo scarta per un'inclinazione di $45-50'$ sopra il valore normale; il polo nord dell'ago subisce dunque particolare attrazione da parte del terreno.

Passando infine a considerare pel Piemonte le isodinamiche della componente orizzontale, l'insieme delle linee costituisce una rappresentazione poco dissimile da quella delle isocline; l'intensità H cresce con discreta regolarità scendendo dal nord al sud, di $530-540 \gamma$ per ogni intervallo di 1° di latitudine, come abbiamo trovato altrove in Italia, dal basso Tirreno in su. Anche senza il sussidio della carta, ognuno vede dalla tabella che si presentano qui nuovamente le anomalie di Alagna, Gressoney e Lanzo. Il divario di Lanzo dal valore normale è di 380γ circa in meno; all'inclinazione aumentata corrisponde la forza orizzontale diminuita, ma, a calcoli fatti, risulta un sensibile accrescimento della forza totale. Anche questo è conforme alle idee che abbiamo intorno al *magnetismo di monte*.

(1) Precisamente: sul versante medio del Tirreno, sull'Adriatico ed in Sardegna noi abbiamo trovato il rapporto medio di ΔD a $\Delta \lambda = -25'$; in Sicilia $\Delta D/\Delta \lambda = -21'$.

6. Adesso vogliamo sottoporre a confronto le recenti mie misure e quelle eseguite dal Chistoni in Piemonte negli anni 1886 e 1887; in questo modo ricaveremo qualche utile conoscenza relativa alle variazioni secolari. Siccome le operazioni del Chistoni furono comprese fra il luglio 1886 ed il giugno 1887, così torna conto — prima di iniziare il confronto coi nostri valori — riportare uniformemente i dati del Chistoni al principio d'anno 1887; ciò che ottengo con lievi ritocchi, in base alle variazioni *per anno* a noi note per il periodo 1881-1892 e per l'Italia continentale: $\Delta D = -5'.5$; $\Delta I = -1'.5$; $\Delta H = +22\gamma$. Avverto inoltre che, per la ragione già da me esposta in precedenti pubblicazioni, i numeri di H lasciatici da Chistoni devono essere corretti con un termine comune addittivo: $+12\gamma$.

Nel quadro che segue, per 10 stazioni *ripetute* in Piemonte, stanno iscritti prima i valori del Chistoni, corretti e ridotti all'epoca 1887.0, e poi le differenze tra questi ed i dati miei valevoli pel 1929.0, cioè le variazioni secolari in D, I e H avvenute nell'intervallo 1887-1929.

Variazioni magnetiche in Piemonte dal 1887.0 al 1929.0.

STAZIONI RIPETUTE	Misure Chistoni riferite al 1887.0			Differenze 1887-1929 (*) (Chistoni-Palazzo)		
	D overt	I nord	H	ΔD	ΔI	ΔH
Alessandria	12°46'.0	61°31'.5	0.21441	-5°07'.7	-0°41'.4	+373 γ
Cunco	13 10.6	61 11.1	0.21662	-5 05.2	-0 48.1	+403
Torrepellice	13 08.7	61 46.2	0.21461	-5 12.6	-0 55.0	+268
Bardonecchia	13 30.7	61 54.3	0.21211	-5 09.6	-0 50.7	+367
Lanzo	13 11.0	62 17.6	0.21311	(-4 23.0)	(-0 20.3)	(-137)
Aosta	13 31.0	62 17.1	0.21079	-5 12.7	-0 41.6	+245
Courmayeur	13 32.8	62 25.0	0.20985	-5 16.7	-0 37.6	+209
Novara	12 44.9	62 00.6	0.21245	-5 09.6	-0 35.6	+266
Alagna	13 03.4	62 53.8	0.20600	(-5 30.5)	-0 41.7	+237
Domodossola	13 04.7	62 36.4	0.20899	-5 16.7	-0 37.8	+243
Medie delle variazioni 1887-1929				-5°11'.4 $\pm 1'.0$	-0°43'.3 $\pm 1'.5$	+290 γ $\pm 16\gamma$
Media variazione per anno nel 42.ennio				-7'.4	-1'.0	+7 γ

(*) Il segno — delle differenze Δ significa diminuzione del valore dell'elemento col progredire del tempo; il + corrisponde ad aumento col tempo.

Le variazioni secolari così desunte dalle singole coppie di valori comparati fra Chistoni e Palazzo, sono in genere assai concordi fra loro, per tutti e tre gli elementi e specialmente per la declinazione. Fa soltanto eccezione Lanzo, i cui Δ si allontanano da ogni altro, e per ΔH si ha perfino opposizione di segno. Ciò non sorprende, dopo quanto è stato detto avanti circa l'anomalia di Lanzo. Io, tornato a Lanzo per le misure, non ho più potuto identificare con sicurezza il punto in cui il Chistoni aveva posto la sua stazione, e allora basta un piccolo spostamento dall'uno all'altro centro d'osservazione, sulla roccia perturbante, per darci ragione delle irregolarità nelle differenze Δ testè rilevate (1).

Pertanto nel calcolare i valori medî delle variazioni secolari, abbiamo escluso i numeri relativi a Lanzo (chiusi in parentesi), come pure abbiamo escluso il valore di ΔD risultante da Alagna, ove pure si è notata un'anomalia dovuta al terreno. I rimanenti otto valori di ΔD si stringono compatti intorno al valore medio, con scostamenti massimi di $\pm 5-6'$; l'errore probabile del medio risultato poi è piccolissimo. Abbiamo dunque motivo di ritenere ben attendibili i valori medî delle variazioni secolari ricavate pel Piemonte e pel periodo 1887-1929, da noi scritti nella penultima orizzontale della tabella. Sotto, abbiamo aggiunti i quozienti delle variazioni globali per i 42 anni dell'intervallo. Ma l'operazione aritmetica assume significato fisico soltanto per la declinazione, che sappiamo essere sempre diminuita con continuità, e per la quale possiamo dunque dare $7'.4$ come decremento medio per anno, nel 42.ennio considerato. Per l'inclinazione e per l'intensità il caso è diverso, perchè I e H hanno variato in Italia passando rispettivamente per un minimo e per un massimo, invertendo dippoi il segno della variazione, nel tempo fra le vecchie e le nuove osservazioni.

7. Come accennammo in principio, fra le stazioni da me ripetute, ve ne sono alcune ove fece misure il P. Denza, più di mezzo secolo addietro. Esse sono: Piccolo S. Bernardo, Bardonecchia, Alessandria e Cuneo; queste tre ultime dippoi comprese anche nei rilievi del prof. Chistoni. È giusto qui ricordare l'opera magnetica del P. Denza, il quale tra gli anni 1875 e 1879 girò l'Italia facendo stazione in 77 punti, coll'intendimento di costruire la prima carta magnetica generale italiana. Il Denza però potè dare alle stampe soltanto una Memoria con le parti prima e seconda con-

(1) Ne riferisco una prova raccolta intorno al punto da me occupato. Avendo spostato l'inclinometro dal centro di stazione ad un punto distante metri 38 contati nella direzione $N\{24^{\circ}18'\}W$, mi risultò quivi l'inclinazione $61^{\circ}25'.8$, diversa di $31'.5$ da quella misurata nel centro: $61^{\circ}57'.3$. — D'altronde, anche il prof. P. Dionigi Boddaert, che studiò la distribuzione del magnetismo nei dintorni di Torino con una trentina di stazioni (« Mem. R. Accademia delle Scienze di Torino », serie II, tom. LVIII, LIX, 1907-1908), ebbe a riscontrare la speciale anomalia di Lanzo, con manifestazioni di forti divergenze fra due punti vicinissimi entro lo stesso podere del Collegio dei Salesiani.

Confronti fra le misure Denza e le successive.

STAZIONI	Misure Denza ridotte al 1877.0			Differenze 1877-1887 (Denza-Chistoni)			Differenze 1877-1929 (Denza-Palazzo)		
	D	I	H	ΔD	ΔI	ΔH	ΔD	ΔI	ΔH
Piccolo S. Bernardo	14°42'.3	62°27'.2	0°.20865	—	—	—	— 6°14'.6	— 0°48'.4	+ 419 ^y
Bardonecchia	14 49.0	62 07.4	0 .21120	— 1°18'.3	— 0°13'.1	+ 91 ^y	— 6 27.9	— 0 63.8	+ 458
Alessandria	13 39.8	61 47.0	0 .21360	— 0 53.8	— 0 15.5	+ 81	— 6 01.5	— 0 56.9	+ 454
Cuneo	14 10.3	61 22.0	0 .21599	— 0 59.7	— 0 10.9	+ 63	— 6 04.9	— 0 59.0	+ 466
Media delle variazioni 1877-1887. . .				— 1°03'.9	— 0°13'.2	+ 78 ^y			
Media delle variazioni 1877-1929							— 6°12'.2	— 0°57'.0	+ 449 ^y

cernenti i preliminari e le misure d'inclinazione (Torino, tipografia Collegio degli Artigianelli, 1888); purtroppo, il meglio del lavoro ossia le determinazioni di declinazione e d'intensità — con la morte del Denza avvenuta nel 1894 — rimasero non calcolate ed inedite. In tempi recenti il P. Boddaert, direttore dell'osservatorio meteorologico di Moncalieri, intraprese il paziente calcolo delle osservazioni magnetiche del Denza, estraendole dai registri originali; e così speriamo che fra breve possa il vecchio lavoro essere tratto dall'oblio. Frattanto, dalla cortesia di P. Boddaert, io ho potuto ottenere quei valori degli elementi magnetici che adesso mi interessavano, per le quattro stazioni del Denza su nominate. Noi siamo quindi in grado di stabilire ora i confronti fra i risultati del Denza, quelli successivi del Chistoni e gli ultimi miei, sempre allo scopo di contribuire allo studio delle variazioni secolari. Per presentare più chiara la comparazione, ho apportato ai valori del Denza, nel solito modo, piccoli ritocchi per la riduzione ad una epoca comune, espressa in numero tondo, e prossima ai tempi delle misure fatte: ho scelto l'epoca 1877.0. Diamo a p. 380 lo specchietto dei confronti.

Non occorrono, a proposito di quest'ultima tabella, commenti da parte mia; noto soltanto che l'aumento di H limitato a 78γ (valore medio delle tre differenze Denza-Chistoni) durante il decennio 1877-1887 mi pare poco attendibile, forse per difetto nei valori Denza.

Meccanica. — *Spostamenti rigidi finiti.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Mi propongo di dedurre, nel modo che mi sembra il più diretto ed elementare, un'espressione vettoriale abbastanza semplice degli spostamenti rigidi finiti. Essa è la seguente [n. 2]:

$$\Delta P = \Delta O + \frac{4}{4 + \omega^2} \omega \wedge \left(P - O + \frac{1}{2} \omega \wedge P - O \right),$$

essendo: P e O due punti qualsivogliano del sistema rigido, ΔP e ΔO i rispettivi spostamenti finiti e ω un vettore arbitrario. Se ΔO e ω sono prefissati ad arbitrio, entrambi, tale formula definisce gli spostamenti di tutti i punti P e quindi uno spostamento finito di tutto il sistema. Il vettore ω , per un medesimo spostamento, è indipendente da O [n. 3]. Se ΔO e ω sono infinitesimi, di primo ordine, la precedente formula va a coincidere con quella classica relativa agli spostamenti rigidi infinitesimi. Infine, passando

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1932.

alle componenti cartesiane [n. 7], stabilisco il confronto colle classiche formule euleriane ⁽¹⁾ e precisamente colle formule di Rodriguez ⁽²⁾.

I. — PRELIMINARI. — *Lemma.* — Se u e v designano due vettori noti, l'equazione vettoriale

$$(1) \quad x = u \wedge (x + v)$$

individua un unico vettore x che è definito dalla seguente relazione ⁽³⁾:

$$(2) \quad x = \frac{1}{1 + u^2} u \wedge (v + u \wedge v).$$

Corollario. — Ponendo in (1) e (2) $x = 0$ si constata la equivalenza della condizione

$$u \wedge (v + u \wedge v) = 0$$

colla condizione

$$u \wedge v = 0.$$

2. — SPOSTAMENTI RIGIDI FINITI. — Sieno O e P due punti qualunque, appartenenti a uno stesso sistema rigido. Assumiamo come *caratteristica della rigidità del sistema la conservazione della distanza di ogni coppia di punti del sistema stesso*, il che si può esprimere scrivendo

$$(3) \quad (P - O)^2 = \text{costante}.$$

Sia ΔO uno spostamento arbitrariamente attribuito al punto O , per cui questo punto passa da O in $O + \Delta O$; in virtù della suaccennata caratteristica di rigidità il punto P dovrà portarsi in una delle infinite posizioni $P + \Delta P$ tali che il corrispondente spostamento ΔP deve soddisfare alla seguente relazione:

$$(P + \Delta P - O - \Delta O)^2 = (P - O)^2,$$

(1) Cfr. ad es. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Third Edition, Cambridge, University Press, 1927, Ch. I.

(2) Cfr. MAGGI, *Geometria del movimento*, Bologna (1926), Zanichelli, § 32.

(3) La giustificazione è pressochè immediata. Mediante moltiplicazione vettoriale per u , dalla (1) si ricava

$$u \wedge x = (u \times x) u - u^2 x + u \wedge (u \wedge v),$$

ma, per l'ortogonalità di x e u , implicita nella (1), è $u \times x$ nullo, per cui risulta

$$u \wedge x = -u^2 x + u \wedge (u \wedge v).$$

Sostituendo in (1) si ottiene

$$x = -u^2 x + u \wedge (u \wedge v) + u \wedge v = -u^2 x + u \wedge (v + u \wedge v),$$

che risolta rispetto a x dà la (2), c. d. d.

dalla quale si deduce :

$$[\Delta P - \Delta O] \times [\Delta P - \Delta O + 2(P - O)] = 0.$$

Questa relazione esprime l'ortogonalità tra i due vettori entro le [], ortogonalità che si può esprimere in modo altrettanto generale, scrivendo

$$(4) \quad \Delta P - \Delta O = \frac{1}{2} \omega \wedge [\Delta P - \Delta O + 2(P - O)],$$

designando ω un vettore arbitrario.

Questa relazione è caratteristica per il ΔP quando sono assegnati ΔO e ω . È facile dedurre da essa la espressione esplicita del ΔP . Basta confrontare la (4) colla (1) e notare che esse coincidono quando si pone:

$$u = \frac{1}{2} \omega, \quad v = 2(P - O), \quad x = \Delta P - \Delta O.$$

Sostituendo nella (2) e risolvendo rispetto a ΔP si ottiene:

$$(5) \quad \boxed{\Delta P = \Delta O + \frac{4}{4 + \omega^2} \omega \wedge \left(P - O + \frac{1}{2} \omega \wedge P - O \right)},$$

formula che caratterizza gli spostamenti di tutti i punti P del sistema rigido quando sieno assegnati lo spostamento ΔO di un suo punto O e il vettore ω .

3. - INDIPENDENZA DI ω DA O. — Scelto un altro punto O_1 del sistema rigido, distinto da O, chiamiamo ω_1 il vettore tale che

$$(6) \quad \Delta P = \Delta O_1 + \frac{4}{4 + \omega_1^2} \omega_1 \wedge \left(P - O_1 + \frac{1}{2} \omega_1 \wedge P - O_1 \right)$$

definisca la stessa distribuzione di spostamenti ΔP , definita da (5), quando ci si riferisce al polo O. Per la (5) stessa dovrà essere:

$$(7) \quad \Delta O_1 = \Delta O + \frac{4}{4 + \omega^2} \omega \wedge \left(O_1 - O + \frac{1}{2} \omega \wedge O_1 - O \right).$$

Scrivendo nella (5) al posto di $P - O$, la somma equivalente $(P - O_1) + (O_1 - O)$, tenendo presente la (7), si ottiene:

$$\Delta P = \Delta O_1 + \frac{4}{4 + \omega^2} \omega \wedge \left(P - O_1 + \frac{1}{2} \omega \wedge P - O_1 \right).$$

Ma i primi membri di questa e della (6) sono identici, qualunque sia P , lo stesso dovrà aver luogo per i secondi membri, il che porta alla seguente identità in P :

$$(8) \quad \frac{4}{4 + \omega_1^2} \omega_1 \wedge \left(P - O_1 + \frac{1}{2} \omega_1 \wedge P - O_1 \right) \equiv \\ \equiv \frac{4}{4 + \omega^2} \omega \wedge \left(P - O_1 + \frac{1}{2} \omega \wedge P - O_1 \right)$$

e quindi ⁽¹⁾ $\omega_1 = \omega$; dunque ω è indipendente da O .

4. - SPOSTAMENTI INFINITESIMI. — Se ΔO e ω sono infinitesimi, di primo ordine, sono da trascurarsi gli infinitesimi di 2° ordine, ω^2 e $\omega \wedge (\omega \wedge P - O)$, la (5) va a coincidere colla formula classica degli spostamenti rigidi infinitesimi

$$\delta P = \delta O + \omega \wedge P - O.$$

5. - TRASLAZIONI, SPOSTAMENTI ROTATORI POLARI E ROTAZIONI. — Ponendo nella (5) $\omega = 0$, scende $\Delta P = \Delta O$; è il caso tipico dello spostamento rigido traslatorio..

Se, riferendoci nuovamente alla (5), ora si assume $\Delta O = 0$, ciò significa che, nello spostamento rigido, il punto O rimane fisso; la (5) stessa diviene:

$$(9) \quad \Delta P = \frac{4}{4 + \omega^2} \omega \wedge \left(P - O + \frac{1}{2} \omega \wedge P - O \right).$$

Com'era da prevedersi, scende da questa relazione che lo spostamento rigido è uno spostamento finito rotatorio polare o , in particolare, una rotazione attorno a un asse contenente il punto O e parallelo a ω ⁽²⁾.

(1) Infatti, assumendo in particolare un punto P tale che $P - O$ risulti parallelo a ω il secondo membro è nullo e quindi dev'essere nullo anche il primo, cioè:

$$\omega_1 \wedge \left(P - O_1 + \frac{1}{2} \omega_1 \wedge P - O_1 \right) = 0;$$

ma questa relazione, per il corollario del n. 1, è equivalente a $P - O_1 \wedge \omega_1 = 0$, cioè $P - O_1$ è pure parallelo a ω_1 ; dunque ω e ω_1 sono paralleli e si può scrivere $\omega_1 = h\omega$. Sostituendo in (8) e prendendo la div_P di entrambi i membri si ottiene $h^2 = 1$, cioè $h = \pm 1$; facilmente si vede poi che dev'essere $h = 1$, c. v. d.

(2) Infatti, se ci si pone il quesito: quali sono gli eventuali punti P che, come O , rimangono fissi durante lo spostamento, cioè per i quali è $\Delta P = 0$, dalla (9) scende che sono i soli punti P per cui risulta

$$\omega \wedge \left(P - O + \frac{1}{2} \omega \wedge P - O \right) = 0,$$

che, in virtù del corollario del n. 1, equivale a $P - O \wedge \omega = 0$, ovvero $P - O = k\omega$, qualunque sia lo scalare k . Se $k = 0$ è $P = O$, cioè l'unico punto che riman fisso è O

6. — SIGNIFICATO DI ω . — Riferiamoci a quest'ultimo caso e introduciamo, in ogni punto P fuori dell'asse di rotazione, tre vettori unitari trirettangoli \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} : il primo orientato come l'asse di rotazione, il secondo normale al piano determinato da P e dall'asse e il terzo

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

radiale, cioè normale all'asse e contenuto nel piano di questo e di P. Sia

$$\delta = \text{mod } P - O \wedge \mathbf{a}$$

la distanza di P dall'asse; allora avendosi

$$\omega \wedge P - O = \omega \delta \mathbf{b}, \quad \omega \wedge (\omega \wedge P - O) = \omega \delta \omega \wedge \mathbf{b} = \omega^2 \delta \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \omega^2 \delta \mathbf{c},$$

la (9) può scriversi:

$$(10) \quad \Delta P = \frac{4 \omega \delta}{4 + \omega^2} \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2} \omega \mathbf{c} \right).$$

Scende da questa

$$\text{mod } \Delta P = \frac{2 \omega \delta}{\sqrt{4 + \omega^2}}.$$

D'altra parte lo spostamento finito di P avviene lungo un arco finito di circonferenza di raggio δ e col centro sull'asse, ne segue che — chiamando d la distanza della corda ΔP dell'asse stesso — è

$$d = \sqrt{\delta^2 - \frac{(\Delta P)^2}{4}} = \frac{2 \delta}{\sqrt{4 + \omega^2}}.$$

Se infine, indichiamo con θ l'angolo al centro corrispondente all'arco s di circonferenza descritto dal punto nel passaggio da P a $P + \Delta P$, è

$$\theta = 2 \arctg \frac{|\Delta P|}{2d} = 2 \arctg \frac{\omega}{2};$$

per cui risulta l'arco

$$s = \delta \theta = 2 \delta \arctg \frac{\omega}{2};$$

dalla quale si ricava

$$\left[\omega = 2 \arctg \frac{s}{2 \delta} \right],$$

e si ha uno spostamento rotatorio polare; se $k \neq 0$ i punti che rimangono fissi sono tutti quelli di una retta contenente O e parallela a ω cioè si ha una rotazione attorno alla retta.

appare da questa relazione il significato di ω nello spostamento rigido rotatorio finito. Se s è infinitesimo, di 1° ordine, a meno di infinitesimi di 3° ordine si ottiene

$$\omega = \frac{s}{\delta},$$

che è la nota relazione relativa agli spostamenti rotatori infinitesimi.

7. - COMPONENTI CARTESIANE. — Sieno y_i ($i = 1, 2, 3$) le coordinate cartesiane del punto P, con riferimento a una terna trirettangola antioraria coll'origine in O, dimodochè y_i sono anche le componenti cartesiane del vettore $P - O$. Indichiamo con s_i le componenti di ΔP , con $s_i^{(0)}$ quelle di ΔO e con p_i quelle di ω . Ciò posto, le componenti cartesiane di $\omega \wedge P - O$ sono:

$$(11) \quad [\omega \wedge P - O]_i = p_{i+1} y_{i+2} - p_{i+2} y_{i+1},$$

colla intesa di considerare eguali gli indici che differiscono di 3, o multipli di 3; inoltre, essendo

$$\omega \wedge (\omega \wedge P - O) = (\omega \times P - O) \omega - \omega^2 (P - O),$$

si hanno le seguenti espressioni per le componenti cartesiane di questo vettore:

$$[\omega \wedge (\omega \wedge P - O)]_i = p_i \sum_{\mu}^3 p_{\mu} y_{\mu} - \omega^2 y_i, \quad \omega^2 = \sum_{\mu}^3 p_{\mu}^2.$$

Per queste e per le (11), si ottengono dalla (5) le componenti cartesiane di ΔP espresse nel seguente modo⁽¹⁾:

$$(12) \quad \boxed{s_i = s_i^{(0)} + \frac{4}{4 + \omega^2} \left[p_{i+1} y_{i+2} - p_{i+2} y_{i+1} + \frac{1}{2} \left(p_i \sum_{\mu}^3 p_{\mu} y_{\mu} - \omega^2 y_i \right) \right]}.$$

In particolare, per spostamenti infinitesimi, si ritrovano le formule classiche

$$s_i = s_i^{(0)} + p_{i+1} y_{i+2} - p_{i+2} y_{i+1}.$$

(1) Le (12) vanno a coincidere colle formule note (WHITTAKER, loc. cit., p. 7 e 8), ponendo

$$s_1^{(0)} = d \cos \alpha, \quad s_2^{(0)} = d \cos \beta, \quad s_3^{(0)} = d \cos \gamma,$$

$$p_1 = \frac{2\xi}{\chi}, \quad p_2 = \frac{2\eta}{\chi}, \quad p_3 = \frac{2\zeta}{\chi}, \quad \chi^2 = \frac{4}{4 + \omega^2}.$$

Chimica (Chimica biologica). — *La presenza nella bile di un enzima deidrogenante l'acido stearico* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. G. QUAGLIARIELLO.

La teoria della ossidazione per deidrogenazione, negli organismi animali, degli acidi grassi superiori è oggi generalmente accettata, sebbene non esista alcuna prova sperimentale di deidrogenazione enzimatica degli acidi grassi stessi ⁽³⁾. Thunberg ⁽⁴⁾, facendo agire poltiglia di fegato e di muscolo su acidi grassi inferiori, sino all'isovalerianico, ottenne risultati costantemente negativi.

Per tale motivo mi sono sembrate interessanti alcune ricerche eseguite recentemente da Tangl e Berend ⁽⁵⁾, dalle quali risulterebbe che, mettendo a dializzare in un tubo di collodio una emulsione di tristearina e trioleina alla quale si sia aggiunto un po' di succo pancreatico e di bile, nel dializzato si trovano, dopo 24 ore, acidi grassi precipitabili col bromo, cioè contenenti quattro legami etilenici.

Risultati analoghi avrebbero ottenuti, sin dal 1917, Long e Fenger, secondo quanto trovo riferito in una recente rivista sintetica di Bloor ⁽⁶⁾. Questi risultati indicherebbero che nel succo pancreatico o nella bile è contenuta una deidrogenasi attiva sugli acidi grassi superiori.

Sembrandomi più probabile che essa fosse contenuta nella bile, è in questo liquido che io ho cercato di dimostrarne la presenza.

Le esperienze sono state eseguite nel seguente modo: 30 cc. di bile addizionata con 20 cc. di miscela di fosfati 1/15 mol. a pH = 7,5, il tutto saturo di toluolo, vengono agitati in un grosso apparecchio di Barcroft e in ambiente di ossigeno a 37°C per circa 24 ore. L'assorbimento dell'ossigeno, piuttosto cospicuo all'inizio, viene in tal modo notevolmente ridotto.

Si preparano ora, in altrettanti apparecchi di Barcroft, le seguenti miscele:

(1) Presentata nella seduta del 6 novembre 1932.

(2) Ricerche eseguite nel Laboratorio di Chimica Biologica della R. Università di Napoli.

(3) OPPENHEIMER, *Die Fermente und ihre Wirkungen*. V Ed. Vol. 2, 1926. Thieme, Leipzig, p. 1343.

(4) THUNBERG, *Zur Kenntniss des intermediären Stoffwechsels und der dabei wirksamen Enzyme*. «Skand. Arch. f. Physiol.», 1920, 40, 1.

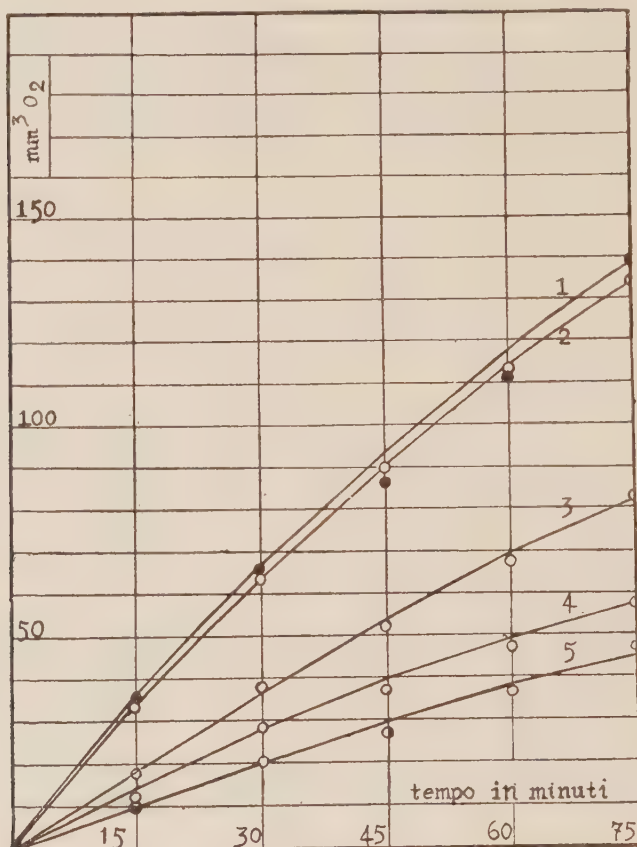
(5) TANGL u. BEREND, *Weitere Versuche über die Fettresorption durch die Desaturation der Fettsäuren*. «Bioch. Zeitschr.», 1931, 232, 181.

(6) BLOOR, *Fat Metabolism* in «Annual Review of Biochemistry», p. 272. Stanford University Press, 1932.

- 1° soluzione satura di stearato sodico 1 cm + bile diluita 4 cc.;
 2° la stessa miscela di cui sopra, tenuta per 30' a bagnomaria bollente;
 3° bile diluita 4 cc. + acqua 1 cc.

Un apparecchio serve come termobarometro.

Gli apparecchi, contenenti aria, vengono introdotti e agitati nel termostato a 37° e, ad equilibrio termico raggiunto, si cominciano a registrare le variazioni di volume.



Curva 1. - Stearato sodico + bile
 " 2. - " " + " + CO
 " 3. - " " + " + KCN 0.0002 N
 " 4. - " " + " + " 0.0005 N
 " 5. - Bile + acqua, o bile bollita + stearato sodico.

Il volume diminuisce in tutti e tre gli apparecchi, indicando un consumo di ossigeno: tale consumo è piccolo e dello stesso ordine di grandezza negli apparecchi n. 2 e 3, contenenti l'uno bile bollita + stearato sodico, l'altro bile non bollita; è notevole, invece, nell'apparecchio n. 1. La differenza nel consumo d'ossigeno tra l'apparecchio 1 e 3 indica, come è ovvio,

la quantità di ossigeno consumata dallo stearato sodico, ossigeno che non ha potuto avere altra funzione che quella di accettore di idrogeno.

È importante anche che il consumo di ossigeno si abbassa notevolmente in presenza di cianuro potassico alla concentrazione 0,0002 mol., e viene quasi del tutto inibito alla concentrazione di 0,0005 mol. Questo comportamento fa supporre che nel processo considerato, oltre alla mobilitazione dell'idrogeno, intervenga anche una attivazione dell'ossigeno. L'ossido di carbonio non mostra alcuna azione apprezzabile (Ved. figura).

È possibile che l'ossigeno consumato nelle nostre esperienze non sia servito tutto come accettore di idrogeno, ma in parte sia stato utilizzato per l'ossidazione dei doppi legami formatisi per la deidrogenazione, ma ciò non ha importanza per il problema che ci interessa.

Le ricerche vengono proseguite nell'intento di ottenere preparati più puri di deidrogenasi dalla bile stessa o dal fegato. Ricordo a questo proposito che deidrogenasi nel fegato sono state già messe in evidenza: l'alcool-deidrogenasi e la succinodeidrogenasi da Battelli e Stern⁽¹⁾ e la citrodeidrogenasi da Bernheim⁽²⁾, ma data la stretta specificità di questo tipo di enzimi, esse non hanno nulla a che fare con l'enzima di cui noi intendiamo occuparci.

Le stesse ricerche fatte con la bile si stanno facendo anche con succo pancreatico, nell'intento di vedere se anche in questo secreto è contenuto una deidrogenasi attiva sugli acidi grassi superiori, oppure se la sua presenza nelle ricerche di Long e Fenger e di Tangl e Berend, è richiesta soltanto per l'idrolisi del grasso.

(1) BATTELLI e STERN, *Die Alkoholoxydase in den Tiergeweben*. «Bioch. Zeit.», 1910, 28, 145. *Die Oxydation der Bernsteinsäure durch Tiergewebe*, Ibidem, 30, 172.

(2) BERNHEIM, *The specificity of the dehydrases*. «Bioch. Journ.», 1928, 22, 1178.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali.* Nota I⁽¹⁾ di R. CACCIOPOLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Numerose questioni esistenziali di Analisi conducono allo studio di corrispondenze funzionali, in vista sopra tutto della loro inversione, locale o completa; p. es la risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione a derivate parziali (di tipo ellittico)

$$L[u] = f,$$

cioè la determinazione della funzione u che, assumendo al contorno certi valori prescritti, riduca l'espressione $L[u]$ alla data funzione f , consiste essenzialmente nell'inversione della corrispondenza che ad ogni assegnata funzione u ne associa due altre, $L[u]$ e la funzione cui si riduce u al contorno; così pure il problema dell'esistenza di integrali prossimi ad un integrale dato, deducibili da questo per piccole variazioni dei valori al contorno, è un problema di inversione locale.

L'inversione locale delle corrispondenze funzionali è argomento della teoria delle funzioni implicite di linee⁽²⁾. Condizioni supplementari che permettano di risalire all'invertibilità *in grande* si lasciano poi facilmente assegnare, e tradurre in criterî pronti alle applicazioni⁽³⁾. Mi propongo qui, premessa un'analisi dei criterî pratici di invertibilità nella loro forma più generale, di indicare alcune di queste applicazioni, per mostrare lo strumento all'opera sopra casi tipici. Si vedrà così come parecchi procedimenti e risultati di ricerche precedenti (fra le quali ricordiamo quelle di Bernstein e di Lichtenstein), sulle equazioni non lineari integrali e a derivate parziali, si inquadrino in un metodo unico, partecipe della semplicità e generalità delle vedute dell'Analisi funzionale.

1. Consideriamo (ciò che basta già certamente per un buon numero di applicazioni) due spazi funzionali (o astratti) lineari, metrici, completi, Σ e Σ' , di punti generici φ e φ' . Senza insistere sugli assiomi che presiedono

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(2) VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. IV; HILDEBRANDT e GRAVES, «Trans. Am. Math. Soc.», vol. 29 (1927).

(3) V. un mio lavoro nei «Rend. del Sem. dell'Univ. di Padova», III (1932).

alla definizione di simili spazî, ricordiamo solo che essi hanno proprietà analoghe a quelle degli ordinari spazî vettoriali a un numero finito di dimensioni, che la distanza tra due punti φ_1 e φ_2 si definisce mediante una *norma* (distanza dallo *zero*) $\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ della loro differenza, e che si suppone valido il criterio di convergenza di Cauchy.

Sia data una corrispondenza

$$\varphi' = T[\varphi]$$

tra Σ e Σ' : la supponiamo continua e differenziabile, cioè tale che posto

$$\delta\varphi' = \delta T[\varphi] = T[\varphi + \delta\varphi] - T[\varphi],$$

sussista per $\delta\varphi'$ la formola di decomposizione

$$\delta\varphi' = D[\varphi, \delta\varphi] + R[\varphi, \delta\varphi],$$

dove D è un'operazione lineare (cioè continua e distributiva) in $\delta\varphi$, e $\|R\|$ sia infinitesima di ordine superiore rispetto a $\|\delta\varphi\|$, sicchè, per dire più concisamente, si abbia

$$\delta\varphi' = D[\varphi, \delta\varphi]$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Se la corrispondenza tra ω e ω' (variabili in Σ e Σ')

$$\omega' = D[\varphi, \omega]$$

è invertibile (completamente) ne indicheremo l'inversa con

$$\omega = \Delta[\varphi, \omega'].$$

Ci occorrono ancora ipotesi di continuità sul differenziale analoghe a quelle su cui si fonda la dimostrazione del classico teorema dello jacobiano, che ci proponiamo di estendere. Sostanzialmente, il funzionale $D[\varphi, \omega]$ andrà supposto continuo in φ (uniformemente al variare di ω in un campo limitato); dall'invertibilità di D per un particolare punto φ seguirà l'invertibilità stessa in un intorno di φ , e $\Delta[\varphi, \omega']$ sarà anch'esso continuo rispetto a φ .

Ciò premesso, il teorema generale di inversione locale è il seguente:

Se per un particolare punto φ_0 l'operazione lineare $D[\varphi_0, \omega]$ ammette inversa, la corrispondenza T è invertibile fra due intorni convenientemente ristretti dei punti φ_0 e $\varphi'_0 = T[\varphi_0]$.

Ci si può ricondurre al metodo delle approssimazioni successive trasformando come segue l'equazione della corrispondenza: da

$$\varphi' - T[\varphi] = 0$$

si ricava

$$\Delta[\varphi_0, \varphi'] - \Delta[\varphi_0, T[\varphi]] = 0$$

donde, posto

$$\Delta[\varphi_0, \varphi'] = \psi, \quad \varphi - \Delta[\varphi_0, T[\varphi]] = S[\varphi],$$

si ottiene l'equazione equivalente

$$\varphi = \psi + S[\varphi].$$

Il secondo membro di quest'ultima ha evidentemente, per $\varphi = \varphi_0$, differenziale nullo rispetto a φ . A questo punto si è ricondotti all'inversione di una trasformazione fra spazi sovrapposti, in condizioni analoghe a quelle che nel caso ordinario permettono l'applicazione delle approssimazioni successive; e la dimostrazione si sviluppa parallelamente a quella di Goursat.

2. Ove occorra, come spesso, assicurare l'invertibilità in grande, riconoscere cioè nella T una corrispondenza biunivoca e completa fra Σ e Σ' , il precedente teorema non fornisce ancora una condizione sufficiente. Si giunge facilmente ad una forma grezza di questa, ma già utile nelle applicazioni, ragionando così: Dall'ipotesi dell'invertibilità locale segue subito che l'immagine di Σ in Σ' è un insieme aperto, cioè composto esclusivamente di punti interni; questo insieme esaurirà Σ sempre che risulti contemporaneamente chiuso, che contenga cioè tutti i suoi punti d'accumulazione. Quest'ultima condizione è verificata se ogni successione di Σ trasformata da T in una successione convergente è compatta ⁽¹⁾, o semplicemente contiene una successione convergente, poichè al limite di questa corrisponderà il limite della successione in Σ' , e apparterrà quindi all'immagine di Σ ; stabilito poi che ogni punto di Σ' ammette un corrispondente nella T^{-1} , l'unicità di questo è conseguenza del fatto che in Σ' non possono darsi punti di diramazione, attesa l'invertibilità locale ⁽²⁾.

Talvolta occorre provare l'invertibilità in grande di T , non in tutto lo spazio Σ' , ma soltanto nell'intorno di una varietà lineare V' di questo, in modo da stabilire l'esistenza di una ben determinata varietà V di Σ , trasformata da T in V' . Così p. es. la trasformazione piana

$$x' = x + y, \quad y' = \frac{x^2}{2} + xy + y^3 - 4y^2 + 6y$$

non è completamente invertibile, ma pone in corrispondenza biunivoca le due linee

$$\frac{x^2}{2} + xy + y^3 - 4y^2 + 6y = 0, \quad y' = 0,$$

di cui la prima è l'unica immagine inversa della seconda.

(1) Ricordiamo che si dice compatto un insieme di cui ogni porzione (costituita da infiniti punti) contiene una successione convergente.

(2) V. il mio lavoro citato.

I criterî precedenti restano ancora applicabili in questo caso: soltanto basterà verificare che l'inversione locale è possibile nell'intorno dei punti di V' e considerare poi tra le successioni convergenti di Σ' quelle contenute in V' ; inoltre occorrerà però stabilire che almeno un punto di V' è corrispondente nella T di un punto di Σ , e di uno solo. La varietà V si costruirà allora a partire da quest'ultimo punto, mediante successivi prolungamenti per inversioni locali.

Vedremo ora degli esempi concreti di questi tre procedimenti: inversione locale, inversione completa, inversione nell'intorno di una varietà.

3. Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione

$$(1) \quad \Delta_2 z = f(x, y, z, p, q);$$

$$\left(\Delta_2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

il campo C assegnato nel piano xy sia limitato da una curva Γ a curvatura continua (o da più curve siffatte), e i valori al contorno siano quelli di una funzione $g(s)$ dotata delle prime due derivate continue rispetto all'arco s di Γ .

Per semplicità intenderemo dapprima il Δ_2 definito conformemente alla generalizzazione di Petrini:

$$\Delta_2 z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [p(x+h, y) + q(x, y+h) - p(x, y) - q(x, y)];$$

quanto alla funzione f , basterà supporla dotata di derivate parziali prime continue rispetto a z, p, q .

Come spazio Σ assumeremo quello delle funzioni $z(x, y)$ continue in C (contorno incluso) con le loro prime derivate e con il Δ_2 , e dotate inoltre su Γ di derivata seconda continua rispetto ad s : la distanza tra due punti di Σ potrà definirsi mediante l'espressione

$$\max |\Delta_2 z_1 - \Delta_2 z_2| + \max |\zeta_1 - \zeta_2| + \max \left| \frac{d^2 \zeta_1}{ds^2} - \frac{d^2 \zeta_2}{ds^2} \right|,$$

$\zeta(s)$ essendo la funzione cui si riduce $z(x, y)$ su Γ .

Lo spazio Σ' sarà quello delle funzioni $\mu(x, y)$ continue in C associate alle funzioni $\omega(s)$ continue su Γ con due derivate; come distanza tra due punti di Σ' assumeremo

$$\max |\mu_1 - \mu_2| + \max |\omega_1 - \omega_2| + \max \left| \frac{d^2 \omega_1}{ds^2} - \frac{d^2 \omega_2}{ds^2} \right|^{(1)}$$

(1) Si noti che alla stregua delle definizioni di distanza adottate, al tendere dei punti (z) e (μ, ω) agli z eri di Σ, Σ' rispettivamente, convergono uniformemente verso zero le funzioni $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{d\omega}{ds}$.

Infine la trasformazione T di Σ in Σ' sarà quella definita dalle formole

$$\mu(x, y) = \Delta_2 \zeta - f(x, y, \zeta, p, q),$$

$$\omega(s) = \zeta(s).$$

Differenziando la prima, con la caratteristica δ , si ottiene

$$\Delta_2 \delta \zeta - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \delta \zeta = \delta \mu,$$

e si è così condotti, per decidere dell'invertibilità locale in corrispondenza di un punto ζ di Σ , allo studio del problema di Dirichlet per l'equazione lineare

$$(2) \quad \Delta_2 u - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} u = k(x, y),$$

con secondo membro continuo e valori al contorno due volte derivabili. L'equazione omogenea associata alla (2) è la cosiddetta *equazione a variazioni* della (1).

Ora è chiaro che, con le nostre definizioni degli spazi Σ e Σ' e le conseguenti definizioni di distanza, *la risolubilità del detto problema di Dirichlet è perfettamente equivalente alla condizione per l'invertibilità della trasformazione T intorno ai punti (ζ) e (μ, ω) .*

È stabilito così il seguente risultato:

Se la funzione $\zeta_0(x, y)$ soddisfa la (1) e si riduce su Γ ad una funzione (due volte derivabile) $\zeta_0(s)$, e se corrispondentemente l'equazione a variazioni non ammette soluzioni proprie nulle al contorno (autosoluzioni), l'equazione

$$\Delta_2 \zeta = f(x, y, \zeta, p, q) + \varepsilon(x, y)$$

è univocamente risolubile coi valori al contorno

$$\zeta_0(s) + \sigma(s),$$

mediante funzioni di un intorno di $\zeta_0^{(1)}$, purché $\varepsilon(x, y)$ e $\sigma(s)$ siano abbastanza piccole, la prima di ordine 0 e la seconda di ordine 2.

4. La risolubilità del problema di Dirichlet per l'equazione (2) è assicurata quando p. es.

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \equiv 0.$$

(1) La nozione di intorno è beninteso relativa alla definizione di distanza adottata in Σ .

Supponiamo tale condizione sempre verificata, e chiediamoci sotto quali ulteriori ipotesi possa affermarsi la risolubilità in grande, cioè con dati al contorno arbitrari, del problema di Dirichlet per la (1).

Si tratta ora dell'inversione di T intorno alla varietà $\mu = 0$ dello spazio Σ' . Innanzi tutto dovrà esistere almeno un integrale della (1) (l'unicità essendo assicurata dall'ipotesi precedente $f_{\lambda} \geq 0$); poi ogni successione di punti di Σ che la T converta in una successione convergente di punti della varietà $\mu = 0$ dovrà contenere una successione convergente. Quest'ultima circostanza sarà certamente verificata se *gli integrali della (1) si lasciano limitare a priori, con le loro prime derivate, in funzione esclusivamente dei dati al contorno, e propriamente della distanza $\max |\omega| + \max |\omega''|$ del punto $(0, \omega)$ dall'origine di Σ'* ; infatti in tal caso le dette successioni di Σ risultano compatte, per essere le funzioni χ equicontinue con le derivate prime nonchè (in virtù dell'equazione) con i Δ_2 .

Se poi per ogni punto (χ) di Σ si possono limitare $|\chi|, |p|, |q|$ in funzione della distanza di (μ, ω) dall'origine di Σ' , cioè della quantità

$$\max |\mu| + \max |\omega| + \max |\omega''|^{(1)},$$

sarà sempre risolubile il problema di Dirichlet per l'equazione più generale della (1)

$$(1') \quad \Delta_2 \chi = f(x, y, \chi, p, q) + \mu(x, y).$$

La T risulta allora una corrispondenza biunivoca e completa fra Σ e Σ' . Come caso particolare semplicissimo consideriamo l'equazione

$$\Delta_2 \chi = F(\chi) + G(x, y, p, q)$$

con $F' \geq 0$ e G limitata. Dimosteremo che con $|\mu|$ e $|\omega|$ si conserva limitato anche $|\Delta_2 \chi|$, sicchè la condizione precedente si troverà verificata.

Infatti, escluso naturalmente che la funzione F sia limitata, supponiamola non limitata superiormente; in tal caso, noti due limiti per $|\mu|$ e per $|\omega|$, si potrà assegnare un limite superiore per χ , poichè altrimenti esisterebbero funzioni χ con massimi in punti ove $\Delta_2 \chi > 0$. Analogamente si prova l'esistenza di un limite inferiore per χ , supposta F inferiormente non limitata; e ne consegue che in ogni caso $|\Delta_2 \chi|$ soggiace alla limitazione prevista.

Abbiamo operato sin qui col Δ_2 generalizzato; possiamo ora aggiungere che per un integrale della (1) il Δ_2 esiste anche secondo la definizione ordinaria, quando f abbia rispetto a tutti i suoi argomenti derivate prime continue. Infatti la funzione

$$f[x, y, \chi(x, y), p(x, y), q(x, y)] = \varphi(x, y)$$

verifica una condizione di Hölder implicante l'esistenza e la continuità delle derivate seconde di χ , come segue da noti risultati della teoria del potenziale.

(1) Una limitazione per $|\Delta_2 \chi|$ sarebbe equivalente.

Matematica. — *Sur les points (α), au sens de M. Georges Durand.* Nota⁽¹⁾ di L. CHAMARD, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La présente Note, qui emprunte les définitions, les notations et la bibliographie données par M. Georges Bouligand dans un récent ouvrage⁽²⁾, a pour but de résumer les résultats de nos recherches sur le problème suivant: Soit donné un ensemble ponctuel fermé E, avec M. Georges Durand, auteur de cette notion, appelons point (α) tout point extérieur à E dont les projetantes sur cet ensemble sont incluses dans un cône strictement convexe. Il s'agit d'obtenir des critères permettant de particulariser soit l'ensemble E, soit la position du point M relativement à E, de manière que M soit un point (α). Diverses questions se rattachant naturellement à cet ordre d'idées seront signalées à cette occasion.

I.

En prenant pour E une figure convexe, nous avons montré ailleurs⁽³⁾ que tout point extérieur à cet ensemble est ordinaire, c'est-à-dire n'a qu'une projetante. Plus généralement:

THÉORÈME I. — *Si l'enveloppante convexe K (E) de E a des points intérieurs, tout point extérieur à K (E) est, relativement à E, un point (α).*

À côté du résultat de M. G. Bouligand suivant lequel, vu la semi-continuité d'inclusion des projetantes⁽⁴⁾, l'ensemble des points (α) relatifs à E est ouvert, j'ai établi cette proposition:

THÉORÈME II. — *M étant un point (α), situé à la distance ρ de E, il appartient à la frontière d'un domaine exclusivement composé de points (α), domaine qui s'obtient ainsi: Autour de l'axe MH du plus petit cône circulaire droit de sommet M et enfermant les projetantes de M, on fait tourner un arc de cercle de rayon $\frac{\rho}{2}$ et dont les extrémités sont M et H.*

En particulier, si M est ordinaire, l'intérieur de la sphère décrite sur la projetante de ce point comme diamètre est exclusivement formé de points (α).

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1932.

(2) *Introduction à la Géométrie Infinitésimale directe*, Paris, Vuibert, 1932.

(3) L. CHAMARD, *Sur la construction de Cantor-Minkowski* (« Bull. Acad. Polonaise Sc. et L. », Séance du 9 nov. 1931).

(4) G. BOULIGAND, *Sur quelques points de la Théorie des Ensembles*, « C. R. », t. 194, n. 12, mars 1932.

II.

Sans particulariser l'ensemble E , cherchons la plus petite valeur de k telle que tout point dont la distance à E dépasse le produit k diam. E soit un point (α) ⁽¹⁾. A cet effet, il convient de classer les points suivant la distribution de leurs projections en appelant : (a) tout point ayant au plus deux projections, (b) tout point ayant plus de deux projections toutes coplanaires, (c) tout autre point.

THÉORÈME III. — *Etant donné un ensemble de diamètre d , si l'on pose $\rho > \frac{d}{2}$, tout point (a) situé à la distance ρ de E est un point ordinaire, et à ce titre, un point (α) .*

LEMME IV (DU TRIANGLE). — *Le diamètre de l'ensemble des sommets d'un triangle inscrit dans une circonférence de rayon r , et dont les sommets ne sont pas localisables sur une même moitié de cette circonférence est au moins égal à $r\sqrt{3}$.*

THÉORÈME V. — *Etant donné un ensemble E de diamètre d et une longueur $\rho > \frac{d}{\sqrt{3}}$ tout point (b) situé à la distance ρ de E est un point (α) .*

LEMME VI. (DU TÉTRAÈDRE). — *Le diamètre de l'ensemble des sommets d'un tétraèdre inscrit dans une sphère et contenant le centre de cette sphère est au moins égal au côté du tétraèdre régulier inscrit dans la même sphère.*

THÉORÈME VII. — *Etant donné un ensemble E de diamètre d , si l'on choisit une longueur ρ telle que le côté du tétraèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon ρ dépasse le diamètre d de l'ensemble, tout point (c) situé à la distance ρ de E est un point (α) .*

Les propositions précédentes entraînent la suivante :

THÉORÈME VIII. — *Pour qu'à la distance ρ d'un ensemble E de diamètre d il n'existe que des points de la classe α , il suffit que soit satisfaite la relation*

$$\rho > \frac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

III.

Voici maintenant un cas où deux hypothèses de nature différente, du moins en apparence, assurent encore l'existence exclusive de points (α) à la distance ρ de E .

M. Georges Durand a montré que tout point (α) est un point frontière extérieur ⁽²⁾. La réciproque n'est pas vraie. Mais :

(1) G. DURAND, *Sur une généralisation des surfaces convexes*. Thèse. Paris, 1931. (Journal de Villat), n. 59, p. 45.

(2) G. DURAND, loc. cit., n. 36, p. 27.

THÉORÈME IX. — *Etant donné un ensemble E de diamètre d, si l'on choisit une longueur $\rho > \frac{d}{\sqrt{3}}$, tout point de la frontière extérieure de E_ρ est un point (α).*

Notons d'ailleurs que, dans les cas envisagés précédemment, les frontières E_ρ peuvent jouir d'autres propriétés que celles d'être exclusivement composées de points (α).

J'ai en effet, montré, dans mon travail déjà cité, que la Construction de Cantor-Minkowski conserve la convexité (en d'autres termes: Toute surface C. M. déduite d'une figure convexe est elle-même convexe). D'autre part, M. Georges Bouligand a signalé que, pour $\rho \geq d$ toute surface C. M. ρ - distante d'un ensemble de diamètre d est de même nature topologique que la surface d'une sphère ⁽¹⁾. On peut dire plus:

THÉORÈME X. — *Toute surface isodistante d'un ensemble et qui ne pénètre pas dans l'enveloppante convexe de cet ensemble est homéomorphe à la surface d'une sphère. (Si l'enveloppante convexe précédente a des points intérieurs).*

IV.

Pour obtenir d'autres résultats, j'étudierai, à titre auxiliaire, la distance d'un point intérieur d'une figure convexe E à l'ensemble complémentaire C(E), ce qui fournira des propositions intéressantes en elle-mêmes.

THÉORÈME XI. — *Le front ρ de C(E) est exclusivement formé de points de la frontière f(E) de E munis au plus d'un plan d'appui de E.*

Avant de compléter ce résultat, il est nécessaire d'établir une proposition très simple. Voici d'abord une remarque:

E étant un ensemble quelconque et ρ une longueur donnée, toute sphère S° centrée en un point de $C(E_\rho)$ est intérieure à C(E). (On peut ici intervertir E et C(E)).

Cette remarque facilite la démonstration du Théorème suivant:

THÉORÈME XII. — *E étant une figure convexe, si l'on effectue la construction C. M. avec le rayon ρ sur C(E) (ρ étant tel que E ne soit pas entièrement recouvert par $[C(E)]_\rho$), par tout point M situé à la distance ρ de C(E), passe un plan d'appui de C $\{[C(E)]_\rho\}$ autrement dit $C\{[C(E)]_\rho\}$ est convexe.*

La frontière $(F_i)_\rho$ de $[C(E)]_\rho$ apparaît comme une surface convexe quasi-parallèle à f(E). Cette surface n'a pas nécessairement un plan tangent partout ⁽²⁾. Rappelons que la Construction C. M. effectuée sur E fournit

(1) G. BOULIGAND, loc. cit., n. 97. Voir aussi: «C. R.», 30 mai 1932, la structure d'une surface isodistante ne pénétrant pas dans la sphère minima contenant E.

(2) L'expression quasi-parallèle est préférable à parallèle: elle rappelle qu'en effectuant, avec le rayon ρ la construction C. M. sur le complémentaire de $[C(E)]_\rho$, la frontière de l'ensemble ouvert obtenu ne coïncide pas nécessairement avec f(E).

aussi une surface convexe à plan tangent partout. Le résultat de la Construction C. M. sur $f(E)$ est donc la somme d'une surface convexe extérieure à plan tangent partout, et d'une surface convexe intérieure, sons plus.

Dans le cas particulier de deux dimensions et d'une courbe de départ ayant une tangente partout, la construction C. M. précédente a été appelée par Sophus Lie « Dilatation ». Cette dilatation a été étudiée par M. M. Charles Jordan et Raymond Fiedler ⁽¹⁾.

Nous allons maintenant déterminer une valeur remarquable de ρ pour laquelle la théorie précédente précise des propositions déjà connues des régions convexes. A partir d'une certaine valeur de ρ , $C\{[C(E)]_e\}$ est vide (par exemple pour $\rho > d$). Or, cet ensemble est fermé. Il existe donc un tel ensemble irréductible, c'est-à-dire dépourvu de points intérieurs (on sait, en effet, que tout accroissement donné à ρ fera disparaître cet ensemble). Soit r la valeur de ρ correspondante. Les points de $C\{[C(E)]_r\}$ étant des points frontières intérieurs, ils ne sauraient appartenir à la classe α relativement à $C(E)$. On dit qu'ils sont centres de *sphères inscrites* dans E . (C'est-à-dire des sphères de rayon maximum dont tous les points appartiennent à E).

Il résulte de ce qui précède:

THÉORÈME XIII. — *L'ensemble des centres des sphères inscrites dans une figure convexe est sans points intérieurs (C'est donc un polygone convexe, un segment ou un point unique)* ⁽²⁾.

THÉORÈME XIV. — *Tout point intérieur à une figure convexe qui n'est pas centre d'une sphère inscrite est un point (α).*

V.

Considérons une surface fermée convexe Σ . Nous avons montré plus haut qu'un point pris à l'intérieur peut avoir des projections arbitrairement réparties sur la surface de la sphère. Le centre de toute sphère inscrite ne peut avoir des projections localisables sur une calotte. En particulier, si la

(1) *Contribution à l'étude des courbes convexes et de certaines courbes qui s'y rattachent*, Paris, Hermann, 1912, n. 16.

(2) M. G. BOULIGAND a bien voulu me faire remarquer qu'il est intéressant de rechercher directement l'ensemble des centres des sphères inscrites dans la figure convexe E . Soit S^q une sphère contenue dans E . L'enveloppante convexe d'un nombre quelconque de sphères telles que S^q est, elle aussi, contenue dans E et peut être considérée comme coïncidant avec la réunion des sphères qu'elle enveloppe. On en déduit que les centres de ces sphères forment eux-mêmes une figure convexe Σ^q . L'inégalité $\rho < \rho'$ entraîne $\Sigma^q > \Sigma^{q'}$. Le plus petit Σ^r des ensembles Σ^q , qui est dépourvu de points intérieurs, est l'ensemble de centres des sphères inscrites dans E . C'est un polygone convexe, un segment, ou un point unique. Désignons le par N . La réunion N_r des sphères inscrites dans E a pour frontière une surface convexe à plan tangent continu, en vertu des résultats exposés dans notre Note à l'Académie de Cracovie, surface qui est, en général, distincte de $f(E)$.

sphère inscrite est unique, son centre est un point (γ) isolé de l'ensemble des points situés à la distance ρ de Σ .

Effectuons la représentation sphérique ⁽¹⁾ de Σ sur la sphère d'appui S_M^ρ de centre M , intérieure à Σ et de rayon ρ . Les projections de M sont des points doubles de la transformation. Ces remarques nous conduisent à l'énoncé suivant :

THÉORÈME XV. — *Pour qu'un sous-ensemble E d'une surface convexe fermée ne donne lieu, à son intérieur, qu'à des points (α), il suffit qu'il soit formé par une rondelle de Σ dont l'image sphérique soit localisable sur une calotte moindre qu'un hémisphère.*

Nous aurons maintenant recours à certaines notions dues à M. Denjoy ⁽²⁾. L'enveloppante convexe $K(E)$ d'un domaine E est la borne convexe d'ordre zéro de la frontière $f(E)$ de E , et les points de E situés sur la frontière de $K(E)$, (c'est-à-dire les points du front $-\infty$ selon la terminologie de M. G. Bouligand), sont les points périphériques d'ordre zéro de $f(E)$. Considérons un constituant de l'ensemble des points de $f(E)$ qui ne sont pas périphériques d'ordre zéro. L'enveloppante convexe de ce constituant est une borne convexe d'ordre un de $f(E)$. Les points du front $-\infty$ du composant envisagé sont des points périphériques d'ordre un de $f(E)$ correspondant à ce composant.

Du Théorème XV et du Théorème I, on déduit le suivant :

THÉORÈME XVI. — *Si la frontière d'un ensemble E est une surface fermée n'ayant que des bornes convexe d'ordre au plus égal à un et si chaque constituant de l'ensemble des points périphériques d'ordre un a une image sphérique localisable sur une calotte moindre qu'un hémisphère, tout point extérieur appartient à la classe α .*

(1) G. BOULIGAND, *Introd. à la Géométrie Infin. Dir.*, n. 125.

(2) *Sur les Courbes de M. Jordan*, « C. R. », t. 166, n. 5, 4 février 1918, p. 207

Matematica (Geometria). — *Ancora sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale.* Nota ⁽¹⁾ di S. CHERUBINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

4⁽²⁾. Quando han luogo le alternative $b)$ o $c')$ si ha $\bar{\rho} = 3$ e la matrice è senz'altro impura, perchè $\tau_{11} = \tau_{22} = 0$ oppure $\tau_{11} = 0$ ($\tau_{22} = 0$). I restanti 2 casi in cui $\bar{\rho} = 3$, cioè quelli dell'alternativa $a'')$, che è ancora a matrice sempre impura ($\tau_{12} = \tau_{21} = 0$) e quello dell'alternativa $d')$, possono ridursi l'uno all'altro mediante isomorfismi. Invero, dal secondo caso si passa al primo operando una trasformazione di cicli primitivi di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, ove $h = \begin{pmatrix} -\nu r', & \nu n s \\ \mu s, & -\mu r \end{pmatrix}$ e μ, ν sono interi arbitrari, non nulli. Con tal trasformazione si lascia invariato il divisore n e si ottiene una matrice del primo caso, con $\frac{\tau_{11}}{\tau_{22}} = n \cdot \frac{\nu}{\mu}$.

Se ne deduce, col Lefschetz ⁽³⁾, che il valore $\bar{\rho} = 3$ si ha soltanto per matrici impure, cioè quando la superficie ammette integrali ellittici, che qui sono necessariamente in numero infinito, nessuno o ciascuno a moltiplicazione complessa (tipi VIII e IX dello Scorza ⁽⁴⁾).

5. Detto k l'indice di singolarità (complesso) della matrice Ω , ossia della superficie, è manifestamente $\bar{k} \leq k$.

Ebbene, vogliamo dimostrare che:

Per una superficie iperellittica V_2 è sempre $k \leq \bar{k} + 1 = \bar{\rho}$ e si ha $k = \bar{k} = \bar{\rho} - 1$ oppure $k = \bar{k} + 1 = \rho$, secondo che il determinante $|\tau|$, della matrice $\omega^{(N)}$ appartenente a V_2 , non è od è un numero razionale.

Ed infatti, se A è una forma riemanniana alternata di Ω , lo è anche $A^* = I_0 A I_0$, quindi sono tali anche

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \cdot (A - A^*) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b_{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \frac{1}{2} \cdot (A + A^*) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

e risulta $A = \bar{A} + A'$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(2) La numerazione degli articoli e delle formule è fatta in continuazione di quella della Nota: *Sulla classificazione delle superficie iperellittiche*, ecc... (Questi « Rendiconti », vol. XVI, fasc. 7-8, pp. 285-290).

(3) *Real hypersurfaces* [« Proc. of Nat. Acad. of Sciences », vol. 5 (1919)], n. 2.

(4) SCORZA G., *Intorno alla teoria* [« Rend. Pal. », XII (1916)], p. II, § 3.

Se A' non è nulla, le matrici interiere $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$ devono soddisfare, causa la prima delle (4), alla relazione $\alpha = e\tau \cdot \delta \cdot \tau e$, quindi è: $|\tau|^2 = \frac{a^2}{n^2 d^2}$, ossia $|\tau| = \pm \frac{a}{nd}$.

Viceversa, posto $n|\tau| = \frac{r}{s}$, con r, s intieri fra loro primi, per avere una forma come A' , occorre e basta prendere $a = \mu r$, $d = \pm \mu s$, ove μ è un intiero arbitrario.

Dunque, se $|\tau|$ è razionale, A' non è nulla e dipende da un sol parametro, onde, osservando che \bar{A} è trasformata in sè dalla simmetria di matrice I_0 mentre ogni A è somma di una \bar{A} e di una A' , si ha che il numero delle forme A linearmente indipendenti supera di un'unità quello delle forme \bar{A} .

Se invece $|\tau|$ non è razionale, A' è necessariamente nulla e le forme A coincidono con le \bar{A} .

Nel caso $\bar{\rho} = 3$, la superficie appartiene dunque al tipo VIII od al tipo IX dello Scorza, secondo che $|\tau|$ non è od è razionale.

6. Quando $\bar{\rho} = 2$ e $|\tau|$ è razionale, tenendo presente la discussione del caso d''') ed il numero precedente, si ha subito che le forme riemanniane alternate di Ω sono tutte e sole quelle date dalla formola

$$(15) \quad A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & vr & b_{11} & -\mu r'' \\ -vr & 0 & \mu r' & nb_{11} - \mu r''' \\ \hline -b_{11} & -\mu r' & 0 & \pm vs \\ \mu r'' & -nb_{11} + \mu r''' & \mp vs & 0 \end{array} \right)$$

ove b_{11}, μ, v sono tre parametri intieri arbitrari.

Lo pfaffiano di A è dato da $\delta = \pm rs \cdot v^2 - (nb_{11}^2 - r''' b_{11} \mu + r' r'' \mu^2)$ che è una forma quadratica nelle tre variabili b_{11}, μ, v , la quale, ad es., ogni qual volta si ha $r'''^2 = 4nr' r''$, mentre il prodotto ed il quoziente di $\pm rs$ per n non sono quadrati di numeri razionali, non può mai annullarsi per valori intieri delle variabili.

In questa ipotesi, le forme A risultano tutte non degeneri quindi Ω non può essere impura⁽¹⁾ dal che segue che i due tipi del caso $\bar{\rho} = 2$, $k = \rho = 2$, non sono *sempre* fra loro isomorfi.

Osserviamo però che, dati gl'intieri r, s, r', r'', r''' , le (sole) relazioni cui dovrà soddisfare la matrice reale simmetrica τ sono le seguenti:

$$(15) \quad r' \cdot \tau_{11} + nr'' \cdot \tau_{22} = r''' \cdot \tau_{12}, \quad ns(\tau_{11} \tau_{22} - \tau_{12}^2) = r, \tau_{11} \tau_{22} - \tau_{12}^2 \neq 0$$

(1) SCORZA, Mem. cit. (4), p. I, nn. 32 e 41 b), pp. 34 e 38.

sicchè, per legittimare la conclusione, occorre assicurarsi della compatibilità di queste relazioni con le ipotesi sopra indicate.

Eliminando τ_{22} , e ponendo $r'''^2 = 4nr'r''$ le condizioni di risolubilità di queste (15), con valori reali delle τ_{ij} , si riducono ad $rs=0$, $-4rr'r''s \geq 0$, le quali sono ben compatibili con le ipotesi stesse.

Se ne deduce che, il caso $\rho = 2$, $k = \bar{k} + 1 = 2$ può presentarsi sia pel tipo VII, che pel tipo VIII dello Scorza, ossia per superficie a matrici pure (cioè senza integrali ellittici) e per superficie a matrici impure e con infiniti integrali ellittici (nessuno a moltiplicazione complessa).

7. Se $\bar{\rho} = 2$, ma $|\tau|$ non è razionale, quindi $k = \bar{k} = 1$, nella (15) bisogna necessariamente porre $v = 0$ ed il pfaffiano delle forme riemanniane alternate di Ω è $\delta = -(nb_{11}^2 - r''' b_{11} \mu + r' r'' \mu^2)$. Questa forma quadratica nelle due variabili b_{11} , μ si annulla per valori interi di esse solo quando $r'''^2 - 4nr'r''$ è nullo o è quadrato di un numero razionale. Perciò, la Ω può essere tanto pura che impura. In quest'ultimo caso, però, la superficie non possiederà che due (soli) integrali ellittici.

Se Ω è pura, V_2 apparterrà ad uno dei due tipi II o V della classificazione dello Scorza, se è impura ad uno dei tre tipi III, IV o VI. In quest'ultimo caso, la superficie possiederà due integrali ellittici e si prova subito la effettiva possibilità di tutti i tre tipi, osservando che, potendo aversi $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$, i due numeri τ_{11} e τ_{22} possono prendersi entrambi, uno solo, o nessuno radici di un'equazione quadratica a coefficienti interi.

Più riposto è l'esame dell'altro caso (1).

8. Se $\bar{\rho} = 1$ e $|\tau|$ non è razionale, si ha $k = \bar{k} = 0$ e la superficie appartiene necessariamente al tipo I dello Scorza, quindi Ω è pura.

Se $\bar{\rho} = 1$ e $|\tau|$ è razionale, quindi $k = \bar{k} + 1 = \rho = 1$, le forme riemanniane alternate di Ω sono compendiate nella formola

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & vr & b_{11} & 0 \\ -vr & 0 & 0 & nb_{11} \\ -b_{11} & 0 & 0 & \mp vs \\ 0 & -nb_{11} & \mp vs & 0 \end{array} \right)$$

di pfaffiano $\delta = \pm rsv^2 - nb_{11}^2$, il quale si annulla per valori interi dei parametri v e b_{11} allora e solo che $\frac{\pm rs}{n}$ è quadrato di un numero razionale.

Dunque, anche per $\bar{\rho} = 1$ possono aversi sia matrici pure (tipi II o V dello Scorza) che matrici impure (tipi III, IV o VI) (2).

(1) Che considereremo altrove. Cfr. con la seguente nota (2).

(2) Si potrà decidere del tipo, ad es., costruendo anche tutte le forme riemanniane simmetriche di Ω , il che può farsi senza eccessive difficoltà, come ci riserviamo di mostrare in altra occasione.

Matematica. — *Tensori vettoriali e loro derivazione.* Nota ⁽¹⁾
di B. FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Nell'ordinario calcolo assoluto si considerano dei sistemi multipli formati da numeri reali funzioni dei punti di una varietà V_n di assegnata metrica. Questi sistemi multipli hanno carattere covariante, o controvariante, o misto rispetto ai cambiamenti di coordinate che lasciano inalterata la metrica della V_n , ed individuano quindi tensori della V_n . Osservo che, in modo del tutto analogo, possono considerarsi degli enti aventi carattere tensoriale nella V_n , individuandoli mediante sistemi multipli formati da elementi di una generica classe lineare; e cioè da elementi U per i quali è definita l'operazione addizione e l'operazione prodotto di un numero reale per U , godendo queste operazioni di tutte le proprietà di cui godono le analoghe operazioni fra numeri reali. Tale classe lineare può essere formata, oltre che dai numeri reali, dagli ordinari numeri complessi, dai vettori o dai tensori di un generico spazio, dalle omografie vettoriali, dai quaternioni, ecc.

In una Comunicazione all'ultimo Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze ho considerato, in particolare, gli enti tensoriali di V_n , che sono individuati da sistemi multipli di vettori. Mi propongo ora di riprendere l'oggetto della Comunicazione accennata, stabilendo per gli enti considerati l'operazione di derivazione, e facendone poi alcune semplici applicazioni.

I. — TENSORI VETTORIALI.

Consideriamo in un punto Q di uno spazio V_m n vettori v_1, \dots, v_n appartenenti allo spazio stesso e funzioni dei punti P di una V_n di metrica

$$(1) \quad ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k \quad (a_{ik} = a_{ki} \quad , \quad i, k = 1, \dots, n).$$

Se, passando dalle coordinate x^1, \dots, x^n di P alle coordinate $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$, il sistema di vettori v_1, \dots, v_n si trasforma secondo la formula

$$(2) \quad \bar{v}_i = v_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i},$$

diremo che il sistema v_1, \dots, v_n ha carattere covariante in (1). Analogamente si definisce il carattere controvariante di un sistema di vettori v^1, \dots, v^n . Se poi

$$(3) \quad v_i = a_{ij} v^j,$$

(1) Nella seduta del 6 novembre 1932.

diremo che, in (1), il sistema di vettori v_i rappresenta in forma covariante, il sistema di vettori v^i rappresenta in forma controvariante un ente che potremo dire vettore di V_n a componenti vettoriali, o, brevemente, *vettore vettoriale* di V_n . Questa denominazione può essere giustificata dal fatto che manifestamente gli enti considerati godono in V_n delle stesse proprietà invariantive, rispetto ai cambiamenti di coordinate, di cui godono gli ordinari vettori di V_n , allorchè questi sono individuati da un sistema di numeri reali (1).

In particolare, se v è un vettore dello spazio euclideo S_m in cui è immersa V_n e v è funzione dei punti P di V_n , $\frac{\partial v}{\partial x^i}$ è un sistema formato da n vettori di S_m , e tale sistema ha carattere covariante in V_n : esso individua in forma covariante un vettore vettoriale di V_n . Noto è il caso particolare in cui, fissato un punto O di S_m , $v = P - O$: $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ è un sistema di vettori di S_m , individuante in forma covariante un vettore vettoriale di V_n . Notiamo però che, applicando i vettori $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ in P , essi risultano appartenere a V_n .

Come si sono considerati vettori vettoriali di V_n , si possono manifestamente considerare *tensori vettoriali* di V_n , rappresentandoli con sistemi multipli di vettori di V_n , aventi carattere covariante o controvariante o misto rispetto ai cambiamenti di coordinate che lasciano inalterata la (1).

2. — TENSORI VETTORIALI EQUIVALENTI AGLI ORDINARI TENSORI.

Fra i tensori vettoriali di V_n hanno particolare interesse quelli che, invece di essere individuati da sistemi di vettori di una V_m qualsivoglia, sono individuati da sistemi di vettori della V_n stessa. Questi enti si identificano sostanzialmente con gli ordinari tensori, dei quali costituiscono un aspetto talvolta più semplice ed intuitivo dell'originario; aspetto che si presta a significative interpretazioni geometriche e meccaniche degli enti stessi.

Il sistema lineare formato dai vettori di V_n , valutati in un punto P di V_n , è un sistema ad n dimensioni: se si assume come sistema di riferimento il sistema di vettori di V_n , $\frac{\partial P}{\partial x^i}$, che rappresenta in forma covariante un vettore vettoriale di V_n , ogni vettore di V_n si esprime così:

$$(4) \quad v = v^i \frac{\partial P}{\partial x^i},$$

(1) ENEA BORTOLOTTI, nella Memoria: *Nuova esposizione, su basi geometriche, del Calcolo assoluto generalizzato del Vitali, ecc.* «Rend. del Seminario di Padova», vol. II, 1931, pp. 1 e 164) sfiora incidentalmente questo argomento, senza però rilevare sistematicamente il carattere tensoriale che si può attribuire ad opportuni sistemi di vettori.

e le coordinate v^i non sono altro che le componenti controvarianti del vettore \mathbf{v} ⁽¹⁾.

Consideriamo ora un sistema di vettori di $V_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, avente carattere covariante in V_n .

Assumendo come sistema di riferimento il sistema $\frac{\partial P}{\partial x^i}$, da (4) scende

$$(5) \quad \mathbf{v}_j = v_j^i \frac{\partial P}{\partial x^i},$$

essendo — come si constata facilmente —

$$(6) \quad v_{jk} = \mathbf{v}_j \times \frac{\partial P}{\partial x^k}.$$

La (6) permette di calcolare le componenti covarianti del tensore doppio che individua il vettore vettoriale.

Come un vettore di V_n è individuato da un ordinario tensore semplice di V_n , un vettore vettoriale di V_n da un tensore doppio di V_n , un tensore doppio vettoriale di V_n è rappresentato da un tensore triplo di V_n , un tensore r -plo vettoriale di V_n è rappresentato da un tensore di ordine $r + 1$ di V_n . I tensori vettoriali individuati da sistemi di vettori di V_n si identificano dunque sostanzialmente con gli ordinari tensori di V_n . Però, mentre gli ordinari tensori assumono come elementi rappresentativi i numeri reali (scalari), i tensori vettoriali assumono come elementi rappresentativi i vettori; mentre le operazioni su gli ordinari tensori si riducono ad operazioni fra numeri reali, le operazioni sui tensori vettoriali si riducono ad operazioni su vettori.

Gli enti geometrici e meccanici aventi carattere tensoriale, che caratterizzano deformazioni, sforzi, momenti, od altre quantità che è più naturale — secondo l'intuizione geometrica e fisica — pensare direttamente come insiemi di grandezze vettoriali che non come insiemi di numeri, trovano certamente la loro rappresentazione più spontanea nei tensori vettoriali che non negli ordinari tensori.

3. - ESEMPLI.

Consideriamo il vettore vettoriale individuato dai vettori $\frac{\partial P}{\partial x^i}$, che, applicati in P , costituiscono un sistema di vettori di V_n avente carattere covariante. L'ordinario tensore doppio di V_n che lo individua, ha — in virtù di (6) — componenti covarianti

$$(7) \quad v_{jk} = \frac{\partial P}{\partial x^j} \times \frac{\partial P}{\partial x^k} = a_{jk}.$$

(1) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Analisi vettoriale generale, Geometria differenziale*, Bologna, 1930, p. 284.

Il vettore vettoriale individuato da $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ si dirà dunque ragionevolmente *vettore vettoriale fondamentale*. Le formule (4) e (5) giustificano pur esse la denominazione adottata. Notiamo che in uno spazio euclideo tridimensionale, se consideriamo una terna cartesiana di riferimento, $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ è il sistema formato dai vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Questa terna individua il vettore vettoriale fondamentale.

Consideriamo in una V_3 il tensore vettoriale individuato dai vettori

$$(8) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial P}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^j},$$

che applicati in P costituiscono un sistema doppio di vettori di V_3 avente carattere doppio covariante, e che individua appunto in forma covariante un tensore doppio vettoriale. A questo tensore doppio vettoriale corrisponde un ordinario tensore triplo di V_3 , le cui componenti covarianti — per la (6) — non sono altro che

$$(9) \quad \varepsilon_{ijh} = \frac{\partial P}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^j} \times \frac{\partial P}{\partial x^h} = \begin{cases} 0, & \text{se almeno due indici coincidono,} \\ \sqrt{a}, & \text{se la permutazione } ijh \text{ è di classe} \\ & \text{pari,} \\ -\sqrt{a}, & \text{se la permutazione } ijh \text{ è di} \\ & \text{classe dispari.} \end{cases}$$

Il tensore vettoriale doppio rappresentato da ε_{ij} coincide dunque sostanzialmente con l'ordinario tensore triplo ε .

Consideriamo un sistema materiale continuo costituente una V_n , e sia β l'omografia degli sforzi. Su di un elemento superficiale, che ha per normale \mathbf{n} , lo sforzo è $\Phi_n = \beta \mathbf{n}$. Orbene, se si considera il sistema di vettori

$$(10) \quad \Phi_i = \beta \frac{\partial P}{\partial x^i},$$

esso permette di calcolare Φ_n , noto \mathbf{n} . Infatti, per (4), $\mathbf{n} = n^i \frac{\partial P}{\partial x^i}$, e \mathbf{n} è noto se son noti n^i ; così che

$$(11) \quad \Phi_n = n^i \beta \frac{\partial P}{\partial x^i} = n^i \Phi_i.$$

Poichè si constata immediatamente che il sistema Φ_i ha carattere covariante in V_n , esso individua un vettore vettoriale: il *vettore vettoriale degli sforzi*. Per esempio, in uno spazio euclideo, rispetto ad una terna cartesiana xyz , il vettore vettoriale degli sforzi è individuato dai tre vettori

Φ_x, Φ_y, Φ_z , che rappresentano gli sforzi specifici in un punto, secondo tre elementi che hanno per normali rispettivamente l'asse delle x , delle y , delle z .

4. — DERIVAZIONE.

Consideriamo un vettore \mathbf{v} di V_n , funzione dei punti P di V_n . Mentre $\mathbf{v}(P)$ è un vettore di V_n , se si applica in P il vettore $\mathbf{v}(P + dP)$, non si ottiene, in generale, un vettore di V_n . Per poter definire la derivata di \mathbf{v} mediante un rapporto incrementale, bisogna dunque fissare un trasporto per $\mathbf{v}(P + dP)$, che trasformi quest'ultimo vettore in un vettore di V_n in P . Tale è il trasporto per parallelismo di Levi-Civita. Facciamo allora la differenza $d_v \mathbf{v}$ fra questo vettore trasportato e $\mathbf{v}(P)$. Oppure, consideriamo $\mathbf{v}(P)$ e $\mathbf{v}(P + dP)$ come vettori di un S_m euclideo in cui V_n è immersa: la differenza $\mathbf{v}(P + dP) - \mathbf{v}(P)$ di questi due vettori di S_m ammette un componente secondo V_n , che coincide appunto con $d_v \mathbf{v}$. Il vettore $d_v \mathbf{v}$ è un vettore di V_n che, con Boggio, diremo « differenziale di \mathbf{v} secondo V_n » ⁽¹⁾.

Il sistema $\frac{\partial_v \mathbf{v}}{\partial x^i}$ è un sistema semplice di vettori di V_n avente carattere covariante, perchè d_v è un operatore che gode delle stesse proprietà dell'ordinario simbolo differenziale. Il sistema considerato caratterizza dunque in forma covariante un vettore vettoriale di V_n , che diremo *derivato* del vettore \mathbf{v} , e che volendo (per ovvia analogia con il gradiente di uno scalare) potrebbe anche dirsi *gradiente* in V_n del vettore \mathbf{v} .

Valutiamo il tensore doppio che corrisponde al sistema $\frac{\partial_v \mathbf{v}}{\partial x^i}$. Il tensore cercato è rappresentato covariantemente dal sistema doppio di scalari (cfr. (6))

$$(12) \quad v_{ij} = \frac{\partial_v \mathbf{v}}{\partial x^i} \times \frac{\partial P}{\partial x^j}.$$

Ma, se diciamo v_j le componenti covarianti di \mathbf{v} , il secondo membro di (12) non è altro che v_{ji} ⁽²⁾; dunque

$$(13) \quad v_{ij} = v_{ji}.$$

L'ordinario tensore doppio che corrisponde al vettore vettoriale derivato di \mathbf{v} è dunque il tensore doppio derivato del vettore \mathbf{v} .

Consideriamo ora un vettore vettoriale di V_n rappresentato in forma covariante dal sistema v_i di vettori di V_n . Il sistema $\frac{\partial_v v_i}{\partial x^j}$ è un sistema

(1) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loc. cit., p. 177.

(2) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loc. cit., p. 285.

doppio di vettori di V_n non avente carattere doppio covariante. Ha invece tale carattere il sistema, contenente i simboli di Christoffel di seconda specie,

$$(14) \quad v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} v_r,$$

come facilmente si può verificare. Esso definisce un tensore doppio vettoriale che diremo *tensore vettoriale derivato* in V_n del vettore vettoriale considerato.

Come si è definito il tensore vettoriale derivato di un vettore vettoriale, si definisce facilmente il tensore vettoriale derivato di un tensore vettoriale di ordine r : basta all'uopo valersi della formula che nell'ordinario calcolo differenziale assoluto dà la derivata di un tensore di ordine r ⁽¹⁾ e ivi sostituire al sistema di scalari che caratterizza l'ordinario tensore il sistema di vettori che caratterizza il tensore vettoriale, alla derivata ordinaria la derivata secondo V_n .

5. — APPLICAZIONI.

A mo' d'applicazione deriviamo il vettore vettoriale fondamentale. Ponendo in (14) $v_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}$, e ricordando che $\left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} = a^{tr} \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial P}{\partial x^j} \times \frac{\partial P}{\partial x^t}$ ⁽²⁾, si trae

$$(15) \quad \frac{\partial P}{\partial x^i} / j = 0.$$

La (15) costituisce un'interpretazione del noto teorema di Ricci: essa afferma che il tensore vettoriale derivato del vettore vettoriale fondamentale è nullo.

Calcoliamo ora, in una V_3 , il tensore derivato del tensore vettoriale rappresentato covariantemente da ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij|h} = \frac{\partial v}{\partial x^h} \varepsilon_{ij} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ih \end{matrix} \right\} \varepsilon_{rj} - \left\{ \begin{matrix} r \\ hj \end{matrix} \right\} \varepsilon_{ir}.$$

Ricordando (8) e (14), la precedente diviene:

$$\varepsilon_{ij|h} = \frac{\partial P}{\partial x^i} / h \wedge \frac{\partial P}{\partial x^j} + \frac{\partial P}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^j} / h;$$

e, ricordando la (15),

$$(16) \quad \varepsilon_{ij|h} = 0.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, 1925, p. 168.

(2) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loc. cit., p. 281.

Dunque, il tensore derivato del tensore doppio rappresentato da ε_{ij} è nullo. Questo risultato non è altro che un'interpretazione del fatto che è nullo il tensore quadruplo derivato del tensore triplo ε , verità quest'ultima che fu stabilita da Ricci e Levi-Civita ⁽¹⁾.

In una V_3 sono dunque nulli: a) il tensore derivato del vettore vettoriale fondamentale $\frac{\partial P}{\partial x^i}$; b) il tensore derivato del tensore fondamentale $a_{ij} = \frac{\partial P}{\partial x^i} \times \frac{\partial P}{\partial x^j}$; c) il tensore derivato del tensore vettoriale $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial P}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^j}$; d) il tensore derivato del tensore $\varepsilon_{ijh} = \frac{\partial P}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^j} \times \frac{\partial P}{\partial x^h}$. In generale è pure nullo il tensore derivato di ogni tensore (vettoriale o scalare) ottenuto operando con i segni \wedge e \times sui vettori $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ individuanti il vettore vettoriale fondamentale. Ad esempio, è nullo il tensore vettoriale derivato del tensore triplo vettoriale rappresentato da $\frac{\partial P}{\partial x^i} \wedge \left(\frac{\partial P}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial P}{\partial x^h} \right)$, che è sostanzialmente equivalente al tensore quadruplo introdotto da Cartan come fondamentale per i bivettori ⁽²⁾.

Matematica. — *Géométrie différentielle et calcul des variations.* Nota ⁽³⁾ di D. D. KOSAMBI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il est naturel, pour généraliser la « Geometry of Paths » de Eisenhart, de remplacer les courbes fondamentales (« paths ») par une famille arbitraire de courbes dépendant de $2n$ paramètres, ou encore par les intégrales du système:

$$(1) \quad \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Le problème n'a été abordé jusqu'ici ⁽⁴⁾ que dans le cas où les α^i sont homogènes de degré 2 par rapport aux \dot{x}^i :

$$(2) \quad \alpha^i = \frac{1}{2} \dot{x}^k \frac{\partial \alpha^i}{\partial \dot{x}^k}.$$

Dans ce qui suit, nous adoptons la convention de sommation usuelle en calcul tensoriel, et les notations suivantes:

$$\frac{\partial A^{\cdot\cdot}}{\partial x^k} = A^{\cdot\cdot}_{\cdot k} \quad \frac{\partial A^{\cdot\cdot}}{\partial \dot{x}^k} = A^{\cdot\cdot}_{\cdot k}.$$

(1) G. RICCI e T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, « Mathematische Annalen », t. 54, p. 138.

(2) E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, p. 8.

(3) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1932.

(4) Voir J. DOUGLAS, *Ann. of Mathematics* (II), vol. 29.

La question qui se pose d'abord est celle de l'existence d'une métrique, c'est-à-dire la possibilité de déduire (1) d'un principe variationnel :

$$(3) \quad \delta \int f(x, \dot{x}, t) dt = 0.$$

Par substitution dans les équations d'Euler, on obtient comme condition nécessaire et suffisante l'existence d'une solution f des équations :

$$(4) \quad \delta_i f \equiv -\alpha^r f_{,r;i} + \dot{x}^r f_{,r;i} + \frac{\partial}{\partial t} f_{,i} - f_{,i} = 0$$

satisfaisant à la condition auxiliaire :

$$(4 \text{ bis}) \quad \Delta \equiv |f_{,i;j}| \neq 0.$$

D'autre part, les équations (1) peuvent être déduites d'un parallélisme convenablement défini. Si nous définissons la dérivée d'un vecteur ($u^1, u^2 \dots u^n$) par :

$$(5) \quad D(u)^i = \beta^i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$$

et que les β^i soient tels que l'on ait :

$$(6) \quad D(\dot{x})^i \equiv \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t)$$

les équations (1) seront celles des lignes autoparallèles. De plus, nous voulons que $D(u)^i$ soit un vecteur en même temps que u^i , la loi de transformation des vecteurs contravariants pour la transformation de coordonnées ($\bar{x} \longleftrightarrow x$) étant donnée par

$$(7) \quad \bar{u}^i = u^j F_j^i(x, \bar{x}, t)$$

où les coefficients F_j^i sont les plus généraux possibles, et soumis à cette seule condition que $F \equiv |F_j^i| \neq 0$ le long de toute courbe. Il faut donc que l'on ait, identiquement en u et \dot{u} :

$$(8) \quad \bar{D}(\bar{u})^i = F_j^i D(u)^j$$

d'où

$$(9) \quad D(u)^i \equiv \dot{u}^i + u^k \gamma_k^i(x, \dot{x}, t) + \varepsilon^i(x, \dot{x}, t)$$

$$(10) \quad \varepsilon^i = \alpha^i - \gamma_k^i \dot{x}^k, \quad \bar{\varepsilon}^i = F_j^i \varepsilon^j$$

$$(11) \quad F_i^k \bar{\gamma}_k^i + \frac{d}{dt} F_j^i = \gamma_j^k F_k^i.$$

De (11) il résulte que nos équations ne peuvent être satisfaites que si les F_j^i sont indépendants des \dot{x}^i et se réduisent à des fonctions $F_j^i(x, t)$ des x^i et de t : ce que nous supposons dorénavant. Il ne s'ensuit du reste pas que \dot{x} soit un vecteur.

La dérivée définie par (9) est non-distributive, mais nous pouvons définir en même temps un opérateur distributif⁽¹⁾, la *bidérivée*, en laissant tomber ε^i :

$$(12) \quad \mathfrak{D}(u)^i = \dot{u}^i + \gamma_k^i u^k$$

c'est aussi un vecteur contravariant en même temps que u .

L'arbitraire des γ_k^i nous permet d'introduire de nouvelles hypothèses; en particulier, si nous voulons que les équations de variation des équations (1):

$$(13) \quad \ddot{u}^i + \dot{u}^k \alpha_{i,k}^i + u^k \alpha_{i,k}^i = 0$$

puissent se mettre sous la forme (tensoriellement invariante) $D^2(u)^i = \varphi^i(x, \dot{x}, u, t)$, nous devons prendre⁽²⁾:

$$(14) \quad \gamma_k^i = \frac{1}{2} \alpha_{i,k}^i$$

$$(15) \quad D^2(u)^i - D(\varepsilon)^i \equiv \mathfrak{D}^2(u)^i = P_j^i u^j$$

$$(15 \text{ bis}) \quad P_j^i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha_{i,j}^i + \frac{1}{4} \alpha_{i,j}^i, \alpha_{i,j}^i - \alpha_{i,j}^i.$$

Pour la loi ordinaire de transformation des vecteurs, où $F_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$, on peut démontrer un « théorème de Fermi », c'est-à-dire faire que les γ_k^i s'annulent suivant une courbe quelconque par une transformation convenable de coordonnées. Alors les équations de variation de (1) se réduisent à la *forme canonique*:

$$(16) \quad \ddot{u}^i = P_j^i u^j.$$

Pour l'écart géodésique, ces formules ne sont autre que les formules bien connues de Levi-Civita⁽³⁾. Elles sont particulièrement commodes pour l'étude de la stabilité ou de l'existence de foyers conjugués.

Pour faire la liaison de ce qui précède avec notre problème variationnel, il nous faut considérer des groupes continus, que nous suppose-

(1) Cf. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, pp. 63-64.

(2) Cf. L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, p. 126.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Absolute Differential Calculus*, p. 219.

rons engendrés par des transformations infinitésimales définies par des opérateurs :

$$(17) \quad X = \xi^i(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

t apparaissant ainsi comme un *paramètre affine*. Une transformation parallèle sera une transformation pour laquelle $D(\xi)^i = 0$, c'est-à-dire que l'on aura :

$$(18) \quad Xf(x, \dot{x}, t) \equiv \xi^i[f_{,i} - \gamma_i^k f_{,k}] + \frac{\partial f}{\partial t} - \varepsilon^i f_{,i}.$$

Le long des « lignes de courant » de la transformation, lignes définies par $\dot{x}^i = \xi^i$, l'on aura :

$$(19) \quad Xf \equiv \frac{df}{dt} \equiv -\alpha^i f_{,i} + \dot{x}^i f_{,i} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

L'« invariance absolue » de f sera définie par $Xf = 0$ ou $\frac{df}{dt} = 0$: f sera stationnaire le long des lignes de courant. Si le groupe des transformations parallèles (« groupe parallèle ») est transitif, (18) donne les conditions nécessaires et suffisantes d'invariance absolue :

$$(20) \quad \frac{\partial f}{\partial t} - \varepsilon^i f_{,i} = 0$$

$$(21) \quad f_{,i} - \gamma_i^k f_{,k} = 0.$$

Puisque la transitivité du groupe entraîne que toute courbe (1) soit une ligne de courant, f doit être stationnaire le long de toutes ces courbes.

Si maintenant nous voulons que f définisse une métrique pour les courbes (1), nous pourrons, grâce à l'identité

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \frac{df}{dt} \equiv \delta_i f + 2 \left(f_{,i} - \frac{1}{2} \alpha^k_{,i} f_{,k} \right)$$

écrire les équations (4) sous la forme :

$$(23) \quad d_1 f \equiv f_{,i} - \alpha^k_{,i} f_{,k} = 0$$

(23), ensemble avec $\frac{df}{dt} = 0$, donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une métrique qui soit en même temps invariante par le « groupe parallèle » supposé transitif.

Le système (4) se réduit du reste à un système du premier ordre chaque fois que l'on suppose $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \frac{df}{dt} = 0$. Mais $\frac{df}{dt} = 0$ est la condition

nécessaire et suffisante pour que toute fonction $\varphi(f)$ de f , et non seulement f , soit solution de (4).

Les tenseurs fondamentaux et les invariants différentiels de l'espace des courbes (1) apparaîtront si nous écrivons les équations de compatibilité pour le système $d_i f = 0$, $\frac{df}{dt} = 0$. (23) permet d'éliminer $f_{,i}$ partout. L'on obtient :

$$(24) \quad \left(\frac{d}{dt} d_j - d_j \frac{d}{dt} \right) f = 0 \rightarrow P_{ij}^i f_{,i} = 0$$

$$(25) \quad (d_j d_k - d_k d_j) f \equiv R_{jk}^i f_{,i} = 0$$

$$(25 \text{ bis}) \quad 3 R_{ik}^i = P_{ij;k}^i - P_{k;j}^i.$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel n'est autre que $R_{jk;l}^i$.

Si nous postulons seulement l'invariance relative de f , nous devons écrire :

$$(26) \quad \frac{df}{dt} = 2\lambda f \quad , \quad \lambda = \text{constante}$$

$$(27) \quad d_j f = \lambda f_{,j}.$$

Si nous écrivons les conditions de compatibilité (en éliminant λ) nous aurons :

$$(28) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^j} d_k - \frac{\partial}{\partial x^k} d_j \right) f = 0$$

$$(29) \quad P_{ij}^r f_{,r;i} - P_{i;r}^j f_{,r;j} = 0.$$

Ensemble avec (4), ces équations sont équivalentes aux conditions données par Davis⁽¹⁾ pour que (1) soit réductible à un système dont les équations de variation soient leurs propres adjointes. C'est là, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes (1) soient les extrémales d'un problème variationnel.

Il résulte du principe d'Hamilton que l'on a $\frac{d}{dt} (\dot{x}^i f_{,i} - f) = 0$ pour toute métrique f ne contenant pas explicitement le paramètre t . Par suite, toute métrique homogène par rapport aux \dot{x}^i d'un degré autre que le premier est nécessairement stationnaire sur les courbes (1), donc invariant absolu. Du reste, tous les invariants peuvent être déduits d'un nombre fini d'invariants fondamentaux⁽²⁾; les métriques définies par les polynômes en \dot{x}^i ont par suite un intérêt particulier.

(1) D. R. DAVIS, « Trans. Am. Math. Soc. » vol. 33, p. 246, et « Bull. Am. Math. Soc. », 1929, pp. 371-380.

(2) R. WEITZENBÖCK, « Acta Math. », t. 58, pp. 275-276.

Remarquons enfin que les solutions des équations de variation fournissent des transformations infinitésimales parallèles transformant les courbes (1) en courbes de même nature.

Un exposé plus détaillé de ces recherches paraîtra ailleurs, ainsi que diverses applications à la physique mathématique, et en particulier à la relativité ⁽¹⁾.

Matematica. — *L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes.* — I. *Cas général.* Nota ⁽²⁾ di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. Dans le *cas général*, c'est-à-dire quand le système d'équations contient *toutes les six dérivées du second ordre*, r, s, t, r', s', t' , des fonctions inconnues α, α' :

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x, y, \alpha, \alpha', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = 0 \\ F_2(x, y, \alpha, \alpha', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = 0 \end{cases}$$

et quand au système donné on adjoint la 3^{me} équation compatible

$$(2) \quad \Phi(x, y, \alpha, \alpha', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const},$$

pour chercher la fonction Φ , suivant mes Notes antérieures ⁽³⁾, il faut étudier les déterminants du 6^{me} ordre de la matrice

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{ccccccccc} \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r'} & \frac{\partial\Phi}{\partial s'} & \frac{\partial\Phi}{\partial t'} & 0 \\ \Xi_1 & R_1 & S_1 & T_1 & 0 & R'_1 & S'_1 & T'_1 & 0 \\ \Xi_2 & R_2 & S_2 & T_2 & 0 & R'_2 & S'_2 & T'_2 & 0 \\ H_1 & 0 & R_1 & S_1 & T_1 & 0 & R'_1 & S'_1 & T'_1 \\ H_2 & 0 & R_2 & S_2 & T_2 & 0 & R'_2 & S'_2 & T'_2 \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r'} & \frac{\partial\Phi}{\partial s'} & \frac{\partial\Phi}{\partial t'} \end{array} \right\|,$$

(1) Pour une bibliographie plus complète, voir l'exposé de L. KOSCHMIEDER. « Jahresbericht d. D. M. V. », Bd. 40, pp. 109-132. On y trouvera en particulier des références détaillées aux travaux de BERWALD, avec lesquels les présentes recherches ont plusieurs points communs.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1932.

(3) M. KOURENSKY, « Annali di matematica pura ed applicata », série IV, t. VIII, pp. 293-300, 1930-31; « Rendiconti della R. Ac. N. dei Lincei », vol. X, fasc. 3-4, 1929, pp. 148-154; vol. XIV, fasc. 10, 1931, pp. 408-414; vol. XV, fasc. 5, 1932, pp. 348-353.

où

$$\Xi_i = \frac{dF_i}{dx} = X_i + Z_i p + Z'_i p' + P_i r + Q_i s + P_i r' + Q'_i s'$$

$$H_i = \frac{dF_i}{dy} = Y_i + Z_i q + Z'_i q' + P_i s + Q_i t + P'_i s' + Q'_i t' \quad (i = 1, 2).$$

$$X_i = \frac{\partial F_i}{\partial x}, Y_i = \frac{\partial F_i}{\partial y}, \dots, T_i = \frac{\partial F_i}{\partial t}, T'_i = \frac{\partial F_i}{\partial t'}$$

Les 4 équations non linéaires, qui représentent les conditions de compatibilité des 3 équations (1), (2) et qu'on obtient des 4 déterminants correspondants du 6^{me} ordre de la matrice (3), peuvent être remplacées par un système des 4 équations linéaires

$$(4) \left\{ \begin{aligned} (\tau + \lambda_i \sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} &= (\lambda_i \tau_1 - \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ (\sigma + \lambda_i \rho) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} &= \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\lambda_i \sigma_3 - \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ (\tau + \lambda_i \sigma)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} &= [\rho (\rho_1 - \lambda_i \sigma_1 + \lambda_i^2 \tau_1) + (\tau + \lambda_i \sigma) (\lambda_i \tau_2 - \sigma_2)] \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \\ &\quad + [\sigma (\rho_1 - \lambda_i \sigma_1 + \lambda_i^2 \tau_1) + (\tau + \lambda_i \sigma) \rho_2] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \\ &\quad + [\tau (\rho_1 - \lambda_i \sigma_1 + \lambda_i^2 \tau_1) - (\tau + \lambda_i \sigma) \lambda_i \rho_2] \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ (\tau + \lambda_i \sigma) \left[\xi_i \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \xi'_i \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} \right] &= \\ &= \rho_1 \left[\eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \lambda_i \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\lambda_i \eta_2 - \eta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\sigma + \lambda_i \rho) \frac{d\Phi}{dy} \right], \end{aligned} \right.$$

où λ_i est une des racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de l'équation du 4^{me} degré

$$(5) \quad \begin{aligned} &[\rho (\rho \tau_1 + \sigma \tau_2) + \sigma^2 \tau_3] \lambda^4 + \\ &+ [\rho^2 (\rho_2 - \sigma_1) + 2 (\rho \sigma \tau_1 + \tau \rho \tau_2 + \tau \sigma \tau_3) + \sigma^2 (\tau_2 - \sigma_3)] \lambda^3 + \\ &+ \{\sigma^2 [(\tau_1 + \rho_3) - 2 \sigma_2] + 3 (\tau^2 \tau_3 + \rho^2 \rho_1) + \rho \tau [2 (\tau_1 + \rho_3) - \sigma_2]\} \lambda^2 + \\ &+ [\sigma^2 (\rho_2 - \sigma_1) + 2 (\rho \sigma \rho_1 + \tau \rho \rho_2 + \tau \sigma \rho_3) + \tau^2 (\tau_2 - \sigma_3)] \lambda + \\ &+ [\tau (\tau \rho_3 + \sigma \rho_2) + \sigma^2 \rho_1] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

(1) Le coefficient de λ^2 peut encore avoir, p. ex., la forme suivante:

$$[\tau^2 \tau_3 + \rho (\rho \rho_1 + \tau \sigma_2) - 2 (\rho \sigma \sigma_1 + \tau \rho \sigma_2 + \tau \sigma \sigma_3) + \sigma^2 (\tau_1 - 2 \sigma_2 + \rho_3)].$$

et $\rho, \rho', \rho_1, \dots, \eta_3, \eta'_3$ sont les jacobiens du 2^{me} ordre des fonctions données F_1, F_2 par rapport aux variables $s, t; s', t'; r, r'; \dots, t, y; t', y$ suivant le tableau :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \rho = (st) & ; & \sigma = (tr) & ; & \tau = (rs) \\ \rho_1 = (rr') & ; & \sigma_1 = (sr') & ; & \tau_1 = (tr') \\ \rho_2 = (rs') & ; & \sigma_2 = (ss') & ; & \tau_2 = (ts') \\ \rho_3 = (rt') & ; & \sigma_3 = (st') & ; & \tau_3 = (tt') \\ \rho' = (s' t') & ; & \sigma' = (t' r') & ; & \tau' = (r' s') \\ \xi_1 = [rx] & ; & \xi_2 = [sx] & ; & \xi_3 = [tx] \\ \xi'_1 = [r' x] & ; & \xi'_2 = [s' x] & ; & \xi'_3 = [t' x] \\ \eta_1 = [ry] & ; & \eta_2 = [sy] & ; & \eta_3 = [ty] \\ \eta'_1 = [r' y] & ; & \eta'_2 = [s' y] & ; & \eta'_3 = [t' y]. \end{array} \right.$$

Les premiers 15 déterminants sont les déterminants du 2^{me} ordre de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccccc} R_1 & S_1 & T_1 & R'_1 & S'_1 & T'_1 \\ R_2 & S_2 & T_2 & R'_2 & S'_2 & T'_2 \end{array} \right\|$$

et l'on peut écrire pour ces déterminants C_{2+4}^2 , c.-à.-d. 15 relation; des relations mentionnées seules $C_{2+4}^2 - 2 \cdot 4 - 1$, c.-à.-d. 6 sont indépendantes.

Les relations se rencontrent toujours dans les transformations diverses des équations différentielles à une fonction inconnue Φ . Elles sont :

$$(7) \quad \begin{array}{l} \rho\rho_1 + \sigma\sigma_1 + \tau\tau_1 = 0 \\ \rho\rho_2 + \sigma\sigma_2 + \tau\tau_2 = 0 \\ \rho\rho_3 + \sigma\sigma_3 + \tau\tau_3 = 0 \\ \rho' \rho_1 + \sigma' \rho_2 + \tau' \rho_3 = 0 \\ \rho' \sigma_1 + \sigma' \sigma_2 + \tau' \sigma_3 = 0 \\ \rho' \tau_1 + \sigma' \tau_2 + \tau' \tau_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \rho\rho' = \left| \begin{array}{cc} \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{array} \right| & ; & \sigma\rho' = \left| \begin{array}{cc} \tau_2 & \tau_3 \\ \rho_2 & \rho_3 \end{array} \right| & ; & \tau\rho' = \left| \begin{array}{cc} \rho_2 & \rho_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{array} \right| \\ \rho\sigma' = \left| \begin{array}{cc} \sigma_3 & \sigma_1 \\ \tau_3 & \tau_1 \end{array} \right| & ; & \sigma\sigma' = \left| \begin{array}{cc} \tau_3 & \tau_1 \\ \rho_3 & \rho_1 \end{array} \right| & ; & \tau\sigma' = \left| \begin{array}{cc} \rho_3 & \rho_1 \\ \sigma_3 & \sigma_1 \end{array} \right| \\ \rho\tau' = \left| \begin{array}{cc} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{array} \right| & ; & \sigma\tau' = \left| \begin{array}{cc} \tau_1 & \tau_2 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{array} \right| & ; & \tau\tau' = \left| \begin{array}{cc} \rho_1 & \rho_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{array} \right| \end{array}$$

et encore

$$\begin{vmatrix} \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \rho_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2. Pour comparer le procédé d'intégration d'une seule équation à une fonction inconnue χ avec le procédé d'intégration du système de deux équations aux deux fonctions inconnues χ, χ' , envisageons l'intégration du système particulier suivant:

$$(8) \quad F_1 \equiv F(x, y, \chi, p, q, r, s, t) = 0$$

$$(9) \quad F_2 \equiv r' + s' + t' + f(x, y, \chi, p, q, r, s, t) = 0.$$

Nous pouvons chercher la 3^{me} équation compatible sous la forme

$$(10) \quad \Phi(x, y, \chi, p, q, r, s, t) = \text{const.}$$

Les conditions de compatibilité peuvent être écrites de deux manières différentes. D'un côté, en étudiant les conditions de compatibilité pour chaque paire des équations (8), (9), (10), nous avons les équations compatibles (8) et (9) et les équations compatibles (9) et (10), comme elles contiennent les dérivées des deux fonctions χ et χ' . Il faut écrire les conditions de compatibilité des équations (8) et (10), intégrer l'équation (8) par la méthode, exposée dans mes deux Notes dans ce Recueil, vol. X, fs. 3-4 et vol. XIV, fs. 10, c. à. d. il faut trouver deux équations $\Phi_1 = C_1, \Phi_2 = C_2$, compatibles entre elles et avec l'équation (8). Alors nous obtiendrons la fonction χ par les quadratures; la deuxième fonction inconnue χ' sera trouvée par l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre (9).

D'autre part, en étudiant les conditions de compatibilité pour l'ensemble des 3 équations (8), (9), (10), nous arriverons à l'intégration des équations (8), (9) par la méthode, exposée dans le § 1 de cette Note et dans la Note du fs. 5, vol. XV.

Par les formules (6) nous avons :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = R$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = S$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = T.$$

Les 3 relations premières (7) donnent

$$\rho R + \sigma S + \tau T = 0.$$

La substitution $\lambda = \frac{1}{v}$ permet d'écrire l'équation (5) sous la forme

$$(Rv^2 - Sv + T)[v^2(\tau^2 + \sigma\tau + \sigma^2) + v(2\rho\sigma + \rho\tau + 2\tau\sigma + \sigma^2) + \rho^2 + \rho\sigma + \sigma^2] = 0,$$

et nous pouvons prendre la racine v de l'équation quadratique connue dans la méthode d'intégration d'une seule équation :

$$(11) \quad Rv^2 - Sv + T = 0.$$

Soit v_i une des racines de cette équation. Alors les 3 premières équations du système (4) s'écriront :

$$(12) \quad \begin{cases} (T - v_i S) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + v_i R \frac{\partial \Phi}{\partial s} - R \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \\ v_i T \frac{\partial \Phi}{\partial r} - T \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (S - v_i R) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \\ (\tau + v_i \sigma) \left[(T - v_i S) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + v_i R \frac{\partial \Phi}{\partial s} - R \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = 0. \end{cases}$$

La dernière de ces équations est équivalente à la première. Les deux premières sont les équations de ma Note dans le fs. 3-4, vol. X : elles sont dépendantes, vu que v_i est la racine de l'équation (11).

La 4^{me} équation du système (4), après quelques transformations algébriques, peut être écrite :

$$(13) \quad \left[T \frac{\partial f}{\partial r} + v_i (R - S) \frac{\partial f}{\partial s} - R \frac{\partial f}{\partial t} \right] \left[v_i R \frac{d\Phi}{dx} + T \frac{d\Phi}{dy} - v_i \Xi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - H \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial r} \right) v_i TS \frac{d\Phi}{dy} - \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) v_i HS \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \\ + \left(T \frac{df}{dy} - H \frac{\partial f}{\partial r} \right) v_i R \left(v_i \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \left(T \frac{df}{dy} - H \frac{\partial f}{\partial t} \right) R \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Les intégrales $\Psi_1 = C_1$, $\Psi_2 = C_2$ des 2 équations (13), (12) dépendent de la fonction f de l'équation (9). Quand

$$(14) \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dy} = 0,$$

c. à. d. quand l'équation (9) a la forme

$$(15) \quad r' + s' + t' + f(x) = 0,$$

l'équation (13) se réduit à l'équation correspondante (21) de la Note de fs. 3-4, vol. X, et les intégrales $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, indiquées dans la Note mentionnée, ont le caractère des intégrales $\Psi_1 = C_1$, $\Psi_2 = C_2$.

L'équation (13) peut être remplacée par une autre équation, analogue à une de 3 équations (21) dans la Note de fs. 3-4, vol. X, les conditions (14) - par les suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dx} = 0,$$

et l'équation (15) - par l'équation :

$$r' + s' + t' + f(v) = 0.$$

Matematica. — *La simplification des recherches de L. Bianchi, généralisantes le caractère de S. Lie, que les paramètres soient essentiels.* Nota ⁽¹⁾ di G. PFEIFFER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

A S. Lie ⁽²⁾ appartient le critère suivant pour reconnaître, si les paramètres:

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_r$$

d'un système des fonctions indépendantes:

$$(2) \quad \begin{cases} \zeta_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r), \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

sont essentiels.

LE THÉORÈME DE S. LIE.

« La condition nécessaire et suffisante, pour que les paramètres (1) dans le système des fonctions (2) soient inessentiels, consiste en ceci: Il existe une ou plusieurs équations:

$$(3) \quad A_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial F}{\partial a_2} + \dots + A_r \frac{\partial F}{\partial a_r} = 0,$$

aux coefficients-fonctions des paramètres (1), dont les fonctions (2) sont des solutions ».

L. Bianchi ⁽³⁾ a considérablement défriché le caractère de S. Lie et l'a amené à une forme commode pour la pratique.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(2) S. LIE und FR. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, 1888, B. I, ss. 13-14).

(3) L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (Bologna, 1928, pp. 30-36).

Le rang de la matrice:

$$(10) \quad M = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & , & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & , & \dots & , & \frac{\partial f_m}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & , & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & , & \dots & , & \frac{\partial f_m}{\partial a_2} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r} & , & \frac{\partial f_2}{\partial a_r} & , & \dots & , & \frac{\partial f_m}{\partial a_r} \end{vmatrix}$$

du système (5) soit $\mu_0 \equiv \mu$:

$$(11) \quad \mu \leq r.$$

Dans le cas, où $\mu = r$, les coefficients (8) sont nuls, les paramètres (1) sont essentiels.

Quand $\mu < r$, μ des relations (2), et pour plus de simplicité supposons, que précisément les premières μ :

$$(12) \quad \chi_1 = f_1, \chi_2 = f_2, \dots, \chi_\mu = f_\mu$$

sont résolubles par rapport aux μ paramètres (1); de même admettons (toujours pour simplifier), que les relations (12) se laissent résoudre par rapport aux premiers μ paramètres (1):

$$(13) \quad a_1, a_2, \dots, a_\mu;$$

de sorte que

$$(14) \quad \Delta = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_\mu)}{D(a_1, a_2, \dots, a_\mu)} \neq 0.$$

En substituant les expressions des paramètres (13), tirées des égalités (12), dans les relations (2), nous obtiendrons $\varepsilon_0 - \mu_0$ relations, qui ne contiennent pas les paramètres (1); marquons les par Q_0 . Les fonctions $\chi_{\mu+1}, \chi_{\mu+2}, \dots, \chi_m$, peuvent être exprimées moyennant les variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n et les fonctions $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\mu$.

Sous la condition (14) les premières μ équations (9):

$$(15) \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \dots \quad \Phi_\mu = 0$$

sont indépendantes; chacune des autres:

$$(16) \quad \Phi = 0$$

est une combinaison linéaire des premières μ :

$$(17) \quad \Phi \equiv \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \dots + \lambda_\mu \Phi_\mu,$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ sont des fonctions des variables indépendantes x_1, \dots, x_n et des paramètres a_1, \dots, a_r .

variables indépendantes x_1, \dots, x_n et les fonctions $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$; les dérivées $U_{\mu_1+1}, \dots, U_{n\mu}$ par les variables indépendantes x_1, \dots, x_n , les fonctions $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$ et les dérivées U_1, \dots, U_{μ_1} .

En continuant de la même manière, nous parviendrons aux inégalités:

$$(29) \quad \mu \leq \mu + \mu_1 \leq \mu + \mu_1 + \mu_2 \leq \dots \leq \mu + \mu_1 + \dots + \mu_{i-1} \leq \\ \leq \mu + \mu_1 + \dots + \mu_{i-1} + \mu_i \leq \dots \leq r.$$

Il est clair, que le procès va terminer; il finira après i différentiations, si:

$$(30) \quad \mu_i = 0.$$

Le nombre s des paramètres essentiels est égal à

$$(31) \quad s = \mu + \mu_1 + \dots + \mu_{i-1}.$$

Quand $\mu_i = 0$, les dérivées d'ordre i des fonctions (2) ne donnent pas des équations nouvelles, qui permettraient de déterminer plus, que s paramètres (1). Ayant substitué les expressions des s paramètres (1), tirées des relations antérieurs, dans les dérivées d'ordre i , nous aurons, à côté des

$$(32) \quad (\varepsilon_0 - \mu_0) + (\varepsilon_1 - \mu_1) + \dots + (\varepsilon_{i-1} - \mu_{i-1})$$

équations

$$(33) \quad (Q_0), (Q_1), \dots, (Q_{i-1}),$$

qui ne contiennent pas les paramètres (1), encore ε_i équations, qui ne contiennent pas aussi les paramètres (1).

Désignons les premières par A), les deuxièmes par B).

L. Bianchi donne au système A), B) le nom du système de Mayer-Lie⁽¹⁾. A ce système a prêté beaucoup d'attention S. Lie⁽²⁾.

Dans les raisonnements exposés les matrices, que l'on doit construire, contiennent moins des colonnes, que les matrices correspondantes aux recherches de L. Bianchi; l'ordre i de la différentiation est habituellement plus bas, que $(r - 1)$.

On peut résumer ce qu'on vient d'établir dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME. — « On donne les fonctions :

$$(34) \quad \zeta_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad , \quad \zeta_2 = f_2, \dots, \zeta_m = f_m$$

contenant les paramètres:

$$(35) \quad a_1, a_2, \dots, a_r.$$

(1) L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (Bologna, 1928, p. 42).

(2) S. LIE und FR. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, 1888, B. I, Kapitel 10, ss. 171-204).

Déterminons le rang de la matrice :

$$(36) \quad M = \left(\left(\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(a_1, a_2, \dots, a_r)} \right) \right)$$

Qu'il soit $\mu \leq r$. Si $\mu = r$, les paramètres (35) sont essentiels. Si $\mu < r$, alors parmi les relations (34) prenons — en résolubles par rapport aux paramètres (35). Il est toujours loisible de supposer que ce soient justement les μ premières relations

$$(37) \quad \chi_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad , \quad \chi_2 = f_2, \dots, \chi_\mu = f_\mu,$$

résolubles par rapport aux premiers μ paramètres :

$$(38) \quad a_1, a_2, \dots, a_\mu.$$

En différentiant les relations (37) par rapport aux variables x_1, \dots, x_n et en écrivant les nouvelles égalités sous la forme :

$$(39) \quad U_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad , \quad U_2 = \varphi_2, \dots, U_{n\mu} = \varphi_{n\mu},$$

on cherche le rang de la matrice :

$$(40) \quad M_1 = \left(\left(\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_\mu, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n\mu})}{D(a_1, a_2, \dots, a_\mu, a_{\mu+1}, \dots, a_r)} \right) \right).$$

Qu'il soit $\mu + \mu_1 \leq r$. Si $\mu + \mu_1 = r$, les paramètres (35) sont essentiels. Si $\mu + \mu_1 < r$, alors parmi les relations (39) on en prend μ_1 , qui associées aux (37) puissent être résolues par rapport à $\mu + \mu_1$ paramètres. Ici encore il est permis de supposer que ce soient les premières relations :

$$(41) \quad U_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad , \quad U_2 = \varphi_2, \dots, U_{\mu_1} = \varphi_{\mu_1},$$

qui prises ensemble avec les relations (37), sont résolubles par rapport aux premiers $\mu + \mu_1$ paramètres :

$$(42) \quad a_1, a_2, \dots, a_\mu \quad , \quad a_{\mu+1}, \dots, a_{\mu+\mu_1}.$$

Et ainsi de suite.

En définitive nous sommes assurés que les inégalités :

$$(43) \quad \mu \leq \mu + \mu_1 \leq \dots \leq \mu + \mu_1 + \dots + \mu_{i-1} \leq \mu + \\ + \mu_1 + \dots + \mu_{i-1} + \mu_i \leq \dots \leq r$$

subsistent.

Il est clair, que le procès a sa fin; il sera achevé après i différentiations, si :

$$(44) \quad \mu_i = 0.$$

Le nombre s des paramètres essentiels (35) est égal à

$$(45) \quad s = \mu + \mu_1 + \dots + \mu_{i-1}.$$

Matematica. — *Sur les solutions linéairement indépendantes des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Nota ⁽¹⁾ di G. PFEIFFER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La question de l'indépendance linéaire des fonctions est étroitement liée à la théorie des paramètres essentiels, dans laquelle ils nous sont connus: le caractère de S. Lie ⁽²⁾, les recherches de L. Bianchi ⁽³⁾, généralisantes le caractère de S. Lie, et notre théorème ⁽⁴⁾, simplifiant les raisonnements de L. Bianchi et amenant, en même temps, aux quelques remarques de S. Lie ⁽⁵⁾.

Dans la Note présente nous voulons nous appuyer sur les recherches de L. Bianchi. L. Bianchi a démontré la proposition suivante ⁽⁶⁾:

« La condizione necessaria e sufficiente affinché r funzioni:

$$(1) \quad \varphi_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \varphi_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \dots \varphi_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_n)$$

delle n variabili x_1, x_2, \dots, x_n siano linearmente indipendenti è che la matrice:

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1 & , & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & , & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi_1}{\partial x_1^{r-1}}, \dots \\ \varphi_2 & , & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & , & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi_2}{\partial x_1^{r-1}}, \dots \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \varphi_r & , & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} & , & \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi_r}{\partial x_1^{r-1}}, \dots \end{array} \right\|$$

formata colle r funzioni, con tutte le loro derivate prime, seconde, ecc., fino all'ordine $r - 1$ sia di caratteristica r ».

Indiquons, pour abréger, la matrice (2) avec la notation:

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1932.

(2) S. LIE und FR. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, 1888, B. I, s. 13).

(3) L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (Bologna, 1928, pp. 30-37).

(4) G. PFEIFFER, *Sur les paramètres d'un système des fonctions, qui sont essentiels* (« Actes du Congrès Intern. à Zurich », 1932).

(5) LIE und FR. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, 1888, B. I, s. 183).

(6) L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (Bologna, 1928, pp. 36-37).

$$(3) \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x_1^{r-1}}, \dots \right\|_r.$$

Pour deux variables indépendantes x, y elle a la forme:

$$(4) \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-1}}, \right. \\ \left. \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-2} \partial y}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial y^{r-1}} \right\|_r,$$

$$(5) \quad \varphi_1 = \varphi_1(x, y), \quad \varphi_2 = \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_r = \varphi_r(x, y).$$

Si les fonctions (5) sont solutions d'une des équations linéaires:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A) } \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \text{B) } \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta f, \\ \text{C) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f, \\ \text{D) } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f, \\ \text{E) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma f, \end{array} \right.$$

le rang de la matrice (4) devient respectivement égal aux rangs des matrices:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-1}} \right\|_r, \\ \mathfrak{B} \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-1}} \right\|_r, \\ \mathfrak{C} \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-1}}, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-2} \partial y} \right\|_r, \\ \text{ou} \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x \partial y^{r-2}}, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial y^{r-1}} \right\|_r, \\ \mathfrak{D} \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-1}}, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial y^{r-1}} \right\|_r, \\ \mathfrak{E} \quad \left\| \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-1}}, \frac{\partial^{r-1} \varphi}{\partial x^{r-2} \partial x} \right\|_r. \end{array} \right.$$

Il est clair, que les résultats obtenus s'étendent immédiatement aux équations d'ordre plus élevé, que deux, et aux cas de plusieurs variables indépendantes.

Matematica. — *Sopra la questione della unicità per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali.* Nota ⁽¹⁾ di A. ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. A. Haar ⁽²⁾ ha dato l'importante teorema seguente:

TEOREMA: « Consideriamo il triangolo T limitato dalle rette

$$x = 0, \quad y \mp b = \mp Ax,$$

$b > 0, A > 0$. Se la funzione $z(x, y)$ supposta continua in T colle derivate p, q soddisfa alla disuguaglianza

$$(1) \quad |p| \leq A|q| + |z| + \delta,$$

$\delta > 0$ fisso, e se M è il massimo del modulo $|z(0, y)|$, allora si ha in T la disuguaglianza

$$(2) \quad |z| \leq Me^x + \delta(e^x - 1).$$

Nel caso $M = 0$ possiamo dare la generalizzazione seguente:

TEOREMA I. — « Supponiamo che per $m \geq 0, m < 1$ la funzione $\frac{z}{x^m}$ tende verso zero al tendere di $p(x, y)$ verso $P_0(0, y)$ z essendo continuo per $x > 0$ e che sia soddisfatta per $x > 0$ la disuguaglianza

$$(3) \quad |p| \leq \left(\frac{m}{x} + \frac{1-m}{x^m} \right) |z| + A|q| + \delta.$$

Allora si ha in T la disuguaglianza

$$(4) \quad |z| \leq \delta x^m \frac{e^{x^{1-m}} - 1}{1-m}.$$

Effettivamente, consideriamo la funzione

$$(5) \quad f = e^{-(1+\lambda)x^{1-m}} \left\{ \frac{z}{x^m} - \frac{\delta(e^{x^{1-m}} - 1)}{1-m} \right\}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1932.

(2) *Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles*, « C. R. », 2 luglio 1928. *Ueber Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differentialgleichungen*. « Atti del Congresso di Bologna », t. III, nonché *Zur Charakteristikentheorie*. « Acta Litterarum ac Scientiarum Univ. Szeged », 1928, t. IV.

$\lambda > 0$, che è continua in T , $= 0$ per $x = 0$. Si ha $f \leq 0$ in T , oppure esiste un punto (almeno) $P_0(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$ nel quale sussistono le due disuguaglianze

$$f_x \pm A f_y \geq 0.$$

Per questo basta che f possenga un differenziale nel senso di Stolz, dunque che χ possenga questo differenziale. Si ha dunque

$$p \pm Aq - \left(\frac{m}{x} + \frac{1-m}{x^m} \right) |\chi| - \delta - \lambda(1-m) \left[\frac{\chi}{x^m} - \frac{\delta(e^{x^{1-m}} - 1)}{1-m} \right] \geq 0,$$

ciò che contraddice (3).

Posto in $f - \chi$ al posto di χ

$$f' = e^{-(1+\lambda)x^{1-m}} \left\{ -\frac{\chi}{x^m} - \frac{\delta(e^{x^{1-m}} - 1)}{1-m} \right\}$$

perveniamo evidentemente alla disuguaglianza (4). Si perviene alla stessa disuguaglianza (4), se p soddisfa per $x > 0$ alla disuguaglianza

$$(6) \quad |p| \leq \frac{m|\chi|}{x} + A|q| + \delta e^{x^{1-m}}.$$

2. Consideriamo adesso il caso di $m = 1$. Ho mostrato⁽¹⁾ che χ è identicamente nullo, se la disuguaglianza

$$(7) \quad |p| \leq A|q| + \frac{|\chi|}{x} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} \right]$$

è soddisfatta, $\frac{\chi}{x}$ tendendo verso zero, se $x \rightarrow 0$.

Quest'ultima circostanza si presenta, se χ è la differenza $\chi_2 - \chi_1$ di due integrali dell'equazione

$$(8) \quad p = F(x, y, \chi, q),$$

e se si ha $\chi_1 = \chi_2$ per $x = 0$, p, q essendo *continue* nei punti $x = 0$.

Consideriamo la funzione

$$(9) \quad f = \left\{ \frac{\chi}{x} - \frac{\delta}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^\varepsilon} \right\} e^{-\frac{m}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^\alpha}},$$

(1) *Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*
« Bulletin de la Société math. de Grèce », p. XII, 1931.

$m > 0$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $m\alpha > 1$, $\alpha \leq \varepsilon$. Abbiamo

$$f_x = e^{\dots} \left\{ \frac{p}{x} - \frac{\tilde{\chi}}{x^2} - \frac{\delta}{x \left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} - \frac{m\alpha}{x \left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}} \left[\frac{\tilde{\chi}}{x} - \frac{\delta}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\varepsilon}} \right] \right\}, \quad f_q = e^{\dots} \frac{q}{x}.$$

Vale dunque la disuguaglianza

$$\tilde{\chi} \leq \frac{\delta x}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\varepsilon}}$$

oppure

$$p \geq A |q| + \frac{|\tilde{\chi}|}{x} \left[1 + \frac{m\alpha}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}} \right] + \frac{\delta}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} \left[1 - \frac{m\alpha}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\alpha}} \right].$$

Abbiamo anche la disuguaglianza

$$-\tilde{\chi} \leq \frac{\delta x}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\varepsilon}},$$

oppure

$$-p \geq A |q| + \frac{|\tilde{\chi}|}{x} \left[1 + \frac{m\alpha}{x \left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}} \right] + \frac{\delta}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} \left[1 - \frac{m\alpha}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\alpha}} \right].$$

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA II. - « Supponiamo che per $x > 0$ si abbia la disuguaglianza

$$(10) \quad |p| \leq A |q| + \frac{|\tilde{\chi}|}{x} \left[1 + \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}} \right] + \frac{\delta}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}},$$

allora sussiste altresì la disuguaglianza

$$(11) \quad |\tilde{\chi}| \leq \frac{\delta'}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\varepsilon}},$$

δ' essendo un numero > 0 e $> \delta$.

La disuguaglianza (10) può anche essere sostituita dalla

$$|p| \leq A |q| + \frac{|\tilde{\chi}|}{x} + \frac{\delta}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{1+\varepsilon}},$$

e la (11) dalla

$$|\tilde{\chi}| \leq \frac{\delta}{\varepsilon \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\varepsilon}}.$$

3. Possiamo nel teorema II sostituire δ all'espressione $\frac{\delta}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}}$

considerando la funzione

$$(12) \quad f = \left(\frac{\chi}{x \log \frac{1}{x}} - \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^{\varepsilon}},$$

$\varepsilon > 0$. Effettivamente supponendo che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(13) \quad |p| \leq \frac{|\chi|}{x} \left[1 - \frac{1+\varepsilon'}{\log \frac{1}{x}} \right] + \delta + A|q|,$$

con $\varepsilon' > \varepsilon$ si mostra che χ deve soddisfare alla disuguaglianza

$$(14) \quad |\chi| \leq \frac{\delta}{\varepsilon} x \log \frac{1}{x}.$$

Abbiamo così il

TEOREMA III. — « La disuguaglianza (13) implica la disuguaglianza (14) con $\varepsilon < \varepsilon'$ ».

Si può anche sostituire δ con un'espressione più favorevole. Consideriamo la funzione

$$(15) \quad f = \chi \log \frac{1}{x} - \frac{\delta}{\log \frac{1}{x}},$$

allora si vede subito che la disuguaglianza

$$(16) \quad |p| \leq A|q| + \frac{|\chi|}{x \log \frac{1}{x}} + \frac{\delta'}{x \left(\log \frac{1}{x} \right)^3},$$

comè $\delta' < \delta$ trae la disuguaglianza

$$(17) \quad |\chi| \leq \frac{\delta}{\left(\log \frac{1}{x} \right)^2}.$$

Si ha così il

TEOREMA IV. — « Si ha la disuguaglianza (17) se la disuguaglianza (16) con $\delta' < \delta$ è soddisfatta ».

4. Consideriamo infine un sistema di *due* equazioni lineari alle derivate parziali

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = A_1 \frac{\partial U}{\partial y} + B_{11} U + B_{12} V, \\ \frac{\partial V}{\partial x} = A_2 \frac{\partial V}{\partial y} + B_{21} U + B_{22} V. \end{cases}$$

Questo sistema è stato considerato dal sig. Haar che ha ottenuto un teorema molto importante, che possiamo subito generalizzare. Supponiamo che U, V siano continui colle derivate in T e nulle per $x = 0$. I coefficienti A_i abbiano il modulo massimo A essendo continui in T . I coefficienti B continui per $x > 0$ siano continui sopra l'asse delle y come funzioni di y e verifichino le disuguaglianze

$$(19) \quad \begin{cases} |B_{11}|, |B_{22}| \leq \frac{1}{x \log \frac{1}{x}}, \\ |B_{12}|, |B_{21}| \leq \frac{1}{x \left(\log \frac{1}{x}\right)^3}. \end{cases}$$

Sieno M_U, M_V i moduli massimi di U e V . Si hanno le disuguaglianze

$$\begin{aligned} |U_x| &\leq A |U_y| + \frac{|U|}{x \log \frac{1}{x}} + \frac{M_v}{x \left(\log \frac{1}{x}\right)^3}, \\ |V_x| &\leq A |V_y| + \frac{|V|}{x \log \frac{1}{x}} + \frac{M_u}{x \left(\log \frac{1}{x}\right)^3}. \end{aligned}$$

L'applicazione del teorema IV conduce alle disuguaglianze

$$(20) \quad |U| \leq \frac{(1 + \varepsilon) M_v}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^2}, \quad |V| \leq \frac{(1 + \varepsilon) M_u}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Si perviene così al

TEOREMA V. — « L'unica soluzione U, V del sistema, continua colle derivate e nulla sopra l'asse delle y è *identicamente nulla*, se i coefficienti A, B soddisfanno alle condizioni (19) ed alle altre condizioni sopra enunciate ».

Matematica (Geometria). — *Rivendicazione di priorità.* Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

In un lavoro pubblicato nel 1928, R. WEITZENBÖCK ⁽²⁾ ha dimostrato che nello spazio ordinario esistono *5-ple di rette* (non aventi una secante comune), tali che 4 rette qualunque della *5-pla* ammettono una sola secante; le 5 secanti in tal guisa determinate costituiscono una nuova *5-pla*, che è analoga alla prima: e precisamente, la relazione fra le due *5-ple* è scambievole, ed inoltre le loro 10 rette appartengono ad uno stesso complesso lineare. Il risultato è stato ritrovato poco appresso per altra via da G. SCHAAKE ⁽³⁾.

Successivamente, D. BARBILIAN ⁽⁴⁾ ha provato esistere nel piano *biquintuple di cerchi orientati*, tali che 4 qualunque cerchi di una *5-pla* ammettono un cerchio dell'altra *5-pla* come unico cerchio tangente. Della cosa si son pure occupati poco dopo G. TZITZÉICA ⁽⁵⁾, B. GAMBIER ⁽⁶⁾, e — recentissimamente — E. A. WEISS ⁽⁷⁾. Quest'ultimo ha posto in rilievo il legame che intercede fra i due risultati di geometria dello spazio e del piano, attraverso alle note rappresentazioni delle rette di un complesso lineare di S_3 e dei cerchi orientati di un piano, coi punti di una quadrica V_3^2 di S_4 ; ed ha così ricondotto l'una e l'altra questione, all'esistenza — direttamente provata — di piramidi in pari tempo inscritte e circoscritte alla V_3^2 .

Ora TUTTI i risultati accennati già sono stabiliti, insieme a moltissimi altri, in una Memoria anteriore — da me presentata a questa R. Accademia fin dal 1925 e pubblicata nel 1927 — che pare sia sfuggita all'attenzione

(1) Nella seduta del 6 novembre 1932.

(2) R. WEITZENBÖCK, *Ueber eine Konfiguration von 10 Geraden im projektiven R_3* , «Proc. Amsterdam Ak. d. Wet.», 31 (1928), p. 133.

(3) G. SCHAAKE, *On a Configuration of Ten Lines in Space*, «Proc. Amsterdam Ak. d. Wet.», 31 (1928), p. 715.

(4) D. BARBILIAN, *Les cas d'exception de certaines propriétés quadratiques*, «Bul. de Math. et de Phys. de l'Ec. Polyt.», 1 (Bucarest, 1929), p. 12.

(5) G. TZITZÉICA, *Sur certaines propriétés quadratiques*, «Bul. de Math. et de Phys. de l'Ec. Polyt.», 1 (Bucarest, 1929), p. 16.

(6) B. GAMBIER, *Propriétés quadratiques et leurs cas d'exception. Cycles tangentes dans le plan ou paratactiques dans l'espace*, «Bull. des sciences math.», 55 (1931).

(7) E. A. WEISS, *Die Doppelfünfen von R. WEITZENBÖCK und D. BARBILIAN*; di questo lavoro, attualmente in corso di stampa nei Proceedings di Amsterdam, ho avuto cortese notizia dall'A. (che l'ha redatto senza conoscere la mia Memoria, citata in seguito).

degli studiosi ⁽¹⁾. Mi permetto quindi di segnalare, anche perchè essa ha uno sviluppo notevolmente più semplice ed armonico di quello dei lavori citati, e penetra più addentro nelle questioni trattate: a tal riguardo mi accontento di sottolineare lo studio da me fatto delle varie suddette configurazioni (e di altre ancora), dal punto di vista dei gruppi di trasformazioni che le mutano in sè, nonchè il loro ampliamento a configurazioni più estese (opportunamente collegate ad altre configurazioni già note) godenti di numerose ed eleganti proprietà.

Meccanica. — *Sulla teoria della « scia » nei liquidi perfetti.* — *Caso del cilindro rotondo.* Nota ⁽²⁾ di M. GLEIJESES, presentata dal Corrisp. F. GIORDANI.

Con lo stesso titolo di questa breve Nota, fu presentata alla R. Accademia dei Lincei, nella seduta del 1° novembre 1931, una Nota del prof. A. Quarleri, che avrebbe dovuto dare — ma a me sembra non abbia dato — la soluzione analitica del problema del moto del cilindro circolare con scia solidale, in liquido perfetto. In questi ultimi anni, sono state pubblicate diverse determinazioni numeriche dei coefficienti della serie di potenze $\Omega(\zeta)$ che risolve ⁽³⁾ il problema, tutte sensibilmente concordanti fra loro e con qualche altra che non fu pubblicata; e ciò bastava per ottenere gli elementi del moto, con approssimazione più che sufficiente per le applicazioni tecniche; e, se la ipotesi della scia solidale fosse un po' più vicina alla realtà fisica, l'Idrodinamica non avrebbe avuto altro a desiderare intorno alla soluzione dell'interessante problema.

Restava però sempre ancora da risolvere il problema analitico, consistente nella determinazione di una serie di Taylor, convergente per $|\zeta| \leq 1$

$$(1) \quad \Omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{2n+1}$$

e soddisfacente alle seguenti condizioni:

(1) B. SEGRE, *Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 e una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario*, «Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei», serie 6^a, t. 2 (1927), p. 204; questo lavoro fu presentato all'Accademia, in occasione del concorso pel premio ministeriale per le Scienze matematiche, scaduto il 31 dicembre 1925.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1932.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», t. XXIII, 1907.

1. La parte reale Θ ed il coefficiente T dell'immaginario di Ω , devono, sul contorno del cerchio di regolarità $|\zeta| = 1$, dove divengono funzioni del solo argomento σ della ζ , verificare la relazione:

$$(2) \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{2a^2}{r} \sin \sigma (1 + \sin \sigma) \cdot e^T, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi$$

in cui r è il raggio del cerchio, sezione retta del cilindro, ed a è una costante, che risulta determinata quando si è definita la Ω .

2. Le due associate Θ e T devono inoltre verificare le eguaglianze:

$$\Theta(\pi - \sigma) = -\Theta(\sigma) \quad ; \quad T(\pi - \sigma) = T(\sigma).$$

Con la relazione:

$$T(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{d\sigma_1} \log \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} d\sigma_1$$

dovuta al Dini ed al Levi-Civita, si elimina la T e l'equazione funzionale (2) diventa anche integro-differenziale nell'incognita Θ .

L'A., dopo alcune considerazioni, applicando un recente metodo di approssimazione dovuto ad Hammerstein, perviene alla seguente soluzione:

$$(3) \quad \Theta(\sigma) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\cos(2n-1)\sigma}{(2n-1)^2} = \begin{cases} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\sigma}{4} \right) & \text{in } 0 < \sigma < \pi \\ \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi\sigma}{4} - \frac{3\pi^2}{8} \right) & \text{in } \pi < \sigma < 2\pi \end{cases}$$

$$(4) \quad T(\sigma) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\sin(2n-1)\sigma}{(2n-1)^2}$$

con C_1 costante reale, da cui senz'altro:

$$\Omega(\zeta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\zeta^{2n-1}}{(2n-1)^2}.$$

Ora a me pare che queste due espressioni di Θ e T , che, secondo l'A., rappresenterebbero la desiderata soluzione, mentre sono ovviamente associate, sono ben lontane dal soddisfare all'equazione funzionale (2). Limitandoci ad esempio alla semicirconferenza $0 < \sigma < \pi$, la (3) dà:

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = -\frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

per cui la (2) diviene:

$$e^{\tau} = \frac{-\frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r}{2a^2}}{\sin \sigma (1 + \sin \sigma)}$$

ossia, indicando con k la costante positiva del numeratore:

$$(5) \quad T = \log \frac{k}{\sin \sigma (1 + \sin \sigma)}.$$

Questa dovrebbe naturalmente coincidere con l'espressione (4) trovata dall'A.; invece è ben diversa da essa. Nei dintorni di $\sigma = \frac{\pi}{2}$, le due funzioni (4) e (5) hanno lo stesso andamento e, per un conveniente valore di k , coincidono sensibilmente; ma col tendere di σ a zero, sono molto differenti l'una dall'altra.

Una determinazione grossolanamente approssimata della C_1 , fatta al solo scopo di conoscerne l'ordine di grandezza, dà:

$$\frac{C_1}{\sqrt{\pi}} = -3.2 \div -3.3$$

e l'arco di abbracciamento del fluido sul cilindro, dalla prora al punto di distacco, ossia:

$$-\Theta(0) = -\frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi^2}{8}$$

risulterebbe maggiore di π , il che, dal punto di vista fisico lascerebbe, *forse*, un po' perplessi!

La costante $\frac{2a^2}{r}$ risulterebbe:

$$-\frac{C_1}{\sqrt{\pi}} (1 + 1 + 1 + \dots)$$

e così via.

La soluzione dell'A. è inoltre in completo disaccordo con le soluzioni approssimate, tutte concordanti fra loro ed in buona armonia con la realtà fisica, sempre, s'intende, nell'ambito delle premesse (scia solida in liquido perfetto); e ciò avrebbe potuto destargli qualche sospetto sull'esattezza dei risultati ottenuti.

Il coefficiente b_0 di ζ nella serie (1), equivalente al $\frac{C_1}{\sqrt{\pi}}$ dell'A., oscilla infatti, secondo le diverse determinazioni numeriche, intorno al valore

— 0.94. E, se si ammette, come sembra⁽¹⁾, che sia $\frac{2 a^2}{r} = \frac{4 + \pi}{2 \pi}$ e che il coefficiente di resistenza $\frac{\pi a^2}{4} (2 + b_0)^2$ sia precisamente $\frac{1}{2} r$, risulta:

$$b_0 = \sqrt{\frac{8}{4 + \pi}} - 2 = - 0.941 \cdot 606 \dots$$

Il valore di Brodetsky è — 0,9415; il $\frac{C_r}{\sqrt{\pi}}$ dell'A. è invece — 3.2 ÷ — 3.3, come si è accennato sopra.

La risoluzione analitica dell'interessante problema è dunque ancora da venire.

Meccanica. — *Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare.* Nota di R. ZOJA, pres. dal Corrisp. C. GUIDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Misure magnetiche a Mogadiscio.* Nota di M. BOSSOLASCO, pres. dal Socio L. PALAZZO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) PISTOLESI, *Aerodinamica*, nota a p. 349.

Fisica. — *Corollario al teorema della derivazione delle funzioni definite da integrali.* — *Applicazione ai metodi di misura sperimentali delle grandezze fisiche.* Nota ⁽¹⁾ di N. CARRARA, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. Sia $f(x, y)$ una funzione (reale) delle due variabili (reali) x, y , la quale in un campo C a due dimensioni sia finita, continua e derivabile rispetto alla y . Siano $a = a(y), b = b(y)$, due funzioni finite, continue e derivabili della variabile y , tali che per $a(y_0) \leq x \leq b(y_0)$ tutti i punti xy_0 appartengano al campo C .

Come è ben noto, la funzione

$$F(y) = \int_a^b f(xy) dx$$

ha, in ogni punto y_0 dell'intervallo in cui è definita, una derivata determinata e finita, data dalla formula:

$$(1) \quad F'(y_0) = \int_{a_0}^{b_0} f'_y(xy_0) dx + b'(y_0)f(b_0 y_0) - a'(y_0)f(a_0 y_0).$$

Se la $f(xy)$ è indipendente dalla y , la (1) si riduce a

$$F'(y_0) = b'(y_0)f(b_0) - a'(y_0)f(a_0),$$

e, analogamente,

$$F'(y_1) = b'(y_1)f(b_1) - a'(y_1)f(a_1),$$

$$F'(y_2) = b'(y_2)f(b_2) - a'(y_2)f(a_2),$$

.....

Se la $f(x)$ è finita e continua da $-\infty$ a $+\infty$, e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$ ed inoltre

$$(2) \quad a'(y_{n+1})f(a_{n+1}) = b'(y_n)f(b_n),$$

sommando membro a membro le precedenti, otteniamo:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} F'(y_n) = 0.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1932.

Così, ad esempio, per $b(y) = a(y + p)$, (p costante), ed $y_1 - y_0 = y_2 - y_1 = \dots = p$, la (2) è soddisfatta; infatti

$$a(y_{n+1}) = a(y_n + p) = b(y_n),$$

ed

$$a'(y_{n+1}) = b'(y_n).$$

In questo caso, consideriamo la funzione

$$G(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

che rappresenta il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $b-a$.

Avremo ancora

$$(b_0 - a_0) G'(y_0) + (b'_0 - a'_0) G(y_0) = b'_0 f(b_0) - a'_0 f(a_0)$$

e

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (b'_n - a'_n) G(y_n) + \sum_{-\infty}^{+\infty} (b_n - a_n) G'(y_n) = 0.$$

In particolare, se $a = x$, $b = x + p$, segue:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} G'(x_0 + np) = 0,$$

cioè la somma, estesa da $-\infty$ a $+\infty$, delle derivate della funzione $G(x)$, che rappresenta il valor medio della $f(x)$ in ogni intervallo $x, x+p$, nei punti equidistanti $\dots x_0 - 2p, x_0 - p, x_0, x_0 + p, x_0 + 2p, \dots$ è zero, qualunque sia p e qualunque sia il punto x_0 inizialmente scelto.

Se invece $a = x - p$, $b = x + p$, è

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} G'(x_0 + 2np) = 0$$

e così via.

2. In modo affatto analogo si ottiene, per $a = x$, $b = x + p$,

$$(3) \quad p \sum_0^{+\infty} G'(x_0 + np) = A - f(x_0)$$

$$(4) \quad p \sum_0^{-\infty} G'(x_0 + np) = f(x_0 + p) - A.$$

La (3) e la (4) risolvono un problema assai interessante per le ricerche sperimentali. Sia $f(x)$ una grandezza fisica, funzione di un'altra grandezza fisica x (osserviamo subito che le condizioni imposte per la $f(x)$ al par. 1,

sono soddisfatte nella maggior parte dei casi pratici), e si voglia raggiungere la conoscenza della $f(x)$, con un metodo di misura che consenta di valutare soltanto il valor medio della $f(x)$ stessa, in ogni intervallo $x, x + p$. Un tale metodo di misura, invece dei valori della grandezza desiderata, dà quelli della grandezza $G(x)$.

Orbene, supposto noto il valore A (finito), che la $f(x)$ assume per $x = \pm \infty$, la (3) ne fornisce il valore nel punto x_0 , e la (4) nel punto $x_0 + p$, e poichè x_0 e p sono arbitrarie, la (3) e la (4) forniscono i valori della $f(x)$ per qualunque x .

È interessante rilevare, che, secondo la (3), il valore della $f(x)$ nel punto x_0 si ottiene sommando i valori delle derivate della funzione nota $G(x)$, nei punti $x_0, x_0 + p, x_0 + 2p, \dots$, cioè soltanto in punti a destra di x_0 , mentre, secondo la (4), vanno sommati, per ottenere il medesimo valore della $f(x)$, i valori delle derivate di $G(x)$ nei punti $x_0 - p, x_0 - 2p, \dots$, cioè soltanto in punti a sinistra di x_0 .

Se il valore di $f(x)$ è noto, invece che per $x = \pm \infty$, per $x = \bar{x}$, abbiamo

$$p \sum_0^{\infty} G'(\bar{x} + np) = A - f(\bar{x})$$

sicchè, le (3), (4) possono scriversi

$$p \sum_0^{\infty} (G'(x_0 + np) - G'(\bar{x} + np)) = f(\bar{x}) - f(x_0),$$

$$p \sum_0^{\infty} (G'(x_0 + np) + G'(\bar{x} + np)) = f(x_0 + p) - f(\bar{x}),$$

che risolvono il medesimo problema.

Formule analoghe alla (3) e alla (4) per il caso $a = x - p, b = x + p$, sono state ottenute da E. Paolini del R. I. E. C. Il presente lavoro è stato condotto allo scopo di dare la massima generalità possibile alle considerazioni del Paolini stesso.

Fisica. — *Righe di quadrupolo negli spettri di raggi X.* Nota II di E. SEGRÈ, presentata⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Scopo di questa breve Nota è di aggiungere alcune osservazioni teoriche e interpretare nuovo materiale sperimentale raccolto durante l'ultimo anno che confermano l'attribuzione delle righe proibite di raggi X all'irradiazione di quadrupolo, di cui si è parlato in una Nota precedente.

In primo luogo Brinkman⁽²⁾ ha dimostrato un'ulteriore regola di selezione per l'irradiazione dei multipoli, tale regola nel caso che ci interessa, dei quadrupoli, proibisce i passaggi $J = 0 \rightarrow J' = 1$; $J = \frac{1}{2} \rightarrow J' = \frac{1}{2}$.

Orbene non è stata osservata alcuna riga che violi tale ulteriore limitazione, ma anzi tra i livelli K, L, M, tale regola abbassa il numero delle combinazioni di quadrupolo possibili da 8 a 7, tutte effettivamente osservate. Viene così tolto un piccolo inconveniente alla nostra interpretazione. Nella Nota precedente avevamo infatti rilevato che tra i livelli K, L, M, erano possibili 8 combinazioni mentre ne erano state osservate 7. La riga mancante $M_I - K$ è effettivamente proibita anche per quadrupolo trattandosi di passaggio $J = \frac{1}{2} \rightarrow J' = \frac{1}{2}$, e la sua assenza costituisce una ulteriore notevole conferma della nostra interpretazione.

Inoltre sono state trovate sperimentalmente⁽³⁾ negli elementi da Ir a Th le righe $L_{III} - N_{II}$, $L_{III} - N_{II}$ nonché le righe $L_{III} - O_{II}$, $L_{III} - O_{III}$, $L_{III} - P_{II}$, $L_{III} - P_{III}$. Tali righe, proibite per dipolo, sono tutte permesse come irradiazione di quadrupolo e in particolare le prime due fanno parte delle combinazioni possibili tra i livelli segnati nella figura della Nota precedente; anzi ormai tra i livelli segnati nella suddetta figura rimangono da scoprire solo 2 righe di quadrupolo: $L_I - N_{IV}$ e $L_{II} - N_{III}$.

Per le serie M e N a causa delle difficoltà sperimentali non si hanno dati su righe proibite. È anche da considerarsi estremamente dubbio e non provato che la riga ν della serie L sia effettivamente un doppietto⁽⁴⁾, il che contraddirebbe alla nostra tesi, poichè tale riga a causa della piccola separazione tra i livelli N_{VI} e N_{VII} non è risolubile spettroscopicamente.

Sarebbe desiderabile avere misure di intensità di righe proibite alquanto più precise delle attuali poichè esse potrebbero fornire nuovi controlli sulla correttezza dell'interpretazione di tali righe.

(1) Nella seduta del 6 novembre 1932.

(2) H. C. BRINKMAN, *Dissertation*, Utrecht, 1932.

(3) S. KAUFMANN e F. K. RICHTMEYER, « *Phys. Rev.* », 40, p. 1032 (1932).

(4) S. IDEI, « *Science Reports-Tôhoku Imp. Univ.* », 19, 559 (1930).

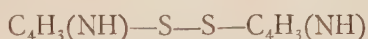
Chimica. — *Rodanpirroli, tiopirroli e disolfuri pirrolici*⁽¹⁾.
Nota⁽²⁾ di P. PRATESI, presentata dal Socio M. BETTI.

Rodanpirroli col gruppo —SCN sostituito nel nucleo sono tuttora sconosciuti; mi è sembrato interessante intraprenderne lo studio in vista dell'interesse che presentano alcuni derivati pirrolici che da essi potrebbero facilmente prendere origine. Dai rodanpirroli infatti era prevedibile si potesse con facilità passare ai tiopirroli (—SH) per riduzione ed ai ditiopirroli (—S—S—); e dai tiopirroli, come probabilmente anche direttamente dai rodanpirroli, con mezzi blandi di ossidazione, agli acidi pirrolsolfonici ancora sconosciuti, per la sintesi dei quali mal si presta la solfonazione diretta in seguito alla grande sensibilità dell'anello pirrolico di fronte ad agenti troppo energici.

Nella letteratura chimica sono descritti alcuni α e β tioeteri misti del tipo

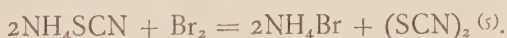


e due disolfuri del tipo

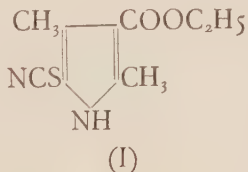


ottenuti facendo agire $\text{C}_6\text{H}_5\text{—SCl}$ e rispettivamente SCl_2 o S_2Cl_2 su pirroli sostituiti⁽³⁾. Recentemente B. Oddo⁽⁴⁾ ha cercato di ottenere l' α -tiopirrolo facendo agire lo solfo sul magnesil-pirrolo; la reazione conduce però a prodotti neri non definiti che hanno l'aspetto di neri di pirrolo solforati.

Per l'ottenimento dei rodanpirroli ho trovato che si presta ottimamente il metodo di rodanazione diretta mediante solfocianuri alcalini e bromo secondo l'equazione:



Dal 2·4·dimetil·3·carboetossipirrolo fu ottenuto il 2·4·dimetil 3·carboetossi 5·rodanpirrolo



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chim. Generale della R. Università di Bologna.

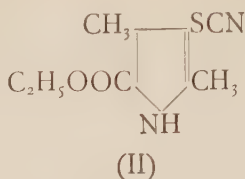
(2) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1932.

(3) H. FISCHER, « Ann. », 461, 268 (1928); H. FISCHER e HERRMANN, « Zeit. f. physiol. Ch. », 122, 16 (1922).

(4) B. ODDO, « Gazz. Chim. It. », 62, 299 (1932).

(5) H. P. KAUFMANN e W. OEHRING, « Ber. », 59, 187 (1926).

Dal 2·4·dimetil 5·carboetossipirrolo il 2·4·dimetil 5·carboetossi 3·rodan-
pirrolo, isomero del precedente:

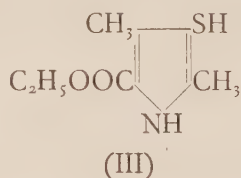


Fu tentata anche la rodanazione completa del pirrolo semplice nell'intento di arrivare al tetra-rodanpirrolo e da questo al tetratiopirrolo, ma, contro l'aspettativa, ottenni solo un dirodanpirrolo a P. F. 114°.

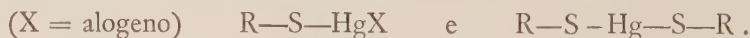
La rodanazione decorre quindi in modo più blando della alogenazione diretta, poichè, come è noto, gli alogeni sostituiscono tutti e quattro gli idrogeni del nucleo pirrolico. Mi riservo di ricercare la monorodanazione del pirrolo, che, per successiva riduzione del gruppo solfocianico, dovrebbe condurre al più semplice tiofenolo pirrolico, probabilmente all' α -tiopirrolo.

La rodanazione del 2·metil 5·carboetossipirrolo condusse soltanto ad un 2·metil 5·carboetossi-monorodanpirrolo P. F. 152° in cui resta da stabilire la posizione occupata dal gruppo SCN.

I rodanpirroli sono composti molto stabili, indifferenti verso le basi. Posseggono una spiccatissima tendenza alla cristallizzazione; cristallizzano per lo più in lunghi aghi bianchi di aspetto sericeo e la loro purificazione è facile per cristallizzazione dall'acqua o dall'alcool. Potrebbero servire anche all'identificazione di singoli pirroli. Per riduzione con zinco e acido acetico si giunge facilmente e con buoni rendimenti ai tiopirroli. Viene qui descritto il 2·4·dimetil 5·carboetossi 3·tiopirrolo



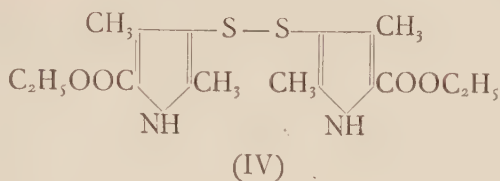
che si mostrò uno dei più stabili fra quelli preparati. La riduzione del gruppo solfocianico a solfidrico si compie anche con sodio e alcool amilico o etilico, ma in questi casi si ottengono mescolanze del tiopirrolo col corrispondente disolfuro. Come era facilmente prevedibile i tiopirroli mostrano una grande analogia coi tiofenoli. Sono solubili negli idrati e insolubili nei bicarbonati alcalini, reagiscono facilmente coi sali mercurici dando origine ai corrispondenti derivati del tipo



I tiopirroli si ossidano facilmente all'aria, anche allo stato solido, dando origine ai corrispondenti disolfuri. L'ossidazione si compie rapidamente e

in modo completo mediante ebollizione all'aria della loro soluzione alcoolica e viene accelerata dal carbone animale (azione catalitica di superficie).

Dal 2·4·dimetil 5·carboetossi 3·tiopirrolo fu ottenuto il Bis [2·4·dimetil 5·carboetossi·3·pirroldisolfuro]:



Sulle ricerche tendenti all'ottenimento di acidi pirroldisolfonici sarà riferito in seguito. Particolare interesse assume poi la rodanazione delle porfirine in vista dell'ottenimento di acidi porfirinsolfonici solubili in acqua e dell'importanza che presenta lo studio di tali composti dal punto di vista biologico. La rodanazione della pirroporfirina e della corrispondente emina si compiono facilmente; le ricerche tendenti alla loro separazione allo stato puro e possibilmente alla loro trasformazione in acidi porfirinsolfonici vengono continuate.

PARTE SPERIMENTALE.

Per la rodanazione dei pirroli si è seguito sempre lo stesso procedimento. Si facevano soluzioni concentrate in acido acetico glaciale o in alcool metilico del pirrolo ($R \cdot H$), del solfocianuro d'ammonio e del bromo (generalmente una parte di bromo e tre parti di solvente), presi in quantità esattamente calcolata secondo l'equazione generale:



La soluzione del bromo veniva versata lentamente in quelle riunite del pirrolo e del solfocianuro, a temperatura ordinaria; solo nel caso del pirrolo semplice fu raffreddato con neve e sale. Mentre il bromo spariva istantaneamente, il rodanderivato precipitava; veniva poi fortemente diluito con acqua, filtrato il prodotto alla pompa e lavato a fondo con acqua. In casi particolari si può estrarre il rodanpirrolo con etere. Rendimenti dal 90 al 95 % per i pirroli esaminati.

2·4·dimetil 3·carboetossi 5·rodanpirrolo (formula I).

Dal 2·4·dimetil 3·carboetossi pirrolo in acido acetico glaciale con rendimento in prodotto greggio del 94 %. Cristallizza dall'alcool acquoso in cristalli bianchi finissimi, capelliformi. P. F. 169°,5.

Analisi:

mg. 4,625 di sost. dettero mg. 9,090 di CO_2 e mg. 2,290 di H_2O
 mg. 5,656 di sost. dettero mg. 5,814 di BaSO_4

Trovato	C %	53,61	H %	5,54	S %	14,12
Calcolato per $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{O}_2\text{N}_2\text{S}$	»	53,57	»	5,35	»	14,28

Poco solubile in acqua bollente, solubile in alcool e in etere.

2·4·dimetil 5·carboetossi 3·rodanpirrolo (formula II).

Dal 2·4·dimetil 5·carboetossipirrolo in acido acetico con rendimento del 93 % in prodotto greggio. Cristallizza dall'alcool in magnifici cristalli di lucentezza sericea. P. F. 198°–199°.

Analisi:

mg. 4,928 di sost. dettero mg. 9,715 di CO_2 e mg. 2,450 di H_2O
 mg. 3,698 di sost. dettero cc. 0,400 di N_2 secco a 17° e 730 mm.
 mg. 6,705 di sost. dettero mg. 6,865 di BaSO_4

Trovato	C %	53,77	H %	5,56	N %	12,23	S %	14,06
Calcolato								
per $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{O}_2\text{N}_2\text{S}$	»	53,57	»	5,35	»	12,50	»	14,28

Nei solventi organici è assai meno solubile dell'isomero precedente.

Un *dirodanpirrolo* $\text{C}_4\text{H}_2(\text{NH})(\text{SCN})_2$ P. F. 114° fu l'unico prodotto definito ottenuto in un tentativo di rodanazione completa del pirrolo in alcool metilico a —10°. Di esso sarà riferito più ampiamente in seguito, insieme alle ricerche sulla rodanazione parziale del pirrolo.

2·4·dimetil 5·carboetossi 3·tiopirrolo (formula III).

Gr. 5 di 2·4·dimetil 5·carboetossi 3·rodanpirrolo sciolti in alcool caldo vennero ridotti a b.m. con zinco in polvere e poco acido acetico concentrato. Dopo circa 2 ore la riduzione è terminata; dal liquido filtrato caldo dallo zinco rimasto indisciolti cristallizza in aghetti il tiopirrolo. Il rendimento è circa del 50 %, il prodotto è già assai puro. Per l'analisi fu ricristallizzato subito dall'alcool tiepido, iniziando la separazione del tiode-rivato mediante aggiunta di acqua. Fu seccato nel vuoto su acido solforico a temperatura ordinaria. P. F. 140°.

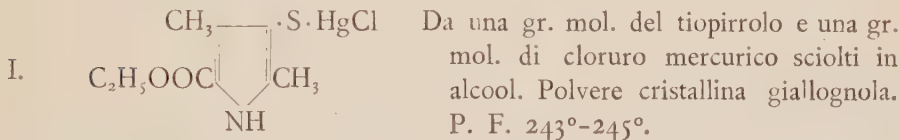
Analisi:

mg. 4,157 di sost. dettero mg. 8,225 di CO₂ e mg. 2,425 di H₂O

Trovato	C %	53,96	H %	6,52
Calcolato per C ₉ H ₁₃ O ₂ NS	»	54,25	»	6,53

Solubile in alcali, in alcool e in etere. All'aria si ossida lentamente a disolfuro.

Derivati mercurici.

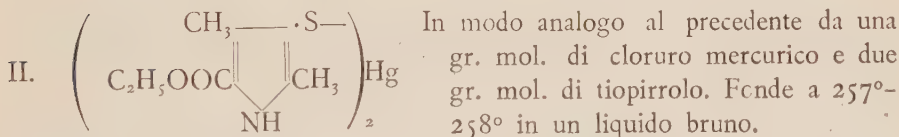


Analisi:

mg. 4,142 di sost. dettero cc. 0,119 di N₂ a 23° e 738 mm.

mg. 6,019 di sost. dettero mg. 1,920 di AgCl

Trovato	N %	3,22	Cl %	7,89
Calcolato per C ₉ H ₁₂ O ₂ NSHgCl	»	3,22	»	8,16



Analisi:

mg. 3,868 di sost. dettero cc. 0,161 di N₂ a 25° e 737 mm.

mg. 4,875 di sost. dettero mg. 3,800 di BaSO₄

Trovato	N %	4,62	S %	10,71
Calcolato per C ₁₈ H ₂₄ O ₄ N ₂ S ₂ Hg	»	4,69	»	10,74

Bis [2·4·dimetil 5·carboetossi 3·pirroldisolfuro]. (Formula IV).

Si prepara comodamente mantenendo all'ebollizione per 15-20 minuti, in presenza di carbone animale, una soluzione alcoolica del 2·4·dimetil 5·carboetossi 3·tiopirrolo. Per raffreddamento della soluzione filtrata cristallizza il disolfuro, già puro, con rendimento quantitativo.

Ricristallizzato dall'alcool fonde a 234°. Polvere bianca insolubile negli alcali, poco solubile in alcool.

Analisi:

mg. 3,835 di sost. dettero mg. 7,725 di CO_2 e mg. 2,145 di H_2O
 mg. 9,95 di sost. dettero mg. 0,605 di N a 22° e 755 mm.

Trovato	C %	54,95	H %	6,26	N %	6,99
Calcolato per $\text{C}_{18}\text{H}_{24}\text{O}_4\text{N}_2\text{S}_2$	»	54,53	»	6,05	»	7,07

Peso molecolare (micro-determinazione secondo Rast)

mg. 0,368 in mg. 4,390 di canfora dettero $\Delta = 7,6^\circ$

mg. 0,255 in mg. 3,250 di canfora dettero $\Delta = 7^\circ,0$.

Peso molecolare Trovato 442 ; 448 Teorico 396,2.

Lo stesso disolfuro fu ottenuto direttamente dal corrispondente rodand-derivato per riduzione con sodio e alcool etilico.

Geologia. — *La posizione tettonica delle argille scagliose tra la catena mesozoica di Gubbio e la valle Tiberina.* Nota ⁽¹⁾ di O. RENZ, presentata dal Corrisp. G. ROVERETO.

Parecchie pubblicazioni e cenni esistono già sulla posizione stratigrafica e tettonica di alcuni lembi di argille scagliose ad est della valle Tiberina, più precisamente tra la valle dell'Assino e Schifanoja.

Il Lotti ⁽²⁾, in seguito ad osservazioni nel bacino della Rasina presso Schifanoja e presso S. Giorgio sulla sinistra del fosso Acquasanta e fra Castiglione e Monte Lovesco ed in altre località, dimostra con due sezioni la sovrapposizione di questi terreni sulla formazione marnoso-arenacea, che secondo questo autore rappresenta l'eocene medio.

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1932.

(2) B. LOTTI, *Relazione sulla campagna geologica dell'anno 1912*, « Boll. R. Comit. geol. », vol. XLIV, fasc. I, 1914; *Sulla questione del terziario dell'Umbria*, ibid, vol. XLIV, 1913-14; *Relazioni preliminari sulla campagna geologica dell'anno 1911*, « Boll. R. Comit. geol. ital. », vol. XLIII, 1912, p. 23.

Presso Montecchio, secondo il Lotti, il passaggio delle argille scagliose alla formazione marnoso-arenacea avviene per mezzo dei seguenti strati dall'alto al basso:

- a) scisti argillosi rossi verdastrì;
- b) marne grigie con calcari verdastrì in strati sottili;
- c) scisti argillosi e calcare alberese;
- d) scisti argillosi con straterelli arenacei;
- e) marne con banchi d'arenaria;
- f) calcari con *Lepidocyclina*, ecc.;
- g) formazione marnoso-arenacea.

Egli da ciò conclude che quest'ultima sia più antica delle argille scagliose, le quali per il Lotti rappresenterebbero l'eocene superiore. L'autore⁽¹⁾ così si esprime: « Oggi un rilevamento accuratissimo, quale si conveniva per la risoluzione di un problema di sì alta importanza... mi ha messo in grado di affermare con sicurezza che queste argille scagliose... sono distese sopra una ben chiara sinclinale della formazione arenaceo-marnosa, e lungo il contatto dei due terreni è manifesta dovunque e senza eccezioni la sovrapposizione di dette argille scagliose alla formazione attribuita al miocene medio ».

Un altro fatto importante che fu già accennato dal Lotti⁽²⁾, è, che in nessun punto delle sezioni complete del terziario della catena eugubina e del M. Susabio le argille scagliose ricompaiono.

Anche il Verri⁽³⁾, secondo il quale la formazione marnoso-arenacea è più antica del miocene, stabilisce la posizione stratigrafica delle argille scagliose sopra di essa. Egli scrisse che, o le argille scagliose con ofioliti erano mioceniche o la formazione marnoso-arenacea dell'Umbria è eocenica.

Studiando questi affioramenti di argille scagliose si osserva specialmente un fatto, che non si può mettere in accordo colle interpretazioni date dal Lotti e dal Verri.

Le argille scagliose tanto tormentate da movimenti tettonici sono sovrapposte ad un complesso, che ha subito pochissimi disturbi tettonici; la tettonica della formazione marnoso-arenacea e quella delle argille scagliose non stanno in nessun rapporto tra loro.

La posizione tettonica delle argille scagliose tra la valle del torrente Assino e quella del torrente Carpina invece si presenta ben diversamente che quella tra la pianura eugubina e la valle del Tevere, come ci prova il Principi con una serie di sezioni⁽⁴⁾.

In questa regione le argille scagliose sono sottoposte alla formazione marnoso-arenacea del miocene inferiore e sono intruse entro discontinuità degli strati langhiani, riuscendo non di rado a traboccare al di sopra di questi.

Lo stesso fenomeno si osserva anche più a nord presso Pieve S. Stefano, dove le argille scagliose sono molto più diffuse che ad est della valle

(1) B. LOTTI, *La formazione arenaceo-marnosa dell'Umbria con fossili ritenuti miocenici è più antica delle argille scagliose con ofioliti*, « Boll. soc. geol. ital. », vol. XXX, 1911, p. 477; *Descrizione geologica dell'Umbria*, « Memorie descr. della carta geol. d'Italia », vol. XXI, 1926.

(2) B. LOTTI, *I monti di Nocera Umbra*, « Boll. R. Comit. geol. d'Italia », 1910.

(3) A. VERRI, *Rapporto tra le formazioni con ofioliti dell'Umbria e le breccie granitiche del Sannio*, « Boll. soc. geol. ital. », vol. VI, 1887, p. 274; *Appunti sui bacini del Chia-scio e del Topino*, ibid., vol. II, 1883, p. 115; *Sulla divergenza di vedute circa le formazioni eoceniche e mioceniche dell'Umbria*, « Boll. R. Comit. geol. », vol. XXXIV, n. 2, 1903.

(4) P. PRINCIPI, *Intorno ad alcuni affioramenti di argille scagliose nell'Umbria settentrionale*, « Rendiconti R. Acc. Nazionale dei Lincei », Cl. Sc. Nat., vol. IX, serie 6^a, fasc. I, 1929.

Tiberina, e specialmente anche a nord di Pieve S. Stefano, nella regione del M. Fumaiolo, come mi ha comunicato il prof. Paolo Principi, che ora sta facendo il rilevamento dettagliato di questa regione. Ciò vuol dire che a NO della valle dell'Assino l'eocene, ossia la scaglia rosata, è già sviluppato con facies delle argille scagliose.

Oggidi l'età miocenica della formazione marnoso-arenacea è provata con moltissimi fossili; inoltre non si può più pretendere che esista un disaccordo tra le osservazioni stratigrafiche e tettoniche in campagna colla paleontologia ⁽¹⁾.

Non è dunque possibile, che le argille scagliose, che qui contengono nummuliti ed altri foraminiferi eocenici (*Rupertia incrassata Uhlig*) ⁽²⁾ che indicano con grande probabilità l'età eocenica, stiano sopra il miocene a formare una serie continua con questo.

Secondo il mio modo di vedere le argille scagliose sono scivolte sulla formazione marnoso-arenacea da N-NO verso S-SE ed a causa di questo slittamento hanno acquistato il loro aspetto caotico.

Ad est di Umbertide (a nord di C. Casella) queste argille scagliose, contengono blocchi di un calcare arenaceo con *Nodosarie* e *Textularie*. Assomigliano spesso alla formazione calcareo-argillosa della regione del M. Peglia che qui sarebbe eocenica.

Non voglio dire con questo che le argille scagliose in generale siano eoceniche; là dove contengono i fossili del cretaceo indubbiamente sono di questa età.

In tale questione io sono perfettamente d'accordo col prof. Principi il quale ritiene, che le argille scagliose rappresentano una serie comprensiva dal cretaceo all'eocene ⁽³⁾.

Chiudendo questa Nota sento il dovere di ringraziare il prof. Paolo Principi per l'assistenza ed i consigli elargitimi.

(1) La presenza del oligocene fu constatata in tutto l'Appennino umbro-marchigiano ed abruzzese settentrionale a base di ricche faune a foraminiferi. Esso comprende la parte superiore della scaglia cinerea. L'eocene invece è rappresentato dalla scaglia cinerea inferiore e di tutta la scaglia rosata superiore che contiene nummuliti. I lavori in corso faranno vedere chiaramente la successione dei terreni del terziario umbro-marchigiano ed abruzzese settentrionale.

(2) P. PRINCIPI, *Tentativo di ordinamento del terziario inferiore e medio dell'Umbria centrale*, « Boll. soc. geol. ital. », vol. XLI, 1922.

(3) P. PRINCIPI, *Osservazioni intorno alla Geologia della catena del M. Cimone (Appennino settentrionale)*, « Boll. soc. geol. ital. », vol. XLIX, 1930, fasc. 2, pp. 308-309.

Fisiologia. — *Avitaminosi ed intossicazioni.* — I: *Polineurite sperimentale ed intossicazione chimica da metalli e metalloidi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto il rapporto che esiste tra vitamine e resistenza immunitaria: molti sono i ricercatori, specialmente italiani, che si sono occupati della debilitazione delle forze organiche di difesa di fronte ai microrganismi patogeni, come conseguenza di stati di inanizione totale o di avitaminosi. Esistono invece nella letteratura solo pochi dati circa il comportamento degli individui carenzati rispetto alle intossicazioni: e questi dati non sempre portano a conclusioni univoche. Piccioni alimentati esclusivamente con riso brillato non sono, secondo Morselli ⁽³⁾, più sensibili di quelli normali verso certe tossine batteriche. Topi, tenuti a dieta priva di vitamina A, o di vitamina B, o di ambedue le vitamine, non subiscono alcuna modificazione nella loro resistenza verso l'acetoneitrile (Miura) ⁽⁴⁾. Risultati negativi si sono pure ottenuti nell'avitaminosi B con la somministrazione di As_2O_3 (Suda) ⁽⁵⁾, di alcool (Cooper) ⁽⁶⁾; (Vedder) ⁽⁷⁾, di chinina, o fluoresceina, o tetraidro- β -naftilammina (Hess W. R.) ⁽⁸⁾, di cloridrato di guanidina, o caffeina, o electrargol, o bleu di metilene (Simonnet) ⁽⁹⁾, di malleina o di tubercolina bruta, o di liquore di Fowler, o di sublimato corrosivo (Arloing e Dufourt) ⁽¹⁰⁾. Al contrario, altre ricerche dimostrano che alcune sostanze chimiche hanno un'azione acceleratrice sulla evoluzione dell'avitaminosi B. Secondo Arloing e Dufourt, l'olio fosforato, il solfato di atropina, il cloridrato di pilocarpina, il cloridrato di adrenalina, a dosi certamente non tossiche per se stesse, abbreviano la durata di sopravvivenza dei piccioni alimentati con riso brillato, probabilmente per uno squilibrio del sistema nervoso organo-vegetativo vago-simpatico ⁽¹¹⁾. Una simile azione acceleratrice dell'andamento dell'avitaminosi B è stata pure riscontrata da Abderhalden ⁽¹²⁾ col bromobenzolo, da Hess ⁽¹³⁾ col cianuro di potassio, da M. I. Smith, Mc Closky e Hendrick ⁽¹⁴⁾ con la pilocarpina e l'ergotossina, da Ogata ⁽¹⁵⁾ con lo NaJ, da Vercellana ⁽¹⁶⁾ con diversi veleni e sostanze chimiche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1932.

(3) G. MORSELLI, «Bioch. e Terap. speriment.», XI, 1, 1924.

(4) M. MIURA, «Journ. of laborat. a. clin. med.», VII, 267, 1922.

(5) G. SUDA, «Bioch. Zeitschr.», CXXXVIII, 269, 1923.

(6) E. A. COOPER, «Bioch. Journ.», VII, 268, 1913.

(7) E. B. VEDDER, «Journ. Hyg.», XVII, 1, 1918.

(8) W. R. HESS, «Arch. exp. Path. u. Pharm.», CIII, 366, 1924.

(9) L. RANDOIN, et H. SIMONNET, *La question des vitamines*, Paris, 1927.

(10) F. ARLOING et A. DUFOUT, «Cpt. rend. Soc. Biol.», LXXXIX, 1050, 1923; «Rev. de la Tuberculose», IV, 446, 1923.

(11) Id. id., «Cpt. rend. Soc. Biol.», LXXXVIII, 774, 775, 1037; 1923.

(12) E. ABDERHALDEN, «Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol.», CXCVIII, 179, 1923.

(13) W. R. HESS, «Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol.», CXCVIII, 488, 1923.

(14) M. I. SMITH, W. T. MC CLOSKEY and E. G. HENDRICK, cit. da G. LORENZINI:

Teoria delle vitamine, Roma, 1928.

(15) D. OGATA, «Bioch. Zeitschr.», CXXXII, 89, 1922.

(16) G. VERCELLANA, «Arch. di Biol.», I, 236, 1924.

L'incostanza dei risultati ottenuti dai diversi AA. che si sono occupati dell'argomento e la deficienza della descrizione del quadro clinico ed anatomo-patologico, che si ha negli animali sottoposti a tal genere di ricerche, mi hanno indotto a riprendere in esame il problema.

Ho considerato il comportamento della polineurite sperimentale nei piccioni di fronte a piccole quantità di una miscela salina di vari metalli e metalloidi in soluzione acquosa, somministrata *per os* agli animali. 15 piccioni sono stati divisi in 5 lotti, ciascuno di tre animali: il primo era sottoposto al regime artificiale incompleto (30-40 gr. di riso brillato più un gr. di agar polverato — per regolare la peristalsi intestinale — e 4 gr. della seguente miscela salina: fosfato tricalcico calc. p. 10, cloruro di sodio calc. p. 4, cloruro di potassio calc. p. 1, citrato di ferro p. 0.5) con l'aggiunta di vitamina (1 gr. di lievito di birra secco e polverato per animale e per giorno). Il secondo lotto era tenuto al regime esclusivo polineuritogeno per tutta la durata dell'esperienza; il terzo era sottoposto a questo regime, ma, ai primi segni dell'avitaminosi B, ricevette una piccola dose di miscela metallo-metalloidea; il quarto lotto era sottoposto alla dieta artificiale incompleta con l'aggiunta, sin dall'inizio dell'esperimento, di una piccola dose di miscela metallo-metalloidea; finalmente il quinto lotto era tenuto al regime artificiale, reso completo dall'aggiunta di lievito di birra, più una piccola dose di miscela metallo-metalloidea (sin dall'inizio dell'esperimento). Si sono impiegati animali aventi press'a poco lo stesso peso iniziale, ed in buone condizioni di salute; essi sono stati tenuti separatamente nello stabulario, nelle gabbie speciali che si adoperano per lo studio del ricambio materiale; erano pesati giornalmente alla stessa ora ed esaminati dal punto di vista del comportamento generale e della sintomatologia eventualmente offerta. Si conosceva sempre il peso dell'alimento somministrato. I piccioni, sin dall'inizio della ricerca, sono stati nutriti per *gavage*; una certa quantità di alimento è stata però sempre messa nelle gabbie, a loro disposizione. Il lievito di birra era ingerito assieme ai sali ed all'acqua, sotto forma di pappa.

La miscela salina metallo-metalloidea è stata fatta in modo arbitrario, e per la qualità del sale, e per la sua quantità; sono stati scelti però sali idrosolubili, e si è fatto in modo che il maggior numero di elementi metallici e metalloidi fosse presente nella miscela. Questa era così composta (per 1 litro di H_2O): nitrato di cobalto mgr. 15, cloruro di bario mgr. 5, cloruro manganoso mgr. 35, solfato manganoso mgr. 35, cloruro rameico mgr. 5, solfato di rame mgr. 5, acetato di uranio mgr. 10, fosfomolibdato di sodio mgr. 15, cloruro stannico mgr. 15, cloruro di zinco mgr. 35, cloruro di litio mgr. 15, carbonato di litio mgr. 15, nitrato mercurico mgr. 1, nitrato di argento mgr. 5, bicromato di potassio mgr. 5, cloruro di stronzio mgr. 15, acido borico mgr. 15, solfato di alluminio mgr. 25, cloruro di nichelio mgr. 25, triclورو d'oro mgr. 15, nitrato di piombo mgr. 1, fluoruro di sodio mgr. 15, ioduro di sodio mgr. 18, anidride arseniosa mgr. 5, triclورو di antimonio mgr. 10. In totale mgr. 360 di sali vari, ossia mgr. 0,36 per ogni cc. della miscela.

Riassumo in forma tabellare i risultati ottenuti, per quanto si riferisce alla curva del peso (espresso in gr.) degli animali in esperimento ed alla sintomatologia da essi presentata.

TABELLA.

Data	Primo lotto			Secondo lotto			Terzo lotto			Quarto lotto			Quinto lotto		
	1° pic- cione	2° pic- cione	3° pic- cione	Note	1° pic- cione	2° pic- cione	3° pic- cione	Note	1° pic- cione	2° pic- cione	3° pic- cione	1° pic- cione	2° pic- cione	3° pic- cione	Note
1932															
ag. 7	358	355	340		327	350	350		292	370	310	352	342	327	da oggi 4 cc. di miscela
8	350	330	320		285	295	317		281	366	300	330	305	285	
9	325	328	347		315	320	305		285	340	295	336	336	312	da oggi 3 cc. di miscela
10	325	320	350		285	320	325		285	336	290	345	327	307	
11	347	340	351		286	320	305		286	338	290	345	306	308	
12	355	342	345		295	300	314		274	335	303	327	306	295	
13	350	347	334		275	280	280	anoressia	258	320	293	295	295	273	anoressia, diarrea nera
14	352	344	331		268	277	278		252	320	281	291	276	264	vomito
15	354	346	332		273	277	265	picc. 1°; vomito di riso	261	324	274	290	260	250	da oggi 1/2 cc. di miscela
16	360	335	337		272	270	256	picc. 2° e 3°; vomito	251	330	267	290	245	242	
17	345	337	337		273	271	260	diarrea verde	251	305	267	290	241	212	torpore, astenia
18	347	320	338		265	264	243		253	280	265	286	239	233	
19	352	322	339		257	250	245		233	280	260	280	235	230	picc. 1° e 2°; tremore generalizzato, disturbi sensitivi
20	350	324	340		264	252	245		225	270	258	275	235	226	
21	359	327	342		260	241	235	torpore, astenia	210	266	254	270	232	222	
22	354	328	345		265	240	232		morto	264	250	265	morto	215	picc. 3°; crisi di polineurite
23	346	329	347		250	229	233		—	259	250	260	—	210	
24	340	331	347		240	220	231		—	258	252	258	—	201	picc. 1°; ascite, gravi fenomeni paralitici, stato cachettico
25	341	333	348		232	220	230	picc. 1°; paralisi del gozzo e del faringe; afonia	—	246	255	253	—	morto	
26	342	333	348		224	212	230		—	240	253	251	—	—	
27	338	335	349		220	204	230		—	232	250	240	—	—	
28	329	336	350		214	202	231	picc. 2°; crisi di polineurite	—	morto	255	morto	—	—	
29	330	327	351		202	203	229		—	—	250	—	—	—	
30	332	327	352		202	201	225	picc. 1°; crisi di polineurite	—	—	245	—	—	—	
31	330	329	353		200	200	224		—	—	240	—	—	—	
sett. I	331	321	353		198	morto	222		—	—	240	—	—	—	
2	333	322	353		morto	—	220		—	—	232	—	—	—	
3	330	328	350		—	—	morto		—	—	morto	—	—	—	

I dati della tabella dimostrano che, mentre il primo lotto di piccioni ha conservato il proprio peso e solo verso la fine dell'esperienza l'ha perduto di poco (segno questo che con la dieta somministrata non si stabilisce soltanto una carenza di vitamina B, ma assai probabilmente una carenza plurilaterale, per cui non sarebbe esatto il termine assoluto di *avitaminosi B*), il secondo lotto invece è andato incontro a quasi tutti i sintomi indotti dalla mancanza di vitamina antineuritica, cioè l'anoressia, la diarrea verde, il vomito per rigurgito di alimento, il torpore, l'astenia progressiva, la paralisi muscolare del gozzo e del faringe, l'afonia, la paresi e la paralisi degli arti, il tremore generalizzato permanente, i disturbi sensitivi (analgesia) e finalmente le crisi convulsive di polineurite (le quali ultime sono mancate solo nel piccione n. 3, morto in mezzo a fenomeni paralitici progressivi). Questa sintomatologia, brevemente accennata nelle note della tabella, è caratteristica della polineurite acuta sperimentale del piccione.

Ai primi sintomi (anoressia, diarrea verde), gli animali carenzati del terzo lotto sono stati trattati fino alla fine dell'esperimento con 3 cc. giornalieri di miscela metallo-metalloidea; il piccione n. 1 ne ha ricevuto in tutto 18 cc. (ossia mgr. 6.48 di sali metallici e metalloidei); il piccione n. 2, cc. 36 (ossia mgr. 12.96); il piccione n. 3, cc. 54 (cioè mgr. 19.44). Come effetto della somministrazione della miscela, si è avuta morte più rapida del primo e del secondo animale, rispetto a quelli del secondo lotto; il piccione n. 1 è deceduto dopo appena 16 giorni di esperienza.

Gli animali del quarto lotto hanno ricevuto sin dall'inizio della prova la miscela metallo-metalloidea, assieme al regime artificiale incompleto: al piccione n. 1 sono stati somministrati in tutto cc. 32.5 di miscela (cioè mgr. 11.70 di sali metallici e metalloidei); al piccione n. 2, cc. 29.5 (ossia mgr. 10.62); al piccione n. 3, cc. 31 (ossia mgr. 11.16). La morte dei tre animali si è verificata in un tempo più breve che per il secondo lotto, e la sintomatologia offerta è stata mista e complessa, ricordando nello stesso tempo, ma incompletamente e non costantemente, quella propria dell'*avitaminosi B* e quella generale della intossicazione chimica da metalli e metalloidi. Infatti, per tutti e tre gli animali si è notata diarrea nera, anziché verde; il vomito è stato più abbondante e non sempre alimentare; e per il piccione n. 1 la morte è avvenuta in uno stato profondamente cachettico, accompagnato da gravi fenomeni paralitici, e, fatto singolare, da ascite imponente, il cui liquido occupava (rigonfiandola enormemente) tutta la cavità addominale del piccione. Tale ascite, che non si è riprodotta negli altri due animali dello stesso lotto, non è stata certamente di origine carenziale, giacché non sono riuscito a trovare segnalata nella letteratura questa condizione morbosa come espressione della polineurite avitaminosica nei piccioni (nemmeno nelle forme di beri-beri umido). All'autopsia degli animali morti si è constatato il reperto comune della polineurite sperimentale (atrofia di diversi organi interni ed ipertrofia delle capsule surrenali) ed in più, per

quelli del quarto lotto, segni di degenerazione grassa del cuore e dei reni; nel piccione n. 1 di quest'ultimo lotto, oltre al rilievo di abbondante liquido ascitico nel cavo addominale, è stata evidente l'atrofia della ghiandola epatica.

I piccioni del quinto lotto, invece, tenuti a dieta polineuritogena più lievito di birra e miscela metallo-metalloidea, si sono comportati come gli animali del primo lotto, non sono stati cioè intossicati dalla miscela stessa, che è stata somministrata a ciascuno nella quantità complessiva di cc. 36 (pari a mgr. 12.96 di sali metallici e metalloidici). Alla fine dell'esperienza essi erano in buone condizioni di salute e di nutrizione. Aggiungerò che la somministrazione orale, *in un sol giorno*, ad un piccione (di gr. 315) di cc. 36 della miscela (in quattro volte; 9 cc. per volta), non ha arrecato all'animale alcun disturbo.

In conclusione, l'ingestione, per via orale, di una miscela di sali metallici e metalloidici, in dosi tali da non riuscire tossiche per gli animali normali, provoca, nei piccioni affetti da polineurite aviaria sperimentale, modificazione dell'andamento della carenza alimentare, nel senso che essa viene favorita ed accelerata. Tale accelerazione si manifesta anche quando la miscela salina è somministrata ai piccioni all'inizio dei sintomi di beriberi: gli effetti sono più evidenti quando gli animali, sottoposti a dieta priva di vitamina antineuritica, sono trattati con la miscela sin dal principio dell'esperimento, prima cioè che appaiano le note iniziali di una carenza vitaminica. Per un piccione del quarto lotto si è avuta anche una sintomatologia mista e complessa, che ricordava nello stesso tempo quella propria dell'avitaminosi B e quella generale dell'intossicazione chimica da metalli e metalloidi (diarrea nera, vomito ripetuto, imponente ascite, gravi fenomeni paralitici, stato cachettico generale). La morte è sopravvenuta in mezzo a fenomeni che stavano più per un avvelenamento cronico da metalli che per una carenza vitaminica.

Si può quindi inferire che talvolta nel caso di associazione, nello stesso soggetto, di avitaminosi B ed avvelenamento chimico non è solo il decorso della prima che viene accelerato, ma anche il quadro dell'intossicazione appare evidente per dosi che certamente non avvelenano l'animale. V'è una specie di sinergismo di potenziamento tra avitaminosi ed intossicazione chimica, nel senso che dosi di veleno inattive diventano invece molto attive in un soggetto in preda a carenza vitaminica; d'altro canto, questa viene molto favorita nella sua evoluzione.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio MARCHIAFAVA dà comunicazione alla Classe della triste notizia della morte del Socio TIZZONI, di cui si terrà in una delle prossime sedute una degna commemorazione.

Comunica anche che hanno inviato ringraziamenti per la loro elezione i Soci Nazionali BETTI, D'ACHIARDI e FUBINI; e i Corrispondenti BARGELLINI, CAMIS, CASSINIS, FERMI, PELLOUX, TERNI, VANZETTI.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando il volume delle « Memorie scientifiche » del Socio L. DE MARCHI, ristampato in occasione del suo ritiro dalla cattedra; gli « Atti del Convegno di Fisica nucleare » indetto dalla R. Accademia di Italia; il vol. III delle « Opera omnia di Eulero »; il vol. II degli « Annali del Laboratorio di ricerche sulle fermentazioni L. Spallanzani »; M. Lecat, « L'Azéotropisme; Bibliographie »; il vol. III degli « Studi e ricerche sui combustibili » del Socio M. G. LEVI; il tomo VI degli « Atti del Congresso internazionale dei matematici del 1928 »; gli « Atti dell'XI Congresso internazionale di Zoologia »; il vol. II, p. 1^a degli « Elementi di Fisiologia umana » del Socio BAGLIONI.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Socio MARCHIAFAVA presenta il plico suggellato, inviato in data 22 ottobre 1932 all'Accademia, perchè venga conservato negli Archivi, dal sig. Luigi Passerini.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio GOLA, legge anche a nome del collega MATTIROLO, le relazioni con le quali si propone la stampa delle due Memorie di R. Vaccaneo: « Idnoracee africane », e A. Forti: « Le alghe di Giarabub ».

L'Assemblea approva.

L'Accademico Segretario aggiunto prof. LO SURDO, legge a nome dei Soci ALOISI e BOERIS, assenti, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di G. Cavinato: « L'uso del prisma per la determinazione degli indici di rifrazione ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per l'inserzione negli Atti Accademici i
Soci: CORBINO, GUIDI, PALAZZO.

COMUNICAZIONI VARIE

• Il Socio MARCHIAFAVA, a nome del Presidente sen. GARBASSO, assente per malattia, propone alla Classe di inviare al Duce, in occasione del Decennale, il seguente indirizzo:

« La Reale Accademia Nazionale dei Lincei, adunatasi la prima volta nell'anno undecimo, esprime a V. E. la più viva ammirazione per l'opera gigantesca svolta dal Governo Fascista nel decennio testè compiuto. L'Accademia si propone di continuare senza posa la sua opera secolare per il maggiore vantaggio della Patria, del Regime e della cultura Italiana ».

La proposta è accolta con vive approvazioni.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 novembre 1932

- Reale Accademia d'Italia. — Convegno di fisica nucleare, ottobre 1931-x. (Fondazione Alessandro Volta. Atti dei convegni I). Roma, 1932. 8°, pp. 1-172.
- ALDRICH J. M. — New Diptera, or two-winged flies from America, Asia and Java with additional notes (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-28.
- ALDRICH J. M. — Records of Dipterous insects of the family Tachinidae reared by the late George Dimmock, with description of one new species and notes on the genus *Anetia* Robineau-Desvoidy. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°.
- ALICATA JOSEPH. — A new trematode of the genus *Urotrema* from bats. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-4.
- ÄNGSTRÖM ANDERS. — Der Einfluss der Bodenoberfläche auf das Lichtklima. Sonderdruck aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Band XXXIV (Köpen-Band III), 1931, pp. s. 123-130). Leipzig, 1931. 8°.
- ARRIGHI G. — Introduzione alla geometria differenziale della superficie dei centri di carena. (Estr. dagli « Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino ». Volume LXVII, pp. 194-202). Torino, 1932. 8°.
- Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna, 3-10 settembre 1928. Tomo VI. Bologna, 1932. 8°, pp. 1-554.
- Atti del secondo Congresso Nazionale di Nipiologia. Bolzano, 4-6 giugno 1930. Bolzano, 1930. 8°, pp. 1-319, 1-XI.
- Atti dell'XI Congresso di Zoologia. Padova, 1930. Vol. I-III. Padova, 1932. 8°, pp. 1-XXIV, 1-398, 401-1101, 1106-1508, tav. I-XXXVIII.
- BAGLIONI SILVESTRO. — Elementi di fisiologia umana. Vol. II. Fisiologia degli organi della vita vegetativa. Parte I. Roma, Libreria di Scienze e Lettere del dott. G. Bardi, 1932. 8°, pp. 1-164.
- BAILEY I. W. and SPOEHR H. A. — The Role of Research in the Development of Forestry in North America. New York, 1929. 8°, pp. 1-XIII, 1-118.
- BALDUF W. V. — Revision of the Chalcid flies of the tribe Decatomini (Eurytomidae) in America North of Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-95.
- BARTSCH PAUL. — A newly discovered West Indian mollusk fauna. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°.
- BATTAGLIA MARIO. — *Eumycète tuberculosis*. (Estr. dal « Bollettino delle Scienze Italiane della Società Internazionale di Microbiologia », fasc. IV, 1932). Milano, 1932. 8°, pp. 1-7.
- BATTAGLIA MARIO. — Idee nuove e concetti vecchi per la cura e profilassi delle malattie infettive finora conosciute. (Estr. dal Giornale medico il « Morgagni »). Napoli, 1932. 8°, pp. 1-15.
- BERL ERNEST. — Nomogrammes à l'usage des Chimistes. Paris, s. d. 4°, s. p.

- BIGELOW HENRY. — Oceanography. Its Scope, Problems, and Economic Importance. Boston, Houghton Mifflin Company, 1931. 8°, pp. 1-262.
- BLANC EUGÈNE. — Problèmes et compléments de mécanique à l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales et des élèves de mathématiques spéciales. Paris, Edit. Gauthier-Villars et C.^{ie}, 1931. 8°, pp. I-XIII, 1-287.
- BOSELLI F. B. — Studio biologico degli Emitteri che attaccano le nocciuole in Sicilia. (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Spoleto, 1932. 8°, pp. 1-168.
- BRANCH WILSON CHARLES. — The copepod Crustaceans of Chesapeake Bay. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-54.
- CANDURA G. S. — Contributo alla conoscenza morfologica e biologica dello struggigrano (*Tenebroides mauritanicus* L.). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto Superiore di Agraria di Portici ». Vol. XXVII). Spoleto, 1932. 8°, pp. 1-56.
- CAROT LUCIEN. — Contribution à l'étude des troubles du métabolisme chimique dans la dénutrition grave du nourrisson. Créatinurie et carbonurie. (Extr. de la « Revue Française des Pédiatries ». Tome VI, n. 3 et 4). Strasbourg, 1930. 8°, pp. 1-120.
- CARPENTER TAUDY ELIZABET. — Secular changes en mortality rates comected with certain organ systems. (Reprinted from the « Human Biology a record of research ». Vol. III, pp. 494-528). Baltimore, 1932. 8°.
- CAUDELL A. N. — Insects of the order Orthoptera of the Pinchot Expedition of 1929. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-7.
- CHANDLER ASA C. — Notes on the Helminth parasites of the opossum (*Didelphis Virginiana*) in Southeast Texas, with descriptions of four new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-15.
- CHIN-YUAN I. — The influence of heredity upon the duration of life in man based on a Chinese genealogy from 1365 to 1914. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. IV, pp. 41-68). Baltimore, 1932. 8°.
- CHITWOOD B. G. — A review of the Nematodes of the genus *Hastospiculum*, with descriptions of two new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-9.
- CISOTTI UMBERTO. — Cenni sui fondamenti del calcolo tensoriale con applicazioni alla teoria dell'elasticità. Conferenza svolta nella scuola di specializzazione del R. Politecnico di Milano. Fasc. II. Milano, 1932. 8°, pp. 1-46.
- CISOTTI UMBERTO. — Circolazioni libere e corrispondenti problemi elettrostatici. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano ». Vol. V). Milano, 1931. 8°, pp. 1-14.
- CISOTTI UMBERTO. — Scie limitate. (Estr. dagli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » (Scienze Fisiche e Matematiche). Serie II. Vol. I, pp. 101-112). Bologna, 1932. 8°.
- CLARK AUSTIN H. — The forms of the common Old World swallowtail Butterfly (*Papilio machaon*) in North America, with descriptions of two new subspecies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-8.
- COURSON ZELIFF CLARKE. — A new species of cestode *Crepidobothrium amphiumae* from *amphiuma tridactylum*. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-3.
- CROCKETT GRAHAM DAVID. — The ancient caves of Szechwan Province, China. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-13.

- D'ARRIGO AGATINO. — Sulle fasi di regime del litorale deltizio del Tevere. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici », fasc. III, 1932). Roma, 1932. 8°, pp. 1-38.
- DE FIGUEIREDO GOMES e SOUSA ANTONIO. — Subsídios para o conhecimento da flora da Guiné portuguesa. (Da « Memórias da Sociedade Broteriana »). Vol. I. Coimbra, 1930. 4°, pp. 1-94.
- DE MARCHI LUIGI. — Climatologia. II ediz. (Manuali Hoepli). Milano, Edit. Ulrico Hoepli, 1932. 8°, pp. I-XIII, 1-289.
- DE MARCHI LUIGI. — Memorie scientifiche 1883-1932, raccolte da colleghi, allievi ed ammiratori in occasione del suo 75° compleanno. Padova, Casa Editr. dott. A. Milani, 1932. 4°, pp. I-LXXI, 1-854.
- DESMIREANU B. — Un anno d'agricoltura romena. Milano, 1931. 8°, pp. 1-60.
- DOBELL CLIFFORD. — Antony van Leeuwenhoek and his « Little Animals ». London, John Bale, sons et Danielsson, 1932. 8°, pp. 1-435.
- EDDINGTON A. S. — Stellar Structure. (Sonderabdr. aus « Zeitschrift für Astrophysik ». Band III, pp. 129-141). Berlin, 1931. 8°.
- EDDINGTON A. S. — The Expanding Universe. (Reprinted from the « Proceedings of the Physical Society ». Vol. XLIV). Cambridge, 1931. 8°.
- EDDINGTON A. S. — The « Guillotine Factor » in stellar opacity. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCII, n. 5, pp. 364-368). Edinburgh, 1932. 8°.
- EDDINGTON A. S. — The Hydrogen Content of the Stars. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCII, n. 6, pp. 471-481). Edinburgh, 1932. 8°.
- EDDINGTON A. S. — The Recession of the Extra-galactic Nebulae. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCII, n. 1). Edinburgh, 1931. 8°, pp. 1-7.
- EDWARDS D. L. — Note on some peculiarities in Stellar Spectra of Type B. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume XCII, n. 5, pp. 389-394). Edinburgh, 1932. 8°.
- EIDGEN. Sternwartei Zürich. — International Astronomical Union Character Figures of Solar Phenomena 1923-1928. Vol. I. Zürich, 1932. 4°, pp. I-VIII, 1-77.
- EULERI LEONHARDI. — Commentationes analyticae ad theoriám integralium pertinentes. Vol. III, ediderunt A. Liapocenoŭ, A. Krazer, G. Faber. Lipsiae, 1932. 4°, pp. I-LXVIII, 1-494.
- FAVARO GIUSEPPE. — Antonio Scarpa e l'Università di Modena (1772-1783). Nuovi contributi alla storia dell'anatomia e della medicina di Modena. Modena, 1932. 8°, pp. 1-289.
- FERRIGHI S. — L'osservatorio Ximeniano di Firenze. Brescia, 1932. 8°, pp. 1-161.
- FISHER W. S. — New West Indian Cerambycid beetles. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-93.
- FLETCHER ALAN. — Note on the Effect of proper Motion on double Star Measures and the binary system 61 Cygni (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Volume XCII, n. 2, pp. 119-131). Edinburgh, 1932. 8°.
- FOWLER HENRY W. — The fishes obtained by Lieut. H. C. Kellers, of the United States Naval Eclipse Expedition of 1930, at Nimafoow Island, Tonga Group, in Oceania. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-9.
- FRATEPIETRO CARLO. — Agricoltura e politica coloniale. I — Tripolitania. Foggia, 1932. 8°, pp. 1-62.
- FRATEPIETRO CARLO. — Brevi note di frutticoltura per la provincia di Foggia. Foggia, s. d. 8°, pp. 1-34.
- FRATEPIETRO CARLO. — La crosta pugliese. Osservazioni in Capitanata. Foggia, 1930. 8°, pp. 1-40.
- FRATEPIETRO CARLO. — L'agrumicoltura nel Gargano. Foggia, s. d. 8°. pp. 1-13.
- FRATEPIETRO CARLO. — L'olivo in Capitanata. Foggia, 1932. 8°, pp. 1-20.

- FRATEPIETRO CARLO. — Sul miglioramento della razza bovina pugliese. Foggia, 1932. 8°, pp. 1-56.
- GAFAFER WILLIAM M. — Otolaryngologic Examination of 935 Normal Individuals. (Reprint from the « Laryngoscope » 1932). St. Louis, 1932. 8°, pp. 1-7.
- GAFAFER WILLIAM M. — Quotations Joseph Glanvill a forgotten seventeenth century iconoclast. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. IV, pp. 121-130). Baltimore, 1932. 8°.
- GAFAFER WILLIAM M. — Quotations the inhabitants of the Island of St. Kilda and acute upper respiratory disease. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. III, pp. 437-441). Baltimore, 1931. 8°.
- GAFAFER WILLIAM M. — Transillumination and Roentgenography of the Maxillary Sinuses. (Reprinted from the « Archives of Otolaryngology ». Vol. XIV). Chicago, 1931. 8°, pp. 1-19.
- GALLARDO ÁNGEL. — Algunas formas sexuales aun no descritas de las hormigas del género *Crematogaster* de la Republica Argentina. (« Revista de la Sociedad Entomologica Argentina », n. 17, 1931, pp. 297-304). Buenos Aires, 1931. 8°.
- GALLETTI DI CADILHAC R. C. — The Framework of Wireless Telegraphy and of Nature. Edition Second. London, 1922, 8°, pp. 1-v, 1-48.
- GARCIA GODOFREDO. — La Mecánica clásica y la explicación del corrimiento del perihelio de los planetas, de la deflexión de la luz y del corrimiento de las rayas del espectro hacia el rojo. Generalización y naturaleza de la métrica. Lima, 1932. 8°, pp. 1-79.
- HOUGH WALTER. — A cache of basket Maker laskets from New Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-3.
- HOUGH WALTER. — Decorative designs on Elden Pueblo pottery, Flagstaff; Ariz. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°.
- JONES D. H. — Space Distribution of the Boss Stars. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCI, pp. 990-1001). Edinburgh, 1931. 8°.
- JUCCI CARLO. — Il problema dei reali veri del *Reticulitermes lucifugus*. (Estr. dal « Bollettino della Società Entomologica Italiana ». Anno LVII, n. 7, pp. 98-103). s. l. 1925. 8°.
- JUCCI CARLO. — Irregolarità di ovificazione in femmine vergini *Bombyx Mori*. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Sup. di Agraria di Portici ». Vol. XX). Portici, 1925, 8°, pp. 1-7.
- JUCCI CARLO. — La fecondità nei *Bombyx Mori*. Studi statistici sui caratteri della ovificazione (numero, grandezza e peso delle uova) in varie razze di bachi da seta. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Sup. di Agraria di Portici ». Serie III. Volume I, pp. 42-54). Portici, 1925. 8°.
- JUCCI CARLO. — Reincroci, colla razza di bachi da seta a quattro mute, della prole terza e quarta di seconda generazione. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Sup. di Agraria di Portici ». Serie III. Vol. I, pp. 55-70). Portici, 1925. 8°.
- JUCCI CARLO. — Sui fenomeni di sviluppo partenogenetico nelle uova di *Bombyx Mori* di razza bivoltina (*Awojiku*) di prima e di seconda generazione. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto Sup. di Agraria di Portici ». Vol. XX). Portici, 1925. 8°, pp. 1-9.
- KNOX-SHAW H. — The Observations of the Reverend Thomas Hornsby D. D. At the Radcliffe Observatory, Oxford, in the years 1774 to 1798. Oxford, 1932. 4°, pp. 1-145.
- KRIEGER HERBERT W. — Design areas in Oceania based on specimens in the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-33.
- LECAT MAURICE. — L'Azéotropisme. La tension de vapeur des mélanges des liquides. Bibliographie. Bruxelles, 1932. 8°, pp. 1-VII, 1-128.

- LECLERQ SUZANNE. — A Monograph of *Stigmarmaria Bacupensis*, Scott et Lang (From the « Annals of Botany ». Vol. XLIV, 1930, pp. 31-54). s. d. t. 8°.
- LEHMANN I. und PLETT G. — Untersuchung der europäischen Registrierungen der Erdbeben vom 18-VII-1928, 26-X-1930, und 13-XI-1925. (Sonderdruck aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Bd. XXXVI. S. 38-77). Leipzig, 1932. 8°.
- LEONE SALVATORE. — Profilassi del tracoma e visiva nelle provincie di Catania, Enna, Messina, Ragusa, Siracusa, Catanzaro. 1931-32. Siracusa, 1932. 8°, pp. 1-23, 1-11, 1-17, 1-11, 1-15, 1-19.
- LEVI M. G. — Studi e ricerche sui combustibili. Vol. III. Roma, 1932. 8°. pp. 1-390.
- LOCKYER WILLIAM J. S. — A bright Meteor passing the Pleiades (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCII, n. 5, pp. 449-451). Edinburgh, 1932. 8°.
- LUMIÈRE AUGUSTE — Quelques travaux complémentaires relatifs à la propagation de la tuberculose. Lyon, 1932. 8°, pp. 1-112.
- MARSHALL WILLIAM E. — Two new land Shells of the genus *Bulimulus* from Bolivia. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°. pp. 1-3.
- MARTELLI GIUSEPPE M. — Notizie biologiche e morfologiche sull'*Athalia colibrì* Christ. e su due suoi parassiti. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto Superiore di Agraria di Portici ». Vol. XXVI, pp. 313-333). Spoleto, 1932. 8°.
- Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste. Direzione Generale dell'Agricoltura. Per la tutela del vino Chianti e degli altri vini tipici toscani. Relazione della Commissione interministeriale per la delimitazione del territorio del vino Chianti. Bologna, 1932. 8°, pp. I-VIII, 1-542.
- MUESEBECK F. W. — Revision of the nearctic Ichneumon-flies belonging to the genus *Macrocentrus*. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXX). Washington, 1932. 8°, pp. 1-51.
- OSBORN FAIRFIELD HENRY. — Fifty-two years of Research, Observation and Publication, 1877-1929. New York, 1930. 8°, pp. 1-XI, 1-160.
- PALMER CARROLL E. — The relationship of erect body length to supine body length. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. IV, pp. 262-271). Baltimore, 1931. 8°.
- PAYME CECILIA H. — An interpretation of absorption and emission lines in early type Spectra. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCII, n. 5, pp. 368-388). Edinburgh, 1932. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Contraception and fertility in 2,000 women. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. IV, n. 3, pp. 363-407). Baltimore, 1932. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Quotations on the alleged lethal effects of sexual continence in the Holy Land. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. III, pp. 577-585). Baltimore, 1931. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Recent literature useful in the study of human Biology. (Reprinted from « Human Biology a record of research ». Vol. IV, pp. 131-153). Baltimore, 1932. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Some Notes on the Genus of religious Bodies. (Offprinted from the « Journal of Social Psychology ». 1931, pp. 417-432). Worcester, 1931. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Statistical report on the fourth Year's operations of the Bureau for contraceptive Advice. (Reprinted from « Fourth Report of the Bureau for contraceptive Advice », 1932). Baltimore, 1932. 8°, pp. 1-15.
- PEARL RAYMOND and RAENKHAM T. — Studies on human longevity. V. Constitutional factors in mortality at advanced ages. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. IV, pp. 80-118). Baltimore, 1932. 8°.
- PEARL RAYMOND. — The influence of density of population upon egg production in

- Drosophila melanogaster* (Reprinted from the «Journal of Experimental Zoology». Vol. LXIII, n. 1, pp. 57-84). Philadelphia, 1932. 8°.
- PEARL RAYMOND and MINER JOHN R. — A table for ascertaining elapsed time in years and decimals of a year between any two dates (Reprinted from the «Quarterly Bulletin of the Molbank Memorial Fund». Vol. X, 1932, pp. 151-154). s. l. 1932. 8°.
- PEARSE A. S. — New bopyrid isopods crustaceous from Dry Tortugas, Florida. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°. pp. 1-6.
- PETRONI GIULIO. — La natura tubercolare del tracoma. Nota clinica e critica. Lucca, 1932. 8°, pp. 1-23.
- POGGI RAUL. — Commemorazione del professore Angelo Angeli. (Estr. dalla Rivista «La Panarie». Anno VIII, n. 46, 1931). Udine, s. d. 4°.
- PUGLIONISI SALVATORE. — Praticità e sveltezza nei calcoli nautici. Istruzioni e tavole, seconda edizione. Riposto, 1922. 4°. pp. 1-XXXI, 1-93.
- REED LOWEL G. and LOVE ALBERT G. — Biometric studies on U. S. Army Officers. Longevity in Relation to physical Fitness. (Delivered before Medical Section American Life Convention a May 1931. pp. 121-143). Washington, 1931. 8°.
- RISSE R. — Applications de la statistique à la démographie et à la biologie. (Traité du calcul des probabilités et des ses applications. Tome III, fasc. III. Paris, Edit. Gauthier-Villars et Cie, 1932. 8°, pp. 1-X, 1-255.
- SACCO FEDERICO. — Il glacialismo nelle Alpi Marittime Italiane. (Ufficio idrografico del Po). Pubblicazione n. 10, vol. VII. Roma, 1932. 8°, pp. 1-42.
- SALVATI MICHELE. — I tufi di terra di Bari (Acquedotto Pugliese. Studi e progetti III). Bari, 1932. 8°, pp. 1-75.
- SANTANGELO E. — Dizionario pratico degli alimenti preceduto da nozioni sulla nutrizione, l'alimentazione e gli alimenti semplici e seguito da quadri ragionati dei principali regimi alimentari per sani ed ammalati. Milano, 1932. 8°, pp. 1-VIII, 1-408.
- SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza del *Lopus lineolatus* (Brullé) e di un suo parassita. (Estr. du «Livre du Centenaire de la Société Entomologique de France», pp. 551-565). Paris, 1932. 8°.
- SILVESTRI F. — The Biological Control of Insectes and Weed Pests. (Overprinted from the «South-Eastern Agricultural College Journal», 1932, pp. 87-96). s. l. 1932. 8°.
- SMART M. — Photographic Observations of double Stars. (Reprinted from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. XCII, pp. 37-47). Edinburgh, 1931. 8°.
- S. W. M. — Stellar Notions (Reprinted from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. XCII, n. 4, pp. 331-337). Edinburgh, 1932. 8°.
- TESTI GINO. — Gli studi storici della chimica in Italia. Città della Pieve, s. d. 8°, pp. 1-14.
- TRAVASSO LAURO. — Una specie del genere «Neoaplectana» Steiner (Nematoda-Oxyuridae) parassita del Conorrhynchus (Cleonus) Mendicus Gyll (Coleoptera-Curculionidae). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto Superiore di Agraria di Portici». Vol. XXVI, pp. 115-118). Spoleto, 1932. 8°.
- VILLA LUIGI. — Ricambio idrico; fisiopatologia e clinica. Con prefazione di Adolfo Ferrara. Milano, Casa Edit. Francesco Vallardi, 1932. 8°, pp. 1-XI, 1-426.
- WAVRE R. — Figures planétaires et géodésie. (Cahier scientifiques, fasc. XII). Paris. Edit. Gauthier-Villars et Cie, 1932. 8°, pp. 1-VIII, 1-194.
- WETMORE ALEXANDER. — Birds collected in Cuba and Haiti by the Parish-Smithsonian Expedition of 1930. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXXI). Washington, 1932. 8°, pp. 1-40.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 novembre 1932 (Anno XI)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria piana che investe un'asta rettilinea indefinita. Azioni dinamiche.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Reputo che sia questo il primo esempio — e il più semplice — di una corrente traslocircolatoria piana in presenza di un profilo rigido illimitato. Mi permetto di richiamare l'attenzione sull'andamento delle linee di flusso, particolarmente sul *filone* che si stacca dalla parete rigida e che è una semi-parabola [n. 3]. Mi sembra pure interessante il comportamento delle azioni dinamiche: sopra qualunque segmento finito dell'asta continua a valere il teorema di Kutta-Joukowski, la circolazione essendo quella relativa alla porzione considerata [n. 4].

Mi riservo di esporre, in una prossima Nota, un altro caso interessante in cui l'asta al suo estremo è saldata a un profilo circolare.

1. *Corrente circolatoria.* — Sia $z = x + iy$ l'affissa di un punto generico del piano delle coordinate cartesiane ortogonali x, y . Colla posizione

(1)
$$f = C\sqrt{z},$$

con C costante reale, risulta notoriamente definito un moto piano nel piano tagliato lungo il semiasse reale positivo (fig. 1 e 2) ⁽²⁾ e precisamente una

(1) Presentata nella seduta del 20 novembre 1932.

(2) I disegni delle figure sono dovuti al prof. Masotti a cui vanno i miei vivi ringraziamenti.

corrente circolatoria attorno al detto semiasse. Posto: $z = \rho e^{i\sigma}$, $\rho \geq 0$ e $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, e $f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$, dalla (1) scendono le relazioni:

$$(2) \quad \varphi_1 = C \sqrt{\rho} \cos \frac{\sigma}{2}, \quad \psi_1 = C \sqrt{\rho} \sin \frac{\sigma}{2},$$

dalla seconda delle quali scende che le linee di flusso $\psi_1 = \text{costante}$, quando la costante è diversa da zero, sono parabole coassiali, l'asse essendo l'asse

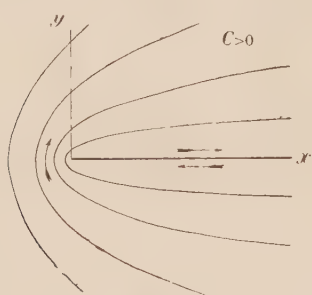


Fig. 1.

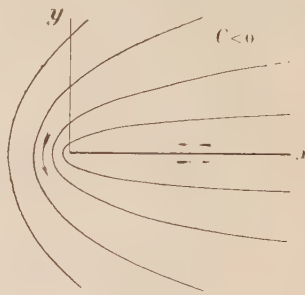


Fig. 2.

reale, quando $\psi_1 = 0$ si hanno le due semirette $\sigma = 0, \rho \geq 0$ e $\sigma = 2\pi, \rho \geq 0$.

La velocità, complessa, è definita nel modo seguente:

$$(3) \quad w_1 = \frac{df}{dz} = \frac{C}{2\sqrt{z}}.$$

Poichè per $z \rightarrow \infty$ è $w_1 = 0$ si tratta di una *corrente locale* perchè diviene evanescente all' ∞ . Viceversa w_1 diviene infinita nell'origine $z = 0$, com'è notorio, poichè si tratta di un saliente idrodinamico⁽¹⁾, anzi di un punto cuspidale. Se si vuol attribuire un significato alla costante reale C si può osservare che essa rappresenta la differenza del potenziale di velocità φ_1 negli estremi $\sigma = 0, \rho = 1$ e $\sigma = 0, \rho = 0$ del segmento $0 \leq \rho \leq 1$, per cui C è la *circolazione* relativa al cennato segmento: essa è positiva se il verso del flusso a valle avviene nel senso positivo dell'asse reale (fig. 1) e negativa nel caso opposto (fig. 2).

2. *Corrente traslatoria.* — La relazione

$$(4) \quad f_0 = -Vz,$$

con V costante reale positiva, è il potenziale cinetico, complesso, di una corrente traslatoria di velocità costante, parallela all'asse reale e di verso

(1) Cfr. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini (1921), p. 118.

negativo e valore V ; le corrispondenti linee di flusso sono rette parallele all'asse reale. La velocità, complessa, risulta definita dalla relazione

$$(5) \quad w_0 = \frac{df_0}{d\bar{z}} = -V.$$

3. *Corrente traslocircolatoria.* — Colla posizione

$$(6) \quad f = f_0 + f_1 = -V\bar{z} + C\sqrt{\bar{z}},$$

risulta definito il potenziale cinetico di una corrente traslocircolatoria in presenza di un profilo rigido costituito dai due bordi del semiasse reale positivo (fig. 3 e 4). Per giustificare l'andamento delle linee di flusso som-

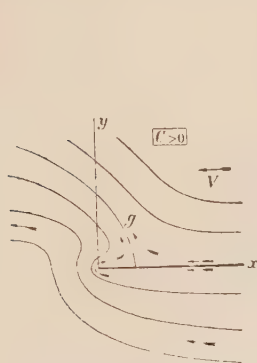


Fig. 3.

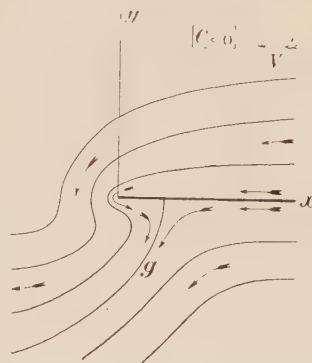


Fig. 4.

mariamente indicate nelle figure 3 e 4, basta dedurre dalla (6) le equazioni delle linee di flusso $\psi = \text{costante}$ e, in particolar modo, quella del filone g corrispondente a $\psi = 0$. Poniamo a tal uopo $z = \rho e^{i\sigma}$ $f = \varphi + i\psi$; dalla (6) si deduce:

$$(7) \quad \psi = \left(C - 2V\sqrt{\rho} \cos \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{\rho} \sin \frac{\sigma}{2}.$$

La linea di flusso $\psi = 0$ è costituita dalle semirette $\sigma = 0, \rho \geq 0$ e $\sigma = 2\pi, \rho \geq 0$, che corrispondono rispettivamente ai due bordi, superiore (verso le ordinate positive) e inferiore (verso le ordinate negative), del semiasse reale, e dalla semiparabola

$$\sqrt{\rho} \cos \frac{\sigma}{2} = \frac{C}{2V},$$

avente il vertice sull'asse reale, per asse l'asse reale stesso e per foco l'origine $z = 0$, essendo $\frac{C^2}{4V^2}$ la distanza focale: è questo il filone g , indicato nelle

figure 3 e 4. Tutte le altre linee di flusso hanno per equazioni $\psi = \text{costante}$ dove ψ è definita dalla (7), quando si attribuiscono alla costante valori diversi da zero: esse hanno l'andamento indicato nelle citate figure. La velocità, complessa, risulta definita da

$$(8) \quad w = w_0 + w_1 = -V + \frac{C}{2\sqrt{z}},$$

la quale conferma il carattere assintotico ($z \rightarrow \infty$) traslatorio della corrente e inoltre mostra che w si annulla al finito nell'unico punto $z = \frac{C^2}{4V^2}$ che è precisamente quel punto da cui si stacca il filone g dal profilo rigido. Ponendo nella (8) $z = \rho e^{i\sigma}$, si ottiene:

$$w = -V + \frac{C}{2\sqrt{\rho}} e^{-i\frac{\sigma}{2}}.$$

Ponendo $\sigma = 0$ si ottiene

$$w = -V + \frac{C}{2\sqrt{\rho}},$$

e ponendo $\sigma = 2\pi$

$$w = -V - \frac{C}{2\sqrt{\rho}},$$

le quali relazioni giustificano i versi del flusso sulle pareti rigide, indicati colle frecce nelle figure 3 e 4. Risulta inoltre dalle stesse relazioni, che in punti dei due bordi, aventi la stessa ascissa, anche i valori delle velocità sono diversi: precisamente sui due bordi, rispettivamente superiore e inferiore, si ha:

$$|w_+| = \left| \frac{C}{2\sqrt{\rho}} - V \right|, \quad |w_-| = \left| \frac{C}{2\sqrt{\rho}} + V \right|,$$

per cui, per la differenza dei quadrati, si ottiene:

$$(9) \quad |w_-|^2 - |w_+|^2 = \frac{2CV}{\sqrt{\rho}}.$$

4. *Azioni dinamiche.* — L'intensità della pressione dinamica — differenza tra la pressione effettiva e quella che, *caeteris paribus*, si avrebbe in condizioni statiche — in un generico punto è misurata da

$$p = -1/2 \mu |w|^2,$$

designando μ la densità costante del liquido; in particolare sopra un elemento $d\rho$ della parete rigida si avrà una pressione normale

$$p_+ d\rho = -1/2 \mu |w_+|^2 \quad \text{o} \quad p_- d\rho = -1/2 \mu |w_-|^2$$

secondochè essa si esplica sul bordo superiore oppure sul bordo inferiore; comunque l'azione complessiva che risente l'elemento lineare sulle due faccie si può ritenere misurato da

$$(p_+ - p_-) d\rho = 1/2 \mu (|w_-|^2 - |w_+|^2),$$

ovvero, per la (9), da

$$(10) \quad (p_+ - p_-) d\rho = \mu CV \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}.$$

Ne segue che, indicando con R l'azione dinamica complessiva subita da un segmento finito $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ di parete rigida, misurata positivamente dal bordo superiore verso l'inferiore, sarà:

$$(11) \quad R = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (p_+ - p_-) d\rho = 2 \mu CV (\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}).$$

Risulta intanto da questa relazione che il segno di R coincide con quello di C , il che significa che l'azione dinamica, normale al segmento, è sempre diretta dalla parte opposta a quella ove trovasi il filone g , brevemente si può dire che *il filone ha azione sustentatrice*.

Dalla prima delle (2) risulta che $C(\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1})$ misura la differenza di potenziale di velocità φ_1 , della corrente circolatoria, nei punti $\chi = \rho_2$ e $\chi = \rho_1$, misura cioè la circolazione relativa al bordo superiore del segmento $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ dell'asse reale - che eguaglia la circolazione corrispondente al bordo inferiore - per cui $2C(\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1})$ è la circolazione complessiva sui due bordi del detto segmento; indicandola con C^* , cioè ponendo

$$(12) \quad C^* = 2C(\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}),$$

la (11) può scriversi più semplicemente

$$(13) \quad R = \mu C^* V;$$

questa formula si può interpretare come un'espressione del teorema di Kutta-Joukowski, relativa al segmento considerato.

5. *Centro dell'azione sustentatrice*. — Ci rimane da individuare il punto del segmento in discorso che appartiene alla retta d'azione della forza sustentatrice. Chiamando ρ_0 la sua ascissa, dovrà essere per la (10),

$$\rho_0 = \frac{1}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} (p_+ - p_-) \rho d\rho = \frac{2 \mu CV}{3 R} (\rho_2 \sqrt{\rho_2} - \rho_1 \sqrt{\rho_1}),$$

ovvero, per la (12) e la (13),

$$(14) \quad \rho_0 = \frac{1}{3} \frac{\rho_2 \sqrt{\rho_2} - \rho_1 \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}.$$

In particolare, assumendo $\rho_1 = 0$, con che il primo estremo del segmento

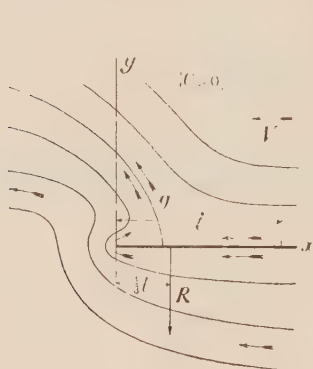


Fig. 5.

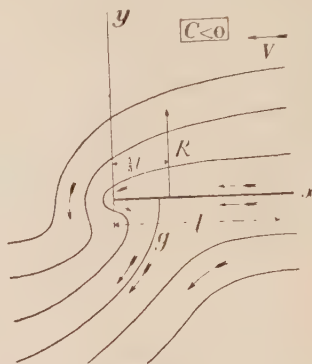


Fig. 6.

è la cuspidè del profilo, e ponendo $\rho_2 = l$, cosicchè l è la lunghezza del segmento (fig. 5 e 6), si ottiene:

$$\rho_0 = 1/3 l.$$

Astronomia. — *Moti propri e moti orbitali risultanti dal Catalogo Astrografico di Catania.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. BEMPORAD.

Le lastre del Catalogo Astrografico di Catania, presentando in qualche caso differenze di epoca di una trentina di anni, si prestano frequentemente, anche da sole, alla scoperta di moti propri o di moti orbitali degni di qualche attenzione. In casi particolarmente favorevoli basta anche un intervallo di soli due anni per mettere in luce dei fenomeni molto interessanti, ciò che costituisce una prova indiretta dell'alto grado di precisione raggiunto nella elaborazione del Catalogo. Per circa un centinaio di stelle doppie sono già stati comunicati gli elementi (angolo di posizione ω e distanza D) alle « Astronomische Nachrichten » (n. 5858 e n. 5882). Per altre molte è in corso la compilazione in base a misure e a calcoli dello scrivente. Qui ci limiteremo alla comunicazione di tre soli esempi di particolare interesse, rimandando per tutti gli altri ai volumi del Catalogo ⁽²⁾.

(1) Presentata nella seduta del 20 novembre 1932.

(2) Nel giro di cinque anni sono stati pubblicati finora dieci volumi con 51.234 posizioni stellari. Restano a pubblicarne altri sei con circa 30.000 posizioni.

a) *Stella con moto proprio annuo di 1''*: BD + 51°1696.

Si sono ottenute per questa stella le quattro posizioni seguenti che hanno condotto ai moti propri segnati nelle ultime due colonne.

Fonte	Epoca	A. R.	Decl.	Moto proprio	
				in A. R.	in Decl.
Lastra 555	1898.25	11 ^h 41 ^m 25 ^s .58	51° 27' 9".8	— 0 ^s .0946	— 0".594
» 1532	1902.25	11 41 25.23	51 27 8.0	— 0.0956	— 0.615
» 2599	1905.31	11 41 24.89	51 27 6.5	— 0.0936	— 0.631
Bergedorf ⁽¹⁾	1929.55	11 41 22.62	51 26 51.2	—	—

In media risulta il moto proprio

$$-0^s.0946 \quad -0''.613 \quad 1''.076 \text{ (in arco di C. M.)}$$

La grandezza fotografica (media 9^m.8) non si scosta molto dalla visuale (BD 9^m.3), ciò che unitamente al moto proprio può fornire qualche indizio circa l'ordine di grandezza della parallasse in base a note tabelle empiriche.

b) *Doppia fisica* BD + 50°2054.

Fonte	Epoca	A. R.	Decl.	Gr.
Bu 6754 (Σ 2)	1831.54	—	—	—
AG Cambr. 4454	1871.4	prec. 14 ^h 7 ^m 21 ^s .61	50° 42' 58".7	9.2
» 4455 ⁽²⁾		seg. 22.63	43 2.5	9.0
Lastra 1576	1902.38	prec. 14 7 20.87	50 43 6.3	10.5
(14 ^h 6 ^m + 51°)		seg. 22.04	8.8	9.8
Lastra 2600	1905.33	prec. 14 7 20.81	50 43 6.9	10.4
(14 ^h 12 ^m + 50°)		seg. 21.96	8.3	9.6
Lastra 4004	1924.41	prec. 14 7 20.38	50 43 9.0	10.5
(14 ^h 6 ^m + 51°)		seg. 21.56	11.0	9.9

Risultano di qui i seguenti valori per l'angolo di posizione ω e la distanza D:

(1) Secondo un'osservazione del Dr. Freiesleben gentilmente comunicata dal Direttore dell'Osservatorio di Bergedorf (Amburgo) prof. R. Schorr.

(2) La Decl. di AGC 4455 è in eccesso di 1'. Per la riduzione delle posizioni di AGC al sistema di Yale su cui si fondano le coordinate del Catalogo Astrografico, si è ammessa la correzione — 0^s.17 — 0".7 dedotta da 10 stelle contigue.

	ω	D
Σ	256°.2	11''.03
AGC	248 .7	10 .43
1576	257 .2	11 .17
2600	258 .6	11 .33
4004	259 .6	11 .43

1871.4-1903.85			Moto proprio			1903.85-1924.41		
Prec. — 0°.0237	+ 0''.243	0''.331	— 0°.0224	+ 0''.117	0''.243			
Seg. — 0.0194	+ 0.186	0.262	— 0.0214	+ 0.124	0.238			

Si noterà l'accordo eccellente dei moti propri dedotti per il secondo periodo, in confronto a quelli un poco discordanti del primo periodo, ciò che sta a dimostrare la superiorità delle posizioni fotografiche (1900) in confronto alle osservazioni meridiane, quali potevano aversi intorno al 1870. Anche i valori dell'angolo di posizione e della distanza si accordano meglio con Struve (Σ) che con AG. La identità dei moti propri delle due stelle e il lentissimo aumento degli elementi ω e D assicurano trattarsi di una doppia fisica con periodo lunghissimo. Nell' *Eigenbewegungs-Lexikon* del prof. Schorr (1923) non è indicata la duplicità di questa stella, mentre i valori assegnati per il moto proprio (— 0°.017, + 0''.11) sono in discreto accordo coi nostri.

c) *Doppia fisica* BD + 53°1797.

Di questa stella non è notata la duplicità in AG Cambr. per essere il compagno (α) troppo debole. Si hanno le seguenti posizioni:

Lastra	Epoca	A. R.	Decl.	Gr.
1622	1902.46	α 15 ^h 35 ^m 41 ^s .70	52° 53' 44''.0	11.6
		β 41.99	49 .2	11.1
1647	1902.50	α 15 35 41.59	52 53 42 .3	11.6
		β 41.92	47 .4	11.2
2528	1904.45	α 15 35 41.53	52 53 45 .2	11.4
		β 41.99	50 .0	11.0
2514	1904.48	α 15 35 41.54	52 53 44 .7	11.7
		β 41.96	49 .1	11.0

Dalle quattro lastre si ottengono i seguenti valori di ω e D:

	L. 1622	L. 1647	L. 2528	L. 2514
ω	207°.5	210°.2	220°.8	220°.8
D	5''.84	5''.96	6''.34	5''.81

In media:

t	ω	D
1902.48	208°.9	5".90
1904.46	220°.8	6".07

La rapidità del moto angolare accertato da quattro lastre mostra che anche questa, molto probabilmente, è una doppia fisica col periodo di circa 60 anni.

Sopra circa 100.000 stelle da me esaminate nel corso di quasi 30 anni sulle lastre di Catania questi sono finora i casi più appariscenti di stelle con forte moto proprio comune o con moto orbitale probabile. Che tali sistemi siano piuttosto rari risulta dal fatto che nel *General Catalogue* di Burnham sopra 13.665 doppie se ne contano appena 88 con orbita conosciuta e 94 ritenute come probabili binarie, ossia l'1 % appena complessivamente.

Fisica (Fisica Matematica). — *Sulle deformazioni delle piastre elastiche*. Nota I⁽¹⁾ del Socio E. ALMANZI.

1. In questa Nota, e in altre che le faranno seguito, esporrò alcuni risultati che ho potuto ottenere intorno al problema — non privo d'interesse anche per le possibili applicazioni dei risultati teorici a problemi che si presentano nella pratica — delle deformazioni di una piastra elastica sollecitata soltanto sulla superficie cilindrica, normale alle basi, che ne rappresenta il bordo.

Diciamo $2a$ lo spessore della piastra, σ_1, σ_2 le basi, σ la sezione piana equidistante da esse, s il contorno di σ . Prendiamo come piano xy il piano di σ , e fissata l'origine O , come verso positivo dell'asse delle x quello che procede da σ_1 a σ_2 .

In un punto qualunque del bordo, in particolare del contorno s di σ , diciamo α, β i coseni della normale rivolta verso l'esterno (il terzo coseno è nullo). Come verso positivo di s assumeremo quello corrispondente al verso della tangente di coseni $-\beta$ e α . Colla lettera s indicheremo anche un arco del contorno misurato, nel verso suddetto, a partire da un punto fisso P_0 .

Chiameremo t un segmento di retta parallelo all'asse delle x e limitato dalle basi della piastra; *settore* una parte del bordo compresa fra due segmenti t .

Consideriamo un settore ω compreso fra due segmenti t', t'' corrispondenti ai valori s', s'' dell'arco s ; e le componenti $\tau_x d\omega, \tau_y d\omega, \tau_z d\omega$ della

(1) Presentata nella seduta del 20 novembre 1932.

tensione agente su l'elemento $d\omega$. La forza risultante di queste forze elementari, per l'intero settore ω , avrà, secondo l'asse delle x , la componente:

$$F_x = \int_{\omega} \tau_x d\omega = \int_{s'}^{s''} ds \int_{-a}^{+a} \tau_x d\zeta.$$

Espressioni analoghe varranno per le altre due componenti F_y , F_z .

Poniamo:

$$f_x = \int_{-a}^{+a} \tau_x d\zeta, \quad f_y = \int_{-a}^{+a} \tau_y d\zeta, \quad f_z = \int_{-a}^{+a} \tau_z d\zeta.$$

Avremo

$$(1) \quad F_x = \int_{s'}^{s''} f_x ds, \quad F_y = \int_{s'}^{s''} f_y ds, \quad F_z = \int_{s'}^{s''} f_z ds.$$

Le componenti del vettore che rappresenta la coppia risultante saranno:

$$M_x = \int_{\omega} (y\tau_z - z\tau_y) d\omega = \int_{s'}^{s''} ds \int_{-a}^{+a} (y\tau_z - z\tau_y) d\zeta = \int_{s'}^{s''} ds \left\{ y \int_{-a}^{+a} \tau_z d\zeta - \int_{-a}^{+a} \tau_y z d\zeta \right\},$$

$$M_y = \int_{\omega} (z\tau_x - x\tau_z) d\omega = \int_{s'}^{s''} ds \int_{-a}^{+a} (z\tau_x - x\tau_z) d\zeta = \int_{s'}^{s''} ds \left\{ z \int_{-a}^{+a} \tau_x d\zeta - x \int_{-a}^{+a} \tau_z d\zeta \right\},$$

$$M_z = \int_{\omega} (x\tau_y - y\tau_x) d\omega = \int_{s'}^{s''} ds \int_{-a}^{+a} (x\tau_y - y\tau_x) d\zeta = \int_{s'}^{s''} ds \left\{ x \int_{-a}^{+a} \tau_y d\zeta - y \int_{-a}^{+a} \tau_x d\zeta \right\}.$$

Ponendo

$$(2) \quad m_x = \int_{-a}^{+a} \tau_x z d\zeta, \quad m_y = \int_{-a}^{+a} \tau_y z d\zeta.$$

avremo:

$$(3) \quad M_x = \int_{s'}^{s''} (yf_z - m_y) ds, \quad M_y = \int_{s'}^{s''} (m_x - xf_z) ds,$$

$$M_z = \int_{s'}^{s''} (xf_y - yf_x) ds.$$

Chiameremo *sollecitazioni* le cinque quantità, funzioni di s ,

$$f_x, f_y, f_z, m_x, m_y.$$

Date le sollecitazioni, conosceremo la forza e la coppia agenti sopra un settore qualunque del bordo.

Introduciamo ancora le quantità:

$$(4) \quad m_s = m_x \alpha + m_y \beta, \quad m_n = m_y \alpha - m_x \beta.$$

Sarà per le formule (2):

$$m_s = \int_{-a}^{+a} (\tau_x \alpha + \tau_y \beta) z dz, \quad m_n = \int_{-a}^{+a} (\tau_y \alpha - \tau_x \beta) z dz,$$

ovvero:

$$m_s = \int_{-a}^{+a} \tau_n z dz, \quad m_n = \int_{-a}^{+a} \tau_s z dz,$$

dove $\tau_n = \tau_x \alpha + \tau_y \beta$ e $\tau_s = \tau_y \alpha - \tau_x \beta$ rappresenteranno, in un punto qualunque di un segmento t che tagli il contorno s di σ nel punto P, le componenti della tensione unitaria secondo la normale ad s (nel piano di σ) e la tangente, nel punto P. Le quantità $m_s ds$ ed $m_n ds$ rappresentano i momenti, rispetto alla tangente e alla normale, delle tensioni agenti sopra un settore compreso fra due segmenti $t' t''$ distanti fra loro di ds .

Dalle formule (4) si ricava:

$$(5) \quad u_x = m_s \alpha - m_n \beta, \quad m_y = m_n \alpha - m_s \beta^{(1)}.$$

2. Noi ci limiteremo a considerare stati di equilibrio di una piastra isotropa.

La piastra, come abbiamo detto, si suppone sollecitata soltanto sul bordo; le basi sono dunque libere, le forze di massa si suppongono nulle.

Per l'equilibrio della piastra dovranno allora esser nulle la forza e la coppia agenti su l'intero bordo, vale a dire dovrà aversi per le formule (1) e (3):

$$(6) \quad \begin{cases} \int_s f_x ds = 0, & \int_s f_y ds = 0, & \int_s f_z ds = 0 \\ \int_s (y f_z - m_y) ds = 0, & \int_s (m_x - x f_z) ds = 0, & \int_s (x f_y - y f_x) ds = 0. \end{cases}$$

Le sollecitazioni f_x, f_y, f_z, m_x, m_y potranno evidentemente esser nulle, per ogni segmento t , senza che sia nulla la tensione su tutti gli elementi $d\omega$ del bordo; quindi a date sollecitazioni potranno corrispondere infiniti sistemi di tensioni, e per conseguenza infinite deformazioni della piastra. Ma se lo spessore $2a$ è molto piccolo rispetto alle dimensioni lineari di σ , si può, in generale, ritenere che la deformazione, esclusa una piccola regione attigua al bordo, sia praticamente determinata dai valori che hanno, per ogni segmento t , le cinque sollecitazioni: date le quali, come abbiamo veduto, si conosce, per ogni settore del bordo, la forza e la coppia risultanti.

(1) Le quantità $f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_s, m_n$ sono quelle che il Clebsch denota con $U', V', W', U'', V'', M_s, M_n$ (v. *Théorie de l'Élasticité*, trad. di SAINT-VENANT e FLAMANT, pp. 669 e 693).

Lo scopo delle nostre ricerche sarà essenzialmente quello di individuare una classe di *deformazioni tipo*, ossia di deformazioni semplici per quanto è possibile, e tali che, assegnate ad arbitrio le sollecitazioni (soddisfacenti le condizioni di equilibrio), vi sia sempre fra esse almeno una deformazione alla quale corrispondano le sollecitazioni date.

Quando le sollecitazioni sono nulle, anche se le tensioni non sono nulle su tutto il bordo, noi assumiamo come deformazione tipo una *deformazione nulla*.

3. Nello studio delle deformazioni di una piastra hanno particolare importanza quei sistemi di sollecitazioni nei quali la f_x e la f_y sono nulle, e le tre rimanenti f_z , m_x , m_y verificano le condizioni

$$(7) \quad m_s = 0 \quad , \quad f_z + \frac{dm_n}{ds} = 0, \quad "$$

m_s , m_n essendo le quantità definite dalle formule (4).

Dalla seconda delle (7), e dalle (5) ove si ponga $m_s = 0$, avremo

$$(8) \quad f_z = -\frac{dm_n}{ds} \quad , \quad m_x = -m_n \beta \quad , \quad m_y = m_n \alpha .$$

Il momento m_n , mediante il quale si esprimono le tre sollecitazioni f_z , m_x , m_y , si supporrà continuo.

Chiameremo (K_0) le condizioni rappresentate dalle formule (7).

Consideriamo, come nel § 1, un settore del bordo compreso fra due segmenti t' , t'' , corrispondenti ai valori s' , s'' , dell'arco s . Essendo $f_x = f_y = 0$, sarà $F_x = F_y = M_z = 0$; e sul settore considerato agiranno soltanto la forza

$$F_z = \int_{s'}^{s''} f_z ds ,$$

e i momenti

$$M_x = \int_{s'}^{s''} (y f_z - m_y) ds \quad , \quad M_y = \int_{s'}^{s''} (m_x - x f_z) ds .$$

Per le formule (8) sarà:

$$F_z = - \int_{s'}^{s''} \frac{dm_n}{ds} ds ,$$

$$M_x = \int_{s'}^{s''} \left(-y \frac{dm_n}{ds} - m_n \alpha \right) ds \quad , \quad M_y = \int_{s'}^{s''} \left(-m_n \beta + x \frac{dm_n}{ds} \right) ds .$$

Ma $\alpha = \frac{dy}{ds}$, $\beta = -\frac{dx}{ds}$; quindi:

$$M_x = - \int_s'' \frac{d(m_n \cdot y)}{ds} ds, \quad M_y = \int_s'' \frac{d(m_n \cdot x)}{ds} ds.$$

Eseguendo le integrazioni avremo:

$$(9) \quad \begin{cases} F_x = (m_n)_{s'} - (m_n)_{s''}, \\ M_x = (m_n \cdot y)_{s'} - (m_n \cdot y)_{s''}, \end{cases}, \quad M_y = (m_n \cdot x)_{s'} - (m_n \cdot x)_{s''},$$

Per l'intero bordo sarà $F_x = M_x = M_y = 0$. Dunque, allorchè f_x ed f_y sono nulle, m_n è continuo, e sono verificate le condizioni (K_0) , le condizioni per l'equilibrio della piastra risultano soddisfatte.

4. Avremo in seguito da considerare l'integrale

$$J = \int_s \left(x m_x + y m_y - \frac{r^2}{2} f_x \right) ds,$$

ove $r^2 = x^2 + y^2$. Esso è indipendente dalla scelta degli assi (supposto che il piano xv coincida sempre col piano di σ). Infatti, facendo rotare gli assi delle x e delle y , senza spostare l'origine, non variano nè r , nè f_x , nè $x m_x + y m_y$; mentre un puro spostamento dell'origine, ossia la sostituzione di x, y, r^2 con $x - x_0, y - y_0, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ ($x_0, y_0 = \text{cost.}$), dà luogo a termini che risultano nulli in virtù delle tre, fra le condizioni d'equilibrio (6), che contengono f_x, m_x, m_y .

Noi vogliamo qui far vedere che quando sono verificate le condizioni (K_0) , ed m_n è continuo, l'integrale J è nullo.

Sostituiamo per ciò ad f_x, m_x, m_y le loro espressioni date dalle formule (8). Avremo:

$$J = \int_s \left\{ (-x\beta + y\alpha) m_n + \frac{r^2}{2} \frac{dm_n}{ds} \right\} ds.$$

Ma $-x\beta + y\alpha = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{r^2}{2}$. Dunque

$$J = \int_s \left(\frac{d}{ds} \frac{r^2}{2} \cdot m_n + \frac{r^2}{2} \frac{dm_n}{ds} \right) ds = \int_s \frac{d}{ds} \left(\frac{r^2}{2} \cdot m_n \right) ds,$$

e per conseguenza $J = 0$.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Vedute geometriche sui tensori.* Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPINA BIGGIOGERO, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. La geometria iperspaziale può illuminare alcune questioni di calcolo tensoriale, rivelando l'intimo *perchè* di certe proprietà e conferendo a talune di esse caratteri di *visibilità* o di immediata *evidenza*.

Nella presente Nota, introdotta la rappresentazione geometrica di un tensore *m*^{plo} qualsiasi, mi limito alla considerazione dei tensori doppi.

Gioverà ricordare alcune definizioni del calcolo tensoriale:

a) *Tensore.* Prefissata nello spazio ordinario una terna cartesiana ortogonale ($O; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) e assegnate 3^m funzioni $T_{i_1 \dots i_m}$ ($i_1 \dots i_m$ essendo una generica disposizione con ripetizione di 1, 2, 3), si dirà che le $T_{i_1 \dots i_m}$ *definiscono cartesianamente un tensore m^{plo} T* quando, passando ad altro sistema ortogonale di riferimento ($\bar{O}; \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$), le nuove componenti $\bar{T}_{j_1 \dots j_m}$ dello stesso tensore risultano legate alle primitive dalle relazioni ⁽²⁾

$$(I) \quad \bar{T}_{j_1 \dots j_m} = \sum_{i_1 \dots i_m} T_{i_1 \dots i_m} \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_m j_m}$$

con $\alpha_{ij} = \cos(\gamma_i \bar{\gamma}_j)$; quindi $\|\alpha_{ij}\| = \pm 1$.

b) *Isotropia ed emisotropia.* Un tensore è *isotropo* se le sue componenti non cambiano, cambiando comunque la terna cartesiana di riferimento; è invece *emisotropo* se le sue componenti rimangono inalterate per un cambiamento di coordinate a determinante + 1, e si mutano nelle opposte per un cambiamento di coordinate a determinante - 1 ⁽³⁾.

c) *Simmetria ed emisimmetria.* Un tensore è *simmetrico* quando sono uguali le sue componenti che differiscono soltanto per l'ordine degli indici; è invece *emisimmetrico* se lo scambio di due indici qualunque porta al cambiamento di segno della componente; quindi sono nulle tutte le componenti con indici non tutti distinti ⁽⁴⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1932.

(2) Cfr. U. CISOTTI, *Lezioni di calcolo tensoriale*, Milano (1928), Tamburini, n. 7; *Cenni sui fondamenti del calcolo tensoriale*, Milano (1932) Hoepli, n. 14.

(3) Seconda opera citata, n. 5 e anche U. CISOTTI *Tensori isotropi*. Questi «Rendiconti», vol. XI, serie 6^a, I sem. 1930, pp. 727-731; *Tensori isotropi e tensori emisotropi*. Ibid. pp. 917-920.

(4) Prima opera citata, n. 7.

Passiamo alla rappresentazione geometrica. In ogni punto Q dello spazio ordinario le componenti $T_{i_1 \dots i_m}$ di un tensore \mathbf{T} diventano 3^m numeri; lo stesso accade delle componenti $\bar{T}_{i_1 \dots i_m}$ e le due 3^m -ple di numeri sono tra loro legate dalla (1). Così a ogni punto Q dello spazio ordinario si possono far corrispondere due punti \mathbf{P} e $\bar{\mathbf{P}}$ di uno spazio euclideo a 3^m dimensioni (di un S_{3^m}). E variando Q in modo da descrivere tutto lo spazio ordinario, varieranno, in corrispondenza, \mathbf{P} e $\bar{\mathbf{P}}$ nello S_{3^m} , descrivendo due varietà Σ e $\bar{\Sigma}$ (dipendenti dalla natura delle $T_{i_1 \dots i_m}$). Si vedrà che la corrispondenza tra \mathbf{P} e $\bar{\mathbf{P}}$ è una *proiettività*; e l'essere un tensore *isotropo* vorrà dire che, mentre il punto Q varia nello spazio ordinario, il punto \mathbf{P} si muove nello S_{3^m} , sempre coincidendo col suo omologo $\bar{\mathbf{P}}$, cioè descrivendo una varietà Σ tutta formata di *particolari* punti uniti. *Particolari*, perchè le coordinate di un punto unito saranno, in generale, funzioni dei coefficienti α_{ij} , e invece l'isotropia prescinde dai valori di tali coefficienti.

Per noi dunque lo studio dell'isotropia consisterà nel cercarne, in certo modo, la *regione*, il *campo*.

In modo analogo si studieranno la simmetria e l'emisimmetria: questi caratteri, dovendo sussistere tanto sulle componenti $T_{i_1 \dots i_m}$ che sulle $\bar{T}_{i_1 \dots i_m}$, procederanno dall'esistenza di *particolari* spazi uniti dello S_{3^m} , *particolari* sempre nel senso di indipendenti dagli α_{ij} .

2. Tensori semplici. Un breve cenno sui tensori semplici aiuterà le considerazioni che seguono.

Per noi i tensori semplici sono i punti $\mathbf{P} \equiv (T_1, T_2, T_3)$ di un S_3 euclideo, riferito a una terna di assi ortogonali (t_1, t_2, t_3) . Il punto $\bar{\mathbf{P}} \equiv (\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3)$, per essere

$$\bar{T}_j = \sum_i T_i \alpha_{ij}$$

è il corrispondente di \mathbf{P} in una nota ⁽¹⁾ omografia π_τ , per la quale il determinante dei coefficienti è un determinante ortogonale.

Per la π_τ l'origine O degli assi è un punto unito e due punti corrispondenti hanno uguale distanza da O : tenendo presente questa circostanza ci si può ridurre a considerare l'omografia subordinata dalla π_τ nella stella di centro O . Se una retta *reale* per O è unita, su di essa la π_τ subordina l'identità oppure la simmetria rispetto a O . Per cui, a prescindere da par-

(1) Cfr. L. BERZOLARI, *Geometria analitica*, I, Milano (1920), Hoepli, p. 176 e p. 437; G. CASTELNUOVO *Lezioni di geometria analitica*, Milano-Roma-Napoli (1924), pp. 139; 144; 324.

ticolari omografie dello S_3 (identità o simmetrie), delle tre rette unite per O una sola u sarà reale, mentre le altre due, a e b , saranno immaginarie coniugate. Precisamente sulla u avremo l'identità oppure la simmetria secondo che sia $\|\alpha_{ij}\| = \pm 1$, mentre le a e b saranno le rette di lunghezza nulla del piano per O perpendicolare alla u .

In ogni caso le rette unite della π_1 hanno coordinate che dipendono dagli α_{ij} ; e però, fatta eccezione del punto O , non esistono tensori semplici isotropi od emisotropi. Questa circostanza si rileva anche dal fatto che cambiando il verso sull'asse \bar{y}_i cambiano di segno tutti i termini della riga i^{ma} del determinante $\|\alpha_{ij}\|$, epperò cambia di segno la \bar{T}_i , e questa soltanto.

3. Tensori doppi. Sono i punti $P \equiv (T_{i_1 i_2})$ o $\bar{P} \equiv (\bar{T}_{j_1 j_2})$ di uno spazio euclideo a nove dimensioni, riferito a nove assi cartesiani ortogonali $t_{i_1 i_2}$, uscenti da un punto O . Il legame tra P e \bar{P} è stabilito dalla (1) per $m = 2$, cioè

$$(2) \quad \bar{T}_{j_1 j_2} = \sum_{i_1 i_2}^3 T_{i_1 i_2} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \quad i_1, i_2, j_1, j_2 = 1, 2, 3.$$

È facile dimostrare che le (2) rappresentano una proiettività π_2 non degenerare: infatti, esse sono relazioni lineari tra le $T_{i_1 i_2}$ e le $\bar{T}_{j_1 j_2}$ col determinante dei coefficienti diverso da zero, anzi uguale a ± 1 . Questa circostanza segue dal fatto che gli 81 coefficienti delle (2) soddisfano alle condizioni di ortogonalità, cioè la somma dei quadrati degli elementi di una stessa linea è uguale all'unità e la somma dei prodotti degli elementi omologhi di due linee parallele è uguale a zero. Pertanto la (2) rappresenta una *sostituzione ortogonale*: quindi un movimento o una simmetria rispetto a O . Ne segue che la (2) conserva le distanze, gli angoli, le aree, i volumi.

Basta questa conclusione per darci una ragione immediata di alcuni invarianti del calcolo tensoriale, ai quali la nostra interpretazione appresta un significato geometrico, rispondente ai nomi che tali invarianti già riceveranno. Invero, il calcolo tensoriale dimostra ⁽¹⁾ che sono invarianti rispetto al passaggio dal tensore T al \bar{T} e per qualunque terna ortogonale di riferimento le espressioni

$$T = \sqrt{\Sigma T_{ij}^2} \quad T \times U = \Sigma T_{ij} U_{ij} \quad P = \frac{1}{2} \sqrt{\Sigma (T_{i_1 i_2} U_{j_1 j_2} - T_{j_1 j_2} U_{i_1 i_2})^2}$$

che rispettivamente si chiamano *modulo del tensore T* , *prodotto scalare dei due tensori T e U* , *modulo del prodotto tensoriale dei due tensori T e U* (a meno del fattore $\frac{1}{2}$).

(1) U. CISOTTI, Seconda opera citata, pp. 30-43.

Per noi questi invarianti sono evidenti, rappresentando rispettivamente la distanza di \mathbf{T} da \mathbf{O} (\mathbf{O} punto unito); il coseno dell'angolo $\widehat{\mathbf{T}\mathbf{O}\mathbf{U}}$ (a prescindere dal fattore $\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}$, che è pure invariante) e l'area del triangolo $\mathbf{T}\mathbf{O}\mathbf{U}$. Non solo, ma l'annullarsi della $\sum T_{ij} U_{ij}$ esprimerà che le rette \mathbf{OT} , \mathbf{OU} sono ortogonali (*condizioni di ortogonalità* di due tensori), come l'essere $\mathbf{P} = 0$ esprimerà che i due tensori \mathbf{T} e \mathbf{U} sono allineati con \mathbf{O} (*parallelismo*).

E ci sarà consentito di vedere subito altri invarianti ed altre relazioni, come la *distanza di due tensori* ($d = \sqrt{\sum (T_{ij} - U_{ij})^2}$), i *volumi delle iperpiramidi* definite da h tensori indipendenti dello S_9 , ed altri ancora, espressi da formole più o meno complicate, che qui, per brevità, omettiamo.

4. *Tensori doppi simmetrici e tensori doppi emisimmetrici.* Agli effetti della simmetria e dell'emisimmetria interessa la conoscenza degli elementi uniti del nostro S_9 , o, se si vuole, degli spazi uniti per \mathbf{O} , tenuto presente che l'iperpiano improprio è unito.

La ricerca di questi elementi uniti si farà senza ricorrere alla risoluzione di complicati sistemi: basterà analizzare con quali operazioni si passa da un punto \mathbf{P} al suo omologo $\bar{\mathbf{P}}$.

Consideriamo, dentro lo S_9 , tre S_3 di riferimento, passanti per \mathbf{O} e a due a due ortogonali: siano essi $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, rispettivamente definiti dalle terne di assi

$$(t_{11}, t_{12}, t_{13}) \quad (t_{21}, t_{22}, t_{23}) \quad (t_{31}, t_{32}, t_{33})$$

e agli stessi assi ordinatamente riferiti. Dato un punto \mathbf{P} , si conoscono le sue tre proiezioni ortogonali $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ dentro gli spazi Σ ; viceversa, esiste uno e un solo punto \mathbf{P} di date proiezioni \mathbf{P}_i . Scriveremo pertanto:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3.$$

Similmente si dica per altri tre spazi di riferimento $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3$, rispettivamente definiti dalle terne di assi

$$(t_{11}, t_{21}, t_{31}) \quad (t_{12}, t_{22}, t_{32}) \quad (t_{13}, t_{23}, t_{33})$$

e agli stessi assi ordinatamente riferiti. Se \mathbf{P}'_i è la proiezione ortogonale di un punto \mathbf{P} dentro il Σ'_i , si avrà

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2 + \mathbf{P}'_3.$$

Ciò posto, l'esame dei coefficienti della (2) permette di vedere che il passaggio da un punto \mathbf{P} al suo corrispondente $\bar{\mathbf{P}}$ si può operare così:

1°. Si proietti \mathbf{P} negli spazi Σ_i , così ottenendo i punti \mathbf{P}_i .

2°. Dentro il Σ_i , riguardato come un S_3 separato, si operi l'omo-

grafia π_i : questa trasformerà il punto $\mathbf{P}_i \equiv (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$ nel punto $\mathbf{P}_i^* \equiv (T_{i1}^*, T_{i2}^*, T_{i3}^*)$ per cui

$$T_{ij}^* = \sum_h^3 T_{ih} \alpha_{hj}.$$

Ciò, lasciando naturalmente ferme le altre coordinate, porta a una trasformazione dello S_9 che indicheremo con ρ_i .

3°. Si proietti il punto $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_2^* + \mathbf{P}_3^*$ dentro gli spazi Σ'_i , così ottenendo i punti $\mathbf{P}'_i \equiv (T_{1i}^*, T_{2i}^*, T_{3i}^*)$.

4°. Dentro il Σ'_i , considerato come un S_3 separato, si operi l'omografia π_i , la quale trasformerà il punto \mathbf{P}'_i nel punto $\mathbf{P}_i \equiv (\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{2i}, \bar{T}_{3i})$ con

$$\bar{T}_{ji} = \sum_h^3 T_{hi}^* \alpha_{hj}.$$

Ciò, lasciando ferme le altre coordinate, porta a una omografia dello S_9 che denoteremo ρ'_i .

5°. Infine sarà $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_1 + \bar{\mathbf{P}}_2 + \bar{\mathbf{P}}_3$ e però, in definitiva,

$$\pi_2 = \rho'_3 \rho'_2 \rho'_1 \rho_3 \rho_2 \rho_1.$$

Viceversa si passa da $\bar{\mathbf{P}}$ a \mathbf{P} .

Le considerazioni che precedono e l'esame dei coefficienti della (2) mostrano chiaramente quanto segue:

I. Si può scambiare l'ufficio degli spazi Σ_i con quello dei Σ'_i , operando prima nei Σ'_i e poi nei Σ_i . In simboli si scriverà

$$\pi_2 = \rho_3 \rho_2 \rho_1 \rho'_3 \rho'_2 \rho'_1.$$

II. Detta σ l'omografia involutoria che porta T_{ij} in T_{ji} , si osservi che la σ trasforma la ρ_i nella ρ'_i ; tenendo allora presente la propr. I, e ricordando che la trasformati di un prodotto è il prodotto delle trasformate, si avrà:

$$\sigma \pi_2 \sigma = \sigma \rho'_3 \rho'_2 \rho'_1 \rho_3 \rho_2 \rho_1 \sigma = \rho_3 \rho_2 \rho_1 \rho'_3 \rho'_2 \rho'_1 = \pi_2$$

cioè la π_2 è invariante per la σ . Si ha così che *a punti simmetrici rispetto allo S_6 comune agli iperpiani*

$$(3) \quad T_{12} = T_{21} \quad T_{13} = T_{31} \quad T_{23} = T_{32}$$

corrispondono punti simmetrici rispetto allo stesso S_6 .

III. L'essere la π_2 invariante per la σ comporta che anche la σ è invariante per la π_2 , cioè è unito lo S_6 rappresentato dalle (3) (S_6 simmetrico).

IV. Si indichi con γ l'omografia che porta T_{ij} in $-T_{ij}$: la γ è permutabile con la π_2 , quindi anche l'omografia prodotto $\Sigma = \gamma\sigma$ è permutabile con π_2 . Ciò dice che è unito lo S_3 comune agli iperpiani

$$(4) \quad T_{ii} = 0 \quad T_{ij} = -T_{ji}$$

che chiameremo S_3 emisimmetrico.

Osservazione. La proprietà IV procede senz'altro dalla III. Infatti lo S_3 emisimmetrico è lo S_3 perpendicolare allo S_6 simmetrico nel punto O; e la π_2 , lasciando fermi il punto O e lo S_6 simmetrico e conservando gli angoli, lascerà fermo anche lo S_3 emisimmetrico.

5. *Tensori doppi isotropi.* Cerchiamo i tensori doppi isotropi. Se esistono, essi dovranno essere punti dello S_9 invarianti per qualunque cambiamento degli assi \bar{y}_i , in particolare, per il cambiamento del verso su uno di questi assi, per esempio su \bar{y}_1 . Ma con ciò cambiano segno i coefficienti della prima riga del determinante $\|\alpha_{ij}\|$, epperò cambiano segno le tre coordinate T_{11}^* , T_{21}^* , T_{31}^* . Proiettando negli spazi Σ'_i e operando le ρ'_i , si troverà che cambieranno segno tutte le \bar{T}_{1j} e le \bar{T}_{j1} con $j \neq 1$, mentre la \bar{T}_{11} , avendo subito due cambiamenti di segno, si sarà riprodotta inalterata.

Cambiando successivamente il verso anche sopra \bar{y}_2 e \bar{y}_3 si troverà così che *affinchè un punto sia isotropo è necessario che siano nulle tutte le sue coordinate T_{ij} con $i \neq j$.*

Pertanto un punto isotropo andrà cercato nello S_3 definito dagli assi t_{11} , t_{22} , t_{33} . Consideriamo dunque un punto di questo S_3 . Se esso è isotropo, risulterà, in particolare, invariante per lo scambio di due assi \bar{y}_i . Ma lo scambio di \bar{y}_1 con \bar{y}_2 porta lo scambio, in $\|\alpha_{ij}\|$ della prima riga con la seconda, epperò lo scambio, in ogni P_i^* della prima con la seconda coordinata (T_{i1}^* con T_{i2}^*). Ne segue, quando si proietta nei Σ'_i , lo scambio di P_1' con P_2' e lo scambio, in ogni matrice, della prima riga con la seconda. Onde sorge lo scambio di \bar{T}_{11} con \bar{T}_{22} . Analogamente, lo scambio dei due assi \bar{y}_2 e \bar{y}_3 porta \bar{T}_{22} in \bar{T}_{33} , epperò, in definitiva, *condizione necessaria affinchè un punto sia isotropo è che esso abbia coordinate del tipo*

$$(5) \quad T_{ii} = A \quad T_{ij} = 0$$

con A scalare qualsiasi.

Che le (5) siano anche condizioni *sufficienti* per l'isotropia si rileva trasformando mediante le (2) un punto soddisfacente alle stesse condizioni (5), per esempio il punto $T_{ii} = 1$ $T_{ij} = 0$. Poichè esso risulta isotropo concludiamo che *sono tensori doppi isotropi tutti i punti della retta (retta isotropa) rappresentata dalle (5).*

Osservazioni. - 1^a Ogni iperpiano perpendicolare alla retta isotropa sarà unito; cioè sarà unito ogni iperpiano di equazione

$$(6) \quad T_{11} + T_{22} + T_{33} = h.$$

Questo fatto spiega *perchè* la somma $T_{11} + T_{22} + T_{33}$ sia un *invariante* per un tensore doppio qualsiasi. Invero preso, nello S_9 , un punto \mathbf{P} , lo iperpiano per \mathbf{P} perpendicolare alla retta isotropa ha una equazione del tipo (6) ed è unito. Il trasformato di \mathbf{P} , dovendo giacere nello iperpiano stesso, avrà coordinate \bar{T}_{ii} che ancora soddisferanno la (6).

2^a Tutti gli S_3 perpendicolari allo S_6 simmetrico nei punti isotropi sono uniti. Essi hanno equazioni del tipo

$$T_{ii} = A \quad T_{ij} = -T_{ji}$$

epperò sarà

$$\bar{T}_{ii} = A \quad \bar{T}_{ij} = -\bar{T}_{ji}.$$

Questi S_3 sono tutti paralleli allo S_3 emisimmetrico.

Matematica (Analisi). — *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali.* Nota II ⁽¹⁾ di R. CACCIOPOLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

5. Consideriamo ancora l'equazione

$$(I) \quad \Delta_2 \zeta = f(x, y, \zeta, p, q);$$

è istruttivo vedere come ne vada modificata la trattazione quando si vogliano introdurre fin dal principio le derivate seconde, evitando l'impiego del Δ_2 generalizzato. Avremo così una nuova applicazione del metodo, immediatamente estensibile ad un'equazione molto più generale.

Supporremo ora sul contorno Γ la curvatura e le funzioni $\zeta''(s)$, $\omega''(s)$ dotate di derivate prime continue rispetto all'arco (queste condizioni potrebbero sostituirsi con altre meno restrittive, del tipo di Hölder), ed in C le derivate seconde delle funzioni $\zeta(x, y)$ e le funzioni $\mu(x, y)$ soddisfacenti ad una condizione di Hölder con un esponente $\lambda < 1$ ⁽²⁾. Come distanze prenderemo in Σ

$$\max |\Delta_2 \zeta_1 - \Delta_2 \zeta_2| + |\Delta_2 \zeta_1 - \Delta_2 \zeta_2|_\lambda + \max |\zeta_1 - \zeta_2| + \max |\zeta_1''' - \zeta_2'''|,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1932.

(2) Cioè $|\mu(x_1, y_1) - \mu(x_2, y_2)| \leq \text{cost.} \times (\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})^\lambda$.

ed in Σ'

$$\max |\mu_1 - \mu_2| + |\mu_1 - \mu_2|_\lambda + \max |\omega_1 - \omega_2| + \max |\omega_1''' - \omega_2'''|,$$

dove indichiamo in generale, seguendo Lichtenstein, con $|F|_\lambda$ il minimo coefficiente ammissibile, per la funzione $F(x, y)$, nella disuguaglianza di Hölder con l'esponente λ , cioè il numero

$$\max \frac{|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)|}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\lambda/2}}.$$

Quanto alla funzione $f(x, y, \zeta, p, q)$, supporremo che essa abbia derivate seconde continue.

Con tali posizioni la risolubilità dell'equazione (2) equivale ancora alla condizione per l'invertibilità locale della corrispondenza T ; infatti per un integrale u della (2), quando limitati la funzione al contorno ed il termine noto k , la prima del terzo ordine ed il secondo con $|k|_\lambda$, risulta limitato $|\Delta_2 u|_\lambda$.

Queste ultime considerazioni si applicano immutate all'equazione generale (di cui sono casi particolari le equazioni di Lagrange dei problemi regolari di Calcolo delle variazioni)

$$(3) \quad A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = f$$

dove A, B, C, f sono funzioni di x, y, ζ, p, q (che supponiamo due volte derivabili) e

$$B^2 - AC < 0.$$

Qui $\mu(x, y)$ è la funzione

$$A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - f;$$

e la definizione di distanza, oltre che in Σ' , può conservarsi anche in Σ , dove implica in sostanza che al tendere allo zero di un punto (ζ) , tendono a zero la funzione ζ , le sue derivate dei primi due ordini, ed i minimi coefficienti di Hölder per le derivate seconde.

In particolare l'equazione a variazione è priva di autosoluzioni quando A, B, C non contengono la ζ , e $\frac{\partial f}{\partial \zeta} \equiv 0$. Quindi in tal caso nell'intorno di un integrale ζ_0 della (3) esiste un unico integrale che assuma al contorno valori arbitrariamente prefissati in un intorno (del terzo ordine) di quelli di ζ_0 .

Volendo trattare ancora la medesima quistione per l'equazione più generale di tipo ellittico

$$(4) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

(con le notazioni di Monge) andranno introdotte, atteso che le derivate seconde di z figurano in tutti i coefficienti dell'equazione a variazioni, ulteriori condizioni di regolarità, facili a determinarsi; così le funzioni z si prenderanno tre volte derivabili, e con derivate terze verificanti la condizione di Hölder.

Viceversa le condizioni di regolarità possono attenuarsi in casi particolari; p. es. per l'equazione ben nota

$$\Delta_2 z = f(x, y, z)$$

Γ potrà essere una qualunque curva di Jordan, Σ sarà lo spazio delle funzioni continue in C con i loro Δ_2 , e come distanza vi si assumerà

$$\max |\Delta_2 z_1 - \Delta_2 z_2| + \max |\zeta_1 - \zeta_2|,$$

prendendo poi in Σ'

$$\max |\mu_1 - \mu_2| + \max |\omega_1 - \omega_2|,$$

e astringendo le funzioni ω alla sola continuità.

6. Allo stesso modo che i precedenti risultati sulle piccole variazioni dei dati ai limiti dipendono dall'inversione di corrispondenze funzionali, quelli relativi a variazioni dell'equazione stessa (di solito ottenute mercè incrementi di un parametro introdotto nell'equazione) si inquadrano nella teoria generale delle funzioni implicite di linee.

Tornando alle notazioni del n. 1, sia

$$\varphi' = T[\varphi, \alpha]$$

una corrispondenza tra Σ e Σ' , dipendente da un parametro α , che potrà anche essere un punto di uno spazio ad n dimensioni, o di uno spazio funzionale lineare. Supponiamo l'operazione $T[\varphi, \alpha]$ differenziabile, nel senso che si abbia

$$\delta\varphi' = D[\varphi, \alpha, \delta\varphi, \delta\alpha]$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore, con D operazione lineare in $\delta\varphi, \delta\alpha$, e continua uniformemente in φ, α al variare degli altri due argomenti in un campo limitato.

Se la trasformazione lineare

$$\omega' = D [\varphi_0, \alpha_0, \omega, 0]$$

è invertibile, l'equazione funzionale precedente è risolubile rispetto a φ mediante una relazione

$$\varphi = T' [\varphi', \alpha],$$

per $\varphi, \alpha, \varphi'$ compresi in intorno di $\varphi_0, \alpha_0, \varphi'_0 = T [\varphi_0, \alpha_0]$ rispettivamente, sicchè la corrispondenza T è invertibile in un intorno di φ'_0 per α sufficientemente prossimo ad α_0 .

Si può enunciare sommariamente, ed in questa forma il risultato è intuitivo, che se T è invertibile, a norma del teorema generale, in un intorno di φ'_0 , è tale anche una trasformazione prossima del primo ordine a T .

Come applicazione consideriamo l'equazione (3), supponendone i coefficienti funzioni, oltre che degli argomenti x, y, z, p, q , anche di un parametro reale α . L'equazione a variazioni sia priva di autosoluzioni per un particolare valore α_0 di α , e per un corrispondente integrale z_0 della (3): allora v'è in un intorno di z_0 , per ogni valore di α sufficientemente prossimo ad α_0 , un unico integrale della (3) che coincida sul contorno con z_0 .

Un teorema analogo potrebbe dimostrarsi per l'equazione (4).

Anche per questo nuovo principio v'ha luogo a ricercare condizioni supplementari, analoghe a quelle assicuranti nei casi precedenti l'invertibilità in grande, che permettano di estendere il campo di validità dei risultati acquisiti soltanto in piccolo attraverso lo studio dell'equazione a variazioni.

In generale si tratterà di assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione in φ

$$\varphi'_0 = T [\varphi, \alpha],$$

al variare di α in una varietà V , ad una, o più, o infinite dimensioni.

Supposta l'invertibilità di T intorno a φ'_0 per α su V , se è compatta ogni successione di soluzioni dell'equazione precedente relativa ad una successione convergente di punti α di V , e se dippiù per un particolare punto α_0 la soluzione è unica, tale equazione si risolve mediante una relazione della forma

$$\varphi = T' [\varphi'_0, \alpha] = S [\alpha]$$

dove l'operazione S è univocamente determinata su V .

Così p. es. l'equazione

$$\Delta_2 z = \alpha f(x, y, z, p, q),$$

con f crescente in z e $\alpha > 0$, ammette certamente, per $\alpha = 0$ e quindi per α sufficientemente piccolo, un unico integrale $z(x, y, \alpha)$ che prenda su

I valori ζ prefissati: questo esisterà allora anche per $\alpha = \beta$, sempre che per $0 < \alpha < \beta$ si possano assegnare a priori limitazioni per $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$.

7. Nelle applicazioni dei risultati precedenti alle equazioni ellittiche non lineari possiamo scorgere ormai tutte le linee essenziali del metodo generale per lo studio di queste equazioni. L'idea direttrice del metodo è quella di collegare un dato problema di Dirichlet ad altro più semplice o già noto, ciò che può ottenersi o facendo variare i valori al contorno assegnati, o pure facendo variare l'equazione stessa, p. es. con l'introdurvi un parametro; quest'ultimo è l'artificio già frequentemente adoperato da Bernstein nelle sue ricerche sulle equazioni a derivate parziali. Risolto il secondo problema, si cerca poi di risalire al primo per *prolungamento* della soluzione, riguardata come funzione (o funzionale) degli elementi variabili introdotti.

Questo prolungamento comporta essenzialmente due tappe: il prolungamento in piccolo, di cui la possibilità dipende dal comportamento dell'equazione a variazioni, ed il passaggio al limite attraverso una successione di prolungamenti in piccolo; la legittimazione di questo passaggio costituisce come il fulcro di tutto il procedimento.

P. es. il problema di Dirichlet per l'equazione (3), nelle ipotesi qualitative del n. 5, supposti i coefficienti A, B, C indipendenti da α e $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv 0$, è risolubile in piccolo, cioè nell'intorno di una soluzione assegnata; per poterne poi affermare la risolubilità illimitata, cioè con dati al contorno arbitrari, basterà saper limitare i moduli di $\alpha(x, y)$ e delle sue derivate dei primi tre ordini, o più generalmente $|\alpha|, |\Delta_2 \alpha|$ e $|\Delta_2 \alpha|_\lambda$, in funzione di un limite superiore dei moduli di $\zeta(s)$ e delle sue derivate dei primi tre ordini. Allo stesso risultato, a meno di restrizioni puramente qualitative, si giungerebbe ove le dette limitazioni richiedessero la conoscenza di limiti per le derivate di ζ fino all' m^{ma} : in tal caso si prenderebbero le funzioni al contorno ζ derivabili m volte, e si modificherebbero corrispondentemente le definizioni degli spazi Σ e Σ' .

Possiamo ora senz'altro enunciare il risultato generale per l'equazione (4):

La (4) sia ellittica, cioè si abbia

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} < 0,$$

e per l'equazione a variazione siano escluse le autosoluzioni, p. es. si abbia

$$\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \leq 0;$$

se allora le derivate successive di un integrale $\alpha(x, y)$ della (4), che si riduca sul contorno ad una funzione $\zeta(s)$, si lasciano limitare in funzione esclusiva-

mente delle derivate successive di $\zeta(s)$, il problema di Dirichlet per la (4) è illimitatamente risolubile purchè ammetta soluzione in un caso particolare. Altrettanto dicasi nel caso che dei possibili sistemi di valori al contorno si considerino quelli soltanto di una particolare varietà ⁽¹⁾.

Le condizioni di regolarità da imporre ai valori al contorno dipenderanno dalla natura delle dette limitazioni. Si cercherà di attenuarle, quando si esiga la massima generalità, in un secondo momento, mediante passaggi al limite a partire dalle soluzioni ottenute.

La possibilità o meno di stabilire le disuguaglianze occorrenti potrà dipendere in modo essenziale, per una data equazione, dalla forma del campo C: così per l'equazione delle superficie minime (problema di Plateau) C dovrà essere convesso.

Al precedente teorema abbiamo voluto conservare il carattere di principio generale, lasciando da parte la riduzione e precisazione di tutte le ipotesi qualitative. Per passare alle applicazioni, occorrerà ancora uno studio preliminare delle relazioni di mutua dipendenza tra le limitazioni delle varie derivate di un integrale della (3) o della (4), studio già iniziato da Bernstein, e che gioverà riprendere ed approfondire.

Meccanica. — *Velocità di gruppo per onde associate a fenomeni.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

La nozione cinematica di velocità di gruppo fu introdotta dal Rayleigh per onde piane sinusoidali propagantesi in un mezzo omogeneo isotropo dispersivo ⁽³⁾. Questa nozione è stata generalizzata alquanto — limitatamente però all'approssimazione dell'ottica geometrica — considerando onde sinusoidali, di ampiezza debolmente variabile, propagantesi in un mezzo dispersivo non omogeneo ⁽⁴⁾. Non mi risulta che sia stata definita una velocità di gruppo per le generiche onde fisiche, soluzioni dell'equazione di d'Alembert.

Ma dalle ricerche di Hugoniot e di Hadamard scende che attraverso allo studio delle caratteristiche dei sistemi di equazioni differenziali, che traducono matematicamente le leggi che governano fenomeni fisici, questi possono assumere carattere ondulatorio ⁽⁵⁾. Non mi sembra quindi privo di

(1) Cfr. BERNSTEIN, *Sur la généralisation du problème de Dirichlet*, « Math. Annalen », 69 (1910), Chap. III.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1932.

(3) LORD RAYLEIGH, *On progressive waves*, « Proc. Lond. Math. Soc. », IX, 1877, p. 21.

(4) L. DE BROGLIE, *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Paris, 1930, pp. 49-68.

(5) Una luminosa sintesi dell'argomento forma oggetto del volume di T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna, 1931.

interesse proporsi — come è nello scopo di questa Nota — di stabilire la nozione di velocità di gruppo per quei fenomeni in cui la determinazione delle varietà caratteristiche — e quindi delle propagazioni ondose associate — non dipende dalla preventiva integrazione dei sistemi di equazioni differenziali che reggono i fenomeni stessi. Tale è, ad esempio, il caso dei fenomeni ubbidienti all'equazione di d'Alembert.

Mi propongo altresì, in questa Nota, di mostrare due notevoli significati della velocità di gruppo: il primo consistente nella estensione del teorema di Reynolds relativo al flusso di energia ⁽¹⁾, il secondo costituente un'interpretazione espressiva di un teorema di Schrödinger e di un teorema di De Broglie che stanno a fondamento della meccanica ondulatoria.

1. — Rappresentiamo un'onda piana sinusoidale, propagantesi nella direzione dell'asse x in un mezzo omogeneo, con la seguente funzione di x e del tempo t :

$$(1) \quad a \cos \varphi, \quad \varphi = 2\pi\nu\tau, \quad \tau = t - \frac{x}{V}.$$

Nella (1) φ è la fase, a l'ampiezza, ν la frequenza, V la velocità di propagazione in un mezzo in riposo (velocità di fase); le varietà caratteristiche hanno per equazione $\tau = \text{cost.}$

Consideriamo una famiglia di onde (1): ogni onda sia caratterizzata da un valore ν della frequenza; il mezzo in cui avviene la propagazione sia dispersivo, cioè $V = V(\nu)$. Nel caso in esame τ è, in virtù di (1), funzione, oltre che di x e t , anche di ν , e la fase φ dipende anch'essa da x , t e ν .

Consideriamo due onde aventi frequenze infinitamente prossime: affinché queste due onde, che supponiamo in concordanza di fase nel punto d'ascissa x e nell'istante t , si conservino in concordanza di fase nel punto d'ascissa $x + dx$ nell'istante $t + dt$, deve essere

$$(2) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} = \frac{d}{d\nu} \frac{\nu}{V(\nu)} \quad (2).$$

La (2) definisce la *velocità di gruppo*, u , nel caso considerato; definisce cioè la velocità con cui si muove un punto in cui concordano le fasi di un gruppo d'onde di frequenza estremamente prossima.

2. — Un fenomeno sia caratterizzato da m quantità f_1, \dots, f_m , funzioni del tempo t e di un punto P di coordinate cartesiane x, y, z ; le funzioni f ubbidiscano ad un sistema di m equazioni differenziali. Da questo sistema

(1) O. REYNOLDS, *On the Rate of Progression of Groups of Waves and the Rate at which Energy is Transmitted by Waves*, «Nature», XVI, 1877, p. 343.

(2) LORD RAYLEIGH, loc. cit.

si tragga l'equazione differenziale delle varietà caratteristiche $\tau(t, P) = \text{cost.}$ ⁽¹⁾, e si consideri particolarmente il caso in cui quest'equazione non contiene le ignote funzioni f . Mediante un integrale τ potremo associare una propagazione ondosa al fenomeno.

Se una quantità q dipende, oltre che dal posto, dalla propagazione ondosa accennata, riterremo $q = q(P, \varphi)$, essendo φ una quantità che dipende soltanto dalla propagazione ondosa. φ è ciò che diremo *fase*: è attraverso ad essa che la quantità q dipende dal tempo. Questa fase deve manifestamente dipendere dal tempo e dal luogo semplicemente per il tramite di τ , giacchè per $\tau = \text{cost.}$, cioè in ogni istante su ogni superficie d'onda, φ deve risultare costante. Dunque $\varphi = \varphi(\tau)$. La funzione $\varphi(\tau)$ è subordinata, si intende, alla particolare quantità q .

Consideriamo ora, non un fenomeno, ma una famiglia di fenomeni analoghi a quello precedentemente considerato, ognuno caratterizzato da un valore v di un parametro. In corrispondenza ad ogni valore di v si abbia una m -pla di funzioni ubbidienti ad m equazioni differenziali caratterizzanti un fenomeno della famiglia. Le varietà caratteristiche si rappresenteranno così:

$$(3) \quad \tau(t, P, v) = \text{cost.}$$

La (3) rappresenta una famiglia di onde associata alla famiglia di fenomeni considerati. La funzione che compare in (3) è integrale dell'equazione:

$$(4) \quad \Omega(t, P, p_i, v) = 0 \quad , \quad p_0 = \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad , \quad p_1 = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad , \quad p_2 = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad , \quad p_3 = \frac{\partial \tau}{\partial z}.$$

Nota la (3), la velocità di avanzamento (velocità di fase) di ogni onda, avente, in un luogo ed in un istante, normale il versore \mathbf{n} , è così espressa⁽²⁾:

$$(5) \quad \mathbf{V} = \left| \frac{p_0}{g} \right| \mathbf{n} \quad , \quad g = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2};$$

e \mathbf{V} dipende, in generale, oltre che dal tempo e dal luogo, dal parametro v .

Consideriamo la fase di ogni onda: poichè, in corrispondenza ad un prefissato valore di v , φ è funzione soltanto di τ , sarà:

$$(6) \quad \varphi = \varphi(v, \tau);$$

dove φ si riterrà funzione assegnata dei suoi argomenti. Ad esempio, nel caso delle onde considerate al paragrafo precedente, la (6) coincide con la seconda delle (1).

Un'onda della famiglia corrisponda al valore v del parametro; un'altra

(1) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., pp. 14-16.

(2) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 34.

al valore $v + dv$. Le due onde saranno in concordanza di fase in un punto P nell'istante t , se

$$(7) \quad \varphi(v, \tau(t, P, v)) = \varphi(v + dv, \tau(t, P, v + dv)).$$

Scriviamo ora la condizione perchè le due onde considerate siano ancora in concordanza di fase nel punto $P + dP$ nell'istante $t + dt$:

$$\varphi(v, \tau(t + dt, P + dP, v)) = \varphi(v + dv, \tau(t + dt, P + dP, v + dv)).$$

Da questa, ricordando la (7), si ricava:

$$(8) \quad \frac{d}{dv} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{d}{dv} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{d}{dv} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{d}{dv} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0.$$

Se un punto si muove dunque in modo da verificare la (8), in esso sempre concordano le fasi di un gruppo d'onde di parametro estremamente prossimo.

Se il punto $P + dP$ è situato sulla normale alla superficie d'onda in P, detto dn l'elemento di normale, risulta ⁽¹⁾ $g dx = \pm p_1 dn$, $g dy = \pm p_2 dn$, $g dz = \pm p_3 dn$. Da (8) scende allora con facili calcoli:

$$(9) \quad \frac{dn}{dt} \mathbf{n} = \mathbf{u} = \left| \frac{\frac{d}{dv} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} p_0 \right)}{\frac{d}{dv} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} g \right)} \right| \mathbf{n}.$$

La (9) dà la velocità \mathbf{u} con cui avanza, in un dato istante ed in un dato punto, il gruppo d'onde considerato.

La (9) può scriversi diversamente, introducendo la velocità di fase espressa dalla (5):

$$(9') \quad \mathbf{u} = \left| V + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} g}{\frac{d}{dv} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} g \right)} \frac{dV}{dv} \right| \mathbf{n} = \left| \frac{\frac{d}{dv} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} p_0 \right)}{\frac{d}{dv} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \bar{V} \right)} \right| \mathbf{n}.$$

Dalla (9') scende che la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase, se quest'ultima non dipende da v .

Per onde piane sinusoidali, per (1), la (9') coincide con la (2). Alorchè φ è proporzionale a v e a τ , la (9') coincide con la (2) anche per onde piane qualsivoglia, soluzioni dell'equazione di d'Alembert nel caso che la propagazione avvenga in mezzi omogenei. Anche per le onde di forma

(1) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 33.

qualunque propagantesi in un mezzo omogeneo⁽¹⁾, e per le onde rappresentate da

$$(10) \quad q = A(P) F(\varphi) \quad , \quad \varphi = \varphi(v, \tau) \quad , \quad \tau = t - \sigma(v, P),$$

che diremo onde di Maggi⁽²⁾, vale la (2), quando si assume una fase proporzionale a v e a τ . Si intende che la (2) ci fornisce in questi due casi soltanto il modulo del vettore u (che è sempre diretto come n). Nel secondo caso si rileva poi che V è, in generale, funzione, oltre che di v , anche di P .

3. — Sia q una quantità che, oltre a dipendere dal punto P e dal parametro v , dipenda dal tempo t per il tramite della fase φ di una propagazione ondosa. Si consideri il caso in cui q è funzione periodica di φ . Sia Q una quantità somma di altre quantità q, q', \dots , analoghe a q , corrispondenti a valori del parametro assai prossimi ad un valore v . Rispetto ad un osservatore traslante con velocità eguale alla velocità di gruppo, valutata in ogni istante in un punto P solidale con l'osservatore stesso, tutte le quantità q, q', \dots e la quantità Q sono, nel punto P , funzioni periodiche della stessa fase.

La proprietà ora rilevata fornisce un significato alla velocità di gruppo. Questa proprietà sussiste comunque q e φ dipendano dai loro argomenti. È notevole però il caso particolare in cui, rispetto all'osservatore traslante con velocità eguale alla velocità di gruppo, la dipendenza di q e φ dai loro argomenti è tale che la quantità q , periodica rispetto a φ , risulti anche periodica rispetto al tempo. Ciò si verifica nel seguente caso notevole, che comprende, in particolare, le onde piane sinusoidali (1).

Sia $\varphi = h(v) \tau$, così che q risulti funzione periodica di τ . Come per le onde di Maggi propagantesi in un mezzo omogeneo, sia

$$\tau = t - \frac{n(P)}{V(v)},$$

essendo $\Delta n = 1$, e quindi V la velocità di avanzamento. Le superficie d'onda saranno nel caso in esame superficie parallele, ed n è il parametro che le caratterizza.

Se allora assumiamo ξ, η, n come coordinate di un punto di una superficie d'onda all'istante t , $n = Vt + \text{cost.}$ e ξ ed η sono indipendenti da t .

Consideriamo una quantità

$$(11) \quad q = q(v, \xi, \eta, \varphi) \quad , \quad \varphi = h(v) \left(t - \frac{n}{V(v)} \right).$$

(1) G. A. MAGGI, *Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi*, questi « Rendiconti », vol. XXIX, 1920, p. 371.

(2) G. A. MAGGI, *Teoria fenomenologica del Campo elettromagnetico*, Milano, 1931, p. 268.

Si dimostra facilmente che, nel caso in esame, q è funzione periodica di t rispetto all'osservatore traslante con velocità eguale alla velocità di gruppo, così che, per il significato di velocità di gruppo, la somma di quantità analoghe a quella considerata, ottenute facendo variare estremamente poco il parametro v , è pur essa funzione periodica del tempo ⁽¹⁾.

Nell'ipotesi (II) la velocità di gruppo si presta ad un notevole significato fisico espresso dal teorema di Reynolds.

4. — Per le onde piane sinusoidali di un mare di profondità infinita Reynolds dimostrò il seguente teorema: la velocità di gruppo è eguale al rapporto dei valori medi del flusso d'energia e della densità lineare di energia ⁽²⁾. Rayleigh osservò che questo teorema vale anche se la profondità è finita ⁽³⁾, e Abraham ne estese la validità anche alle onde piane sinusoidali elettromagnetiche ⁽⁴⁾. M. Ferrari ⁽⁵⁾ diede una dimostrazione del teorema di Reynolds, sempre per onde piane sinusoidali, informata ad un concetto molto ampio, che si presta ad essere senz'altro trasportata a generici gruppi di fenomeni fisici la cui densità di energia sia funzione periodica del tempo, rispetto ad un opportuno osservatore mobile.

Consideriamo una famiglia di fenomeni; se ϵ è la densità di energia di un fenomeno della famiglia, ϵ sia una quantità che, oltre a dipendere dal posto e da un parametro v , dipenda dal tempo per il tramite della fase φ relativa alla propagazione ondosa associata al fenomeno. Se $\epsilon, \epsilon', \dots$ sono le densità di energia di fenomeni corrispondenti a valori estremamente prossimi del parametro, $E = \epsilon + \epsilon' + \dots$ è la densità di energia del gruppo considerato. Se ϵ è funzione periodica di φ , nell'ipotesi (II), per quanto dicemmo al § 3, rispetto all'osservatore moventesi con velocità u , eguale alla velocità di gruppo, E sarà funzione periodica di t . Allora, il valor medio di $\frac{\partial E}{\partial t}$ in un periodo T è nullo.

A meno di un vettore solenoidale, sarà dunque nullo il valor medio del flusso d'energia, rispetto all'osservatore mobile considerato. Ma se Σ è il flusso rispetto ad un osservatore fisso, il flusso rispetto all'osservatore mobile non è altro che $\Sigma - E u$. Indicando dunque con $[]$ il valor medio in un periodo T , si ha: $[\Sigma] = [E u]$. Ma, nel nostro caso, u non dipende da t , dunque

$$(12) \quad [E] u = [\Sigma].$$

(1) La concordanza dei periodi rispetto al tempo di queste quantità e della loro somma può, volendo, verificarsi direttamente.

(2) O. REYNOLDS, loc. cit.

(3) LORD RAYLEIGH, loc. cit.

(4) M. ABRAHAM, *Sulla velocità di gruppo in un mezzo dispersivo*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. XLIV, 1911, p. 68.

(5) M. FERRARI, *Flusso di energia e velocità di gruppo*, questi « Rend. », vol. XXII, 1913, p. 761.

La (12) traduce precisamente il teorema di Reynolds, la cui validità viene dunque estesa ai casi ora specificati.

5. — Stabiliamo, in fine, un altro significato fisico di velocità di gruppo in un caso particolare notevole.

Consideriamo un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa, e sia $U(P)$ la funzione potenziale. Il movimento del punto materiale è retto da un sistema hamiltoniano di funzione

$$(13) \quad H = \frac{1}{2m} g^2 - U.$$

Consideriamo la propagazione ondosa che ha come sistema hamiltoniano corrispondente ⁽¹⁾ il sistema di funzione (13). L'equazione differenziale delle varietà caratteristiche che individuano queste onde, che diremo hamiltoniane, si scriverà così:

$$(14) \quad p_0 + \frac{1}{2m} g^2 - U = 0.$$

Ma, se E è l'energia totale del punto materiale, potremo assumere

$$(15) \quad p_0 = -E, \quad g = \sqrt{2m(E + U)},$$

e facilmente constatare che la velocità v del punto materiale ed il versore n normale alla superficie d'onda nel punto stesso sono paralleli ⁽²⁾. Ad ogni valore di E si ottengono delle onde hamiltoniane associate al punto materiale d'energia totale E ; la velocità di propagazione (velocità di fase) di queste onde è tosto ottenuta dalle (15), ricordano la (5).

Facciamo ora variare estremamente poco E : otterremo un gruppo di onde di parametro E . Se assumiamo come fase una quantità proporzionale a τ , da (15) e (9) scende:

$$(16) \quad u = v.$$

Cioè, la velocità di gruppo delle onde hamiltoniane di un punto materiale, soggetto a forze conservative, coincide con la velocità del punto stesso. La (16) fornisce un notevole significato fisico della velocità di gruppo nel caso in esame.

Questo risultato non è altro che un'interpretazione, nella quale interviene la nozione di velocità di gruppo da noi generalizzata, di un teorema dovuto a Schrödinger ⁽³⁾; è pure sostanzialmente equivalente ad un teorema

(1) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., pp. 42-56.

(2) E. SCHRÖDINGER, *Abhandlungen zur Wellenmechanik: Quantisierung als Eigenwertproblem*, II, Leipzig, 1927; G. A. MAGGI, *Sul significato, nel passato e nell'avvenire, delle equazioni dinamiche*, «Rend. del Seminario mat. e fis. di Milano», vol. III, 1929, p. 53.

(3) E. SCHRÖDINGER, loc. cit., p. 33.

dovuto a De Broglie⁽¹⁾, che identifica la velocità di un punto materiale con la velocità di gruppo di onde sinusoidali di frequenza $\nu = h^{-1}E$, soluzioni dell'equazione di d'Alembert nell'ipotesi che U vari molto lentamente da posto a posto. Questo teorema sta a fondamento della meccanica ondulatoria, nella quale si identifica h alla costante di Planck.

Matematica. — *L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes.* — II. *Systèmes contenant cinq dérivées du second ordre.* Nota⁽²⁾ di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ I. — Abordons l'étude des différents *cas particuliers*. Quand le système contient *cinq dérivées du second ordre*, il faut étudier seulement 3 combinaisons

$$[1] \quad s, t, r', s', t' \quad ; \quad [2] \quad r, s, r', s', t' \quad ; \quad [3] \quad r, t, r', s', t'.$$

En effet, pour les combinaisons restantes

$$[4] \quad s', t', r, s, t \quad ; \quad [5] \quad r', s', r, s, t \quad ; \quad [6] \quad r', t', r, s, t,$$

dans les équations linéaires, pour la détermination de la fonction auxiliaire Φ , les variables r, s, t seront remplacées par r', s', t' respectivement, les jacobiens ρ, σ, τ ; $\xi_1, \xi_2, \dots, \eta_3$ par ρ', σ', τ' ; $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \eta'_3$ et inversement; pour ρ_1, \dots, τ_3 nous aurons le changement d'après le tableau:

au lieu de	il faut	au lieu de	il faut	au lieu de	il faut
ρ_1	$-\rho_1$	σ_1	$-\rho_2$	τ_1	$-\rho_3$
ρ_2	$-\sigma_1$	σ_2	$-\sigma_2$	τ_2	$-\sigma_3$
ρ_3	$-\tau_1$	σ_3	$-\tau_2$	τ_3	$-\tau_3$

Pour l'intégration du système

$$(I) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, r', s', t') = 0 \\ F_2(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, r', s', t') = 0 \end{cases}$$

par l'adjonction de la 3^{me} équation compatible

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const.},$$

(1) L. DE BROGLIE, loc. cit., p. 75.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1932.

nous pouvons obtenir la première condition de compatibilité sous la forme

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

et nous arrivons à la recherche des intégrales particulières $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \dots$ compatibles entre elles et avec les équations (1) et ne contenant pas r , du système des 3 équations linéaires:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} (\rho' + \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_i \tau_1 - \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial l'} \\ (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= (\lambda_i \sigma_2 - \sigma_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial l'} \\ (\rho' + \lambda_i \sigma') \left[\eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial l'} - \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] &= \\ &= \tau_3 \left[(\xi'_3 - \lambda_i \xi'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial l'} - (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{d\Phi}{dx} \right], \end{aligned} \right.$$

où λ_i est une des racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équation cubique suivante:

$$(4) \quad (\tau_1 \tau' + \sigma_1 \sigma') \lambda^3 + [\sigma_1 \rho' - \tau_2 \tau' + (\tau_1 - \sigma_2) \sigma'] \lambda^2 + \\ + [\tau_3 \tau' - \sigma_2 \rho' + (\sigma_3 - \tau_2) \sigma'] \lambda + (\tau_3 \sigma' + \sigma_3 \rho') = 0.$$

§ 2. — Pour le système d'équations

$$\left\{ \begin{aligned} F_1(x, y, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}', p, q, p', q', r, s, r', s', l') &= 0 \\ F_2(x, y, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}', p, q, p', q', r, s, r', s', l') &= 0 \end{aligned} \right.$$

au lieu de la condition (2) nous aurons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0$$

et le système (3) sera remplacé par le suivant:

$$\left\{ \begin{aligned} (\rho' + \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= -\lambda_i \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_i \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \Phi}{\partial l'} \\ (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= (\lambda_i \rho_2 - \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial l'} \\ (\rho' + \lambda_i \sigma') \left[\eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial l'} - \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} \right] &= \\ &= \sigma_3 \left[(\xi'_3 - \lambda_i \xi'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial l'} - (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{d\Phi}{dx} \right], \end{aligned} \right.$$

où λ_i est une des racines de l'équation cubique

$$(\sigma_1 \tau' + \rho_1 \sigma') \lambda^3 + [\rho_1 \rho' - \sigma_2 \tau' + (\sigma_1 - \rho_2) \sigma'] \lambda^2 + \\ + [\sigma_3 \tau' - \rho_2 \rho' + (\rho_3 - \sigma_2) \sigma'] \lambda + (\rho_3 \rho' + \sigma_3 \sigma') = 0.$$

§ 3. — Pour le dernier système d'équations

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r', s', t') = 0 \\ F_2(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r', s', t') = 0, \end{cases}$$

l'adjonction de la 3^{me} équation

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const}$$

conduit aux conditions de compatibilité suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} (r' s' r) (s' t' t) = (r' t' r) (r' t' t) \\ (r' t' t) (r' t' t) + (s' r' t) (s' t' t) + (t' s' r') \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \\ (r' s' t') (t' t r) + (t' s') \tau' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (t' r') \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \\ (r' t' t) [r' t' x] + (s' t' t) [s' r' x] + (r' s' t') [t' ty] = 0, \end{cases}$$

où les parenthèses indiquent les déterminants fonctionnels des fonctions F_1, F_2, Φ par rapport aux variables correspondantes et les crochets signifient que par rapport aux x et y nous prenons les dérivées totales.

Des conditions (5) nous obtiendrons le système de 4 équations linéaires pour la détermination des équations $\Phi_1 = C_1, \Phi_2 = C_2, \dots$, compatibles avec le système d'équations proposées $F_1 = 0, F_2 = 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= (\lambda_i \rho_2 - \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ (\rho' + \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_i \tau_1 - \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ (\rho' + \lambda_i \sigma')^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= [(\rho' + \lambda_i \sigma') (\tau_3 - \lambda_i \tau_2) - (\sigma' + \lambda_i \tau') \lambda_i \tau_3] \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \\ &\quad + [(\rho' + \lambda_i \sigma') \lambda_i \tau_1 + (\sigma' + \lambda_i \tau') \tau_3] \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \\ &\quad + [-(\rho' + \lambda_i \sigma') \tau_1 + (\sigma' + \lambda_i \tau') (\lambda_i \tau_1 - \tau_2)] \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ (\rho' + \lambda_i \sigma') \left[\eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} \right] &= \\ &= \tau_3 \left[(\xi'_3 - \lambda_i \xi_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{d\Phi}{dx} \right], \end{aligned} \right.$$

où λ_i est une des racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de l'équation du 4^{me} degré

$$\begin{aligned} & [\rho_1 \sigma'^2 + \tau_1 \tau'^2] \lambda^4 + \\ & + [\sigma' (2 \rho_1 \rho' - \rho_2 \sigma') + \tau' (2 \tau_1 \sigma' - \tau_2 \tau')] \lambda^3 + \\ & + [(\rho_1 \rho'^2 - 2 \rho_1 \rho' \sigma' + \rho_3 \sigma'^2) + (\tau_1 \sigma'^2 - 2 \tau_2 \sigma' \tau' + \tau_3 \tau'^2)] \lambda^2 + \\ & + [\rho' (2 \rho_3 \sigma' - \rho_2 \rho') + \sigma' (2 \tau_3 \tau' - \tau_2 \sigma')] \lambda + \\ & + [\rho_3 \rho'^2 + \tau_3 \sigma'^2] = 0. \end{aligned}$$

§ 4. - Dans le § 1 nous avons indiqué, comment peuvent être écrites les équations correspondantes pour les 3 combinaisons restantes des dérivées r, s, \dots, t' .

Par exemple, pour l'intégration du système

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, z', p, q, p', q', r', t', r, s, t) = 0 \\ F_2(x, y, z, z', p, q, p', q', r', t', r, s, t) = 0 \end{cases}$$

nous aurons le système auxiliaire

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma + \lambda_i \tau) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} &= (\tau_1 - \lambda_i \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ (\rho + \lambda_i \sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} &= \lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\sigma_3 - \lambda_i \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ (\rho + \lambda_i \sigma)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} &= [(\rho + \lambda_i \sigma) (\lambda_i \sigma_3 - \tau_3) + (\sigma + \lambda_i \tau) \lambda_i \tau_3] \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \\ &\quad - [(\rho + \lambda_i \sigma) \lambda_i \rho_3 + (\sigma + \lambda_i \tau) \tau_3] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \\ &\quad + [(\rho + \lambda_i \sigma) \rho_3 + (\sigma + \lambda_i \tau) (\sigma_3 - \lambda_i \rho_3)] \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ (\rho + \lambda_i \sigma) \left[-\eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= \\ &= \tau_3 \left[(\xi_3 - \lambda_i \xi_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\sigma + \lambda_i \tau) \frac{d\Phi}{dx} \right], \end{aligned} \right.$$

où λ_i est une des racines de l'équation

$$\begin{aligned} & [\rho_1 \sigma^2 + \rho_3 \tau^2] \lambda^4 + \\ & + [\sigma (2 \rho \rho_1 - \sigma \sigma_1) + \tau (2 \sigma \rho_3 - \tau \sigma_3)] \lambda^3 + \\ & + [(\rho_1 \rho^2 - 2 \rho \sigma \sigma_1 + \sigma^2 \tau_1) + (\rho_3 \sigma^2 - 2 \tau \sigma \sigma_3 + \tau^2 \tau_3)] \lambda^2 + \\ & + [\rho (2 \sigma \tau_1 - \rho \sigma_1) + \sigma (2 \tau \tau_3 - \sigma \sigma_3)] \lambda + \\ & + [\tau_1 \rho^2 + \tau_3 \sigma^2] = 0. \end{aligned}$$

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica eseguita nel vertice trigonometrico di 1° ordine di M. Crea nel luglio 1930. Nota di U. BARBIERI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.*

Questa stazione fu compiuta nei giorni dal 17 al 21 luglio 1930. Secondo il programma prestabilito, si osservò la latitudine, l'azimut di Camino, segnale di 3° ordine, situato a oltre 7 km. di distanza da M. Crea, ben visibile e ben collegato, mercè le operazioni dell'Istituto Geografico Militare, alla rete trigonometrica di 1° ordine dello Stato, la longitudine per via telegrafica, e, per opera del mio aiuto, dott. I. Gennaro, la gravità.

Essendo il vertice della stazione costituito dall'asse della Cappella del Paradiso, appartenente al Santuario di Crea, e situata nella parte più alta del monte, lo strumento universale dovette collocarsi fuori centro, sul limitato spazio piano, prossimo alla Cappella, poichè il terreno, dirupato subito dopo, e circondato da alta vegetazione, non presentava altra adatta installazione, anche nei riguardi della visibilità dell'orizzonte.

Come nelle precedenti stazioni, da me compiute lungo il meridiano di Mondovì, per le osservazioni di tempo, di azimut, gravimetriche e di longitudine, fu adoperato un unico cronometro, il Kullberg, disposto nel sotterraneo sottostante la Cappella, presso gli apparati radiotelegrafici e gravimetrici, essendo ad essi collegato mediante apposito circuito, mentre altra linea lo univa al cronografo situato nel casotto d'osservazione, nel quale, per la lettura del primo siderale, trovavasi il solito cronometro Fletch, concordante col Kullberg nell'indicazione oraria, a meno di pochi secondi.

Le modalità seguite nelle varie operazioni non si riportano, essendo identiche a quelle già tenute nelle stazioni precedentemente compiute, come ho già accennato, lungo il meridiano di Mondovì.

Si riassumono qui appresso, in tre piccoli specchi, i diversi risultati ottenuti per la latitudine, il tempo e l'azimut.

Latitudine.

Luglio 1930	1° Gruppo	2° Gruppo	3° Gruppo	4° Gruppo	5° Gruppo
17	—	—	45° 05' 37".4	45° 05' 39".0	45° 05' 39".4
18	45° 05' 38".0	45° 05' 38".6	38 .2	38 .3	39 .0
Media . . .	45° 05' 38".0	45° 05' 38".6	45° 05' 37".8	45° 05' 38".7	45° 05' 39".2

(1) Nella seduta del 20 novembre 1932.

Da questi valori si ottiene, come media della latitudine osservata per M. Crea

$$45^{\circ} 05' 38''.5 \pm 0''.25$$

(epoca 1930'6)

Determinazioni di tempo.

Luglio 1930	Oraria	Correzione del Kullberg	Ora siderale corrispondente	Andamento orario
17	α Cor. borealis			
	ϵ » »	+ 0 ^h 00 ^m 02 ^s .66	16 ^h 00 ^m 04 ^s .63	
	β Herculis			— 0 ^s .0262
18	idem	+ 0 00 02 .03	16 00 11 .39	
19	δ Herculis			— 0 ^s .0259
	α Ophiuci	+ 0 00 01 .37	17 35 07 .32	
	σ Herculis			

Determinazione dell'azimut di Camino.

Luglio 1930	Reiterazione	Azimut	Media
17	0°	5° 02' 21''.1	
18	45°	15 .6	
19	90°	15 .2	5° 02' 17''.2 \pm 1''.35
	135°	17 .0	

La riduzione in centro fu eseguita scegliendo, sul ripiano adiacente alle due gradinate d'accesso alla Cappella, due piccole basi, e quindi determinando la distanza ex-centro — vertice, in doppio modo, e compiendo le necessarie misure angolari. A calcoli ultimati essa risultò

$$\Delta\alpha = + 0^{\circ} 07' 10''.6,$$

onde in definitiva si ebbe, quale

Azimut di Camino sull'orizzonte di M. Crea

$$5^{\circ} 09' 27''.8 \pm 1''.35.$$

Attrazione locale.

Dagli elementi che precedono, e dai dati geodetici forniti dall'Istituto Geografico Militare si deduce pertanto quanto segue:

Latitudine di M. Crea	{	astronomica	$\varphi_a = 45^{\circ} 05' 38''.5$
		geodetica	$\varphi_g = 41''.5$
			$\varphi_a - \varphi_g = - 03''.0$
Azimut della direzione a Camino, sull'orizzonte di M. Crea	{	astronomico	$\alpha_a = 5^{\circ} 09' 27''.8$
		geodetico	$\alpha_g = 12''.8$
			$\alpha_a - \alpha_g = + 15''.0$

da cui le componenti dell'attrazione locale

$$\xi = - 03''.0$$

$$\mu = (\alpha_a - \alpha_g) \cotg \varphi_a = + 15''.0,$$

l'azimut ellissoidico del piano dell'attrazione

$$A = 101^{\circ} 20' 46''.2$$

e l'attrazione locale stessa

$$\theta = 15''.2.$$

Determinazione della longitudine.

Nelle osservazioni di longitudine, compiute per via radiotelegrafica, l'apparato ricevente, come già fu accennato in principio, si dispose nel sotterraneo della Cappella, dall'altro lato dell'apparato gravimetrico; il cronografo Cavignato per le registrazioni, venne collegato al cronometro Kullberg, adoperato per l'azimut, il tempo, e le determinazioni gravimetriche, mentre dall'apparecchio stesso si dipartiva il filo che lo congiungeva all'antenna, da una parte sostenuta da un'apposita lunga asta smontabile, rizzata in un piccolo ripiano a nord-ovest della Cappella, e dall'altra fissata agli alti alberi a sud-est della stessa.

Nello specchio seguente si riportano elencati i risultati di quelle, fra le osservazioni radiotelegrafiche compiute, che in unione alle astronomiche di tempo, vennero utilizzate per le determinazioni di longitudine.

Luglio 1930	Stazione trasmit- tente	Ora siderale locale di ricezione 1° segnale	Ora di Greenwich al 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich	Andamento astrono- mico	Andamento R. T.	Andamento medio	Correzione ora ricezione 1° segnale	Differenza longitudine su Greenwich corretta
17	Rugbay	6h 06m 03s.905	5h 52m 59s.983	0h 33m 03s.922	— 0s.0262	— 0s.0287	— 0s.0275	+ 0h 00m 02s.932	0h 33m 06s.854
18	Bordeaux.	4 15 42.217	3 42 37.660	0 33 04.557	— 0.0259	— 0.0230	— 0.0245	+ 02.353	05.910
19	Bordeaux.	4 19 39.418	3 46 34.308	0 33 05.110				+ 01.695	06.805

Dall'ultima colonna segue, come valore medio della differenza di longitudine astronomica fra M. Crea e Greenwich

$$\omega'_m = 0^h 33^m 06^s.856 = 8^\circ 16' 42''.845;$$

tenuto allora conto della differenza di longitudine geodetica fornita dall'Istituto Geografico Militare

$$\omega = 8^\circ 16' 25''.058,$$

la nota equazione di Laplace

$$(\omega' - \omega) \sin \varphi - (\alpha'_a - \alpha_g) = 0$$

dà per residuo $-02''.4$.

Se si prende, invece, in considerazione la differenza astronomica di longitudine fra Crea e Milano determinata con osservazioni stellari dai professori C. Celoria e M. Rajna⁽¹⁾

$$-3^m 38^s.597,$$

e la differenza di longitudine Milano-Greenwich, determinata per via radio-telegrafica dal prof. L. Volta⁽²⁾

$$36^m 45^s.897,$$

risulta, come differenza di longitudine astronomica fra Crea e Greenwich

$$\omega' = 0^h 33^m 07^s.300 = 8^\circ 16' 49''.500,$$

valore in buon accordo con quello da noi determinato.

Tenuto conto di esso, l'equazione di Laplace dà un residuo di $+2''.4$. Terremo allora per differenza di longitudine astronomica fra M. Crea e Greenwich il valore intermedio fra i due ora mentovati

$$\omega' = 8^\circ 16' 46''.172,$$

e per valore definitivo dell'azimut astronomico di Camino

$$\alpha' = 5^\circ 09' 30''.1,$$

che si deduce in corrispondenza, dall'equazione di Laplace.

Ripetendo allora i calcoli, gli elementi dell'attrazione locale risultano lievemente modificati come segue

$$\xi = -03''.0 \quad ; \quad \eta = +17''.2 \quad ; \quad A = 99^\circ 52' \quad ; \quad \theta = 17''.5 :$$

(1) C. CELORIA e M. RAJNA, *Differenza fra le longitudini di Milano (Osservatorio di Brera) e Crea - osservazioni di C. Celoria e M. Rajna - calcoli di L. Gabba*, Milano, 1909.

(2) L. VOLTA, *Primi risultati delle determinazioni delle differenze di longitudine Milano Greenwich e Genova Greenwich, col metodo delle coincidenze*, «R. Istituto Lombardo di Sc. e Lettere», serie 2^a, vol. LVI.

Fisica. — *Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare.* Nota IV di R. ZOJA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. C. GUIDI.

A seguito delle tre Note precedenti ⁽²⁾ mi propongo in questa di esporre alcune considerazioni atte a precisare la notevole portata pratica delle soluzioni in esse ottenute, illustrando poi, come esempio, in un interessante caso particolare, quanto sarò venuto esponendo.

Nelle formole finali della terza Nota sono riassunti anche i risultati delle prime due. Date le condizioni cui mi sono proposto di soddisfare è evidente che trattasi di una soluzione equilibrata, in generale non congruente ⁽³⁾, ed anzi che trattasi di una delle più semplici tra tutte le possibili soluzioni equilibrate. Il procedimento immaginato consiste infatti nel *fissare per σ_x la legge di variazione più semplice*, quella lineare, e da essa dedurre le espressioni delle altre componenti speciali di tensione in modo da soddisfare alle diverse condizioni di una soluzione equilibrata.

Soluzione *rigorosamente equilibrata* dunque, ma in generale non congruente. In ciò sta appunto una delle caratteristiche più importanti delle formole ottenute. Soluzioni analoghe possono evidentemente ottenersi anche per altri tipi di solido.

I vantaggi del procedimento seguito mi sembrano dal punto di vista delle applicazioni alla scienza delle costruzioni molto notevoli.

Innanzitutto occorre appena avvertire che nel caso limite del solido prismatico le formole ottenute si riducono a quelle previste dalla teoria di Saint Venant.

Il fatto poi che la soluzione sia rigorosamente equilibrata fa sì che essa sia senz'altro accettabile come *praticamente equivalente a quella esatta*, equilibrata e congruente ad un tempo, anche in molti altri casi particolari, laddove le *ordinarie formole della resistenza dei materiali* condurrebbero ad errori *inammissibili*: ciò si verifica ad esempio sia quando l'inclinazione del profilo del solido è tale che se ne possa trascurare il quadrato di fronte all'unità — senza per altro che la sua prima potenza sia trascurabile — ed inoltre la curvatura del profilo possa ritenersi nulla, sia in particolari condizioni di sollecitazione come nell'esempio che sarà illustrato più innanzi.

(1) Nella seduta del 6 novembre 1932.

(2) « Rendic. R. Acc. Naz. Lincei », sedute del 12 aprile e del 3 maggio 1931.

(3) Cfr. R. ZOJA, *Sul calcolo dei solidi ad asse rettilineo*, p. 299 (Torino, V. Giorgio, 1931).

Ma anche quando — per essere più accentuato il divario tra la forma del solido considerato e quella prismatica, e per essere le condizioni di sollecitazione più sfavorevoli — l'aver messa da parte la condizione di congruenza porti a delle differenze apprezzabili nei valori delle componenti di tensione, la soluzione equilibrata proposta rappresenta pur sempre l'andamento medio delle linee esatte, cosicchè con semplicissime equazioni si ha una quanto mai interessante *schematizzazione del fenomeno elastico*, la quale permette di rendersi conto immediatamente, sia pure in modo approssimato, delle sue varie particolarità, e di effettuarne se non altro lo studio preliminare. Nè si deve dimenticare innanzi tutto che i calcoli relativi alle soluzioni esatte sono in generale molto laboriosi, mentre le formole della soluzione schematica sono estremamente semplici, ed in secondo luogo che per la grande maggioranza dei casi pratici di solidi non prismatici la soluzione esatta non è ancora stata data, ciò che rende la soluzione schematica ancora più interessante: essa rappresenta infatti *in ogni caso* un sostanziale perfezionamento rispetto alle ordinarie formole, le quali danno sempre per qualcuna delle componenti speciali di tensione una distribuzione completamente errata.

Vi sono poi naturalmente dei casi nei quali il fenomeno elastico è talmente complesso che una soluzione schematica del tipo di quella prospettata può non essere più accettabile neppure in prima approssimazione: così quando si hanno brusche variazioni della sezione del solido, o la sua lunghezza è molto piccola rispetto alle massime dimensioni trasversali. In quest'ultimo caso per altro le condizioni dell'incastro e la distribuzione delle forze applicate sulla base libera influenzano, come è noto, in modo talmente preponderante la distribuzione delle tensioni *in tutto il solido* che il problema perde, in generale, ogni interesse pratico, ed anzi non si può neppure impostare ⁽¹⁾.

MENSOLA DI SPESSORE COSTANTE, A PROFILO RETTILINEO, SOLLECITATA AL VERTICE DA UNA COPPIA \mathfrak{M}_l e DA UNA FORZA \mathfrak{T}_l , fig. 1 a (problema piano).

La soluzione equilibrata schematica data nella prima Nota si riduce a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\mathfrak{M}_l y}{J} \\ \tau_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{y}{J} \frac{dh}{d\zeta} \left[1 - 3 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \mathfrak{M} + \frac{M}{bJ} \mathfrak{T} \\ \sigma_y = -\frac{y}{J} \left(\frac{dh}{d\zeta} \right)^2 \left[1 - 2 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \mathfrak{M} + 2 \frac{M}{bJ} \frac{dh}{d\zeta} \frac{y}{h} \mathfrak{T} \end{array} \right.$$

nelle quali si sono usate le solite notazioni e con h si è indicata la semi-altezza della sezione.

(1) Delle forze applicate e delle reazioni dell'incastro ordinariamente si conoscono infatti in pratica solo le risultanti, non la effettiva distribuzione. Confronta la critica di G. COLONNETTI al problema di Lamè (*La statica delle costruzioni*, 1).

Per fare un caso concreto supporremo $\frac{dh}{d\chi} = -\frac{1}{4}$ ⁽¹⁾ (fig. 1 a). Ricordando inoltre che $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_l - \mathfrak{T}_l(l - \chi)$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_l$, potremo allora scrivere le formole risolutive nel seguente modo

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_{\chi} = 12 \frac{y}{b} \frac{1}{A} \left(\frac{\mathfrak{M}_l}{l - \chi} - \mathfrak{T}_l \right) \\ \tau_{y\chi} = 3 \frac{1}{A} \left\{ \left[\frac{1}{2} - 3 \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \frac{\mathfrak{M}_l}{l - \chi} + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \mathfrak{T}_l \right\} \\ \sigma_y = -\frac{3}{4} \frac{1}{A} \left\{ \left[\frac{y}{b} - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right] \frac{\mathfrak{M}_l}{l - \chi} + \left(\frac{y}{b} \right)^3 \mathfrak{T}_l \right\}. \end{cases}$$

Nelle figg. 1 b ed 1 c, per la sezione generica di quota χ , si sono tracciate in *tratto pieno*, per la sola coppia \mathfrak{M}_l e per la sola forza \mathfrak{T}_l , rispettivamente nelle scale $\frac{\mathfrak{M}_l}{A(l - \chi)}$ e $\frac{\mathfrak{T}_l}{A}$, le curve delle tre componenti di tensione in funzione di y . Nelle stesse figure si sono indicate in *tratto punteggiato* le analoghe curve della *soluzione esatta* ⁽²⁾.

Un semplice esame di queste figure permette di constatare che realmente la soluzione equilibrata schematica è suscettibile di dare una chiara rappresentazione della distribuzione delle tensioni. Ed infatti le curve schematiche seguono l'andamento medio di quelle esatte intersecandole in numerosi punti: tre per la tensione σ_{χ} , quattro per $\tau_{y\chi}$ - dei quali due coincidenti nell'origine per il caso della forza \mathfrak{T}_l -, cinque per σ_y - dei quali tre coincidenti nell'origine per il caso della forza \mathfrak{T}_l -.

Tenuto anche conto del fatto che il valore prescelto per $\frac{dh}{d\chi}$ è da considerarsi come molto elevato ⁽³⁾, e che al diminuire dell'inclinazione la soluzione schematica si approssima con grande rapidità a quella esatta, si può affermare che gli errori che si commettono accettando la soluzione schematica

(1) Si è scelto questo valore onde ottenere delle differenze tra curve esatte e curve schematiche chiaramente visibili nelle figure. Tale valore è per altro relativamente molto elevato e da considerarsi non superabile, poichè altrimenti non esisterebbe o sarebbe eccessivamente limitata la porzione di solido abbastanza lontana dalla base libera e da quella incastrata perchè vi sia applicabile la teoria.

(2) Per il caso della coppia \mathfrak{M}_l vedi R. ZOJA lav. cit. alla Nota 3 a p. 505; per il caso della forza \mathfrak{T}_l vedi M. FLAMANT, «Annales des Ponts et Chaussées», 1893, ed anche R. ZOJA lav. cit. alla Nota 3 a p. 505; vedi pure la soluzione data da G. SUPINO («R. Acc. dei Lincei», seduta 6 marzo 1932), il quale mostra come si possa passare da una soluzione elastica in due dimensioni alla corrispondente soluzione del problema di Clebsch. La soluzione elastica in due dimensioni è però in generale praticamente sufficiente dando essa i valori medi delle tensioni (Cfr. ad es. A. MESNAGER, *Cours de résistance des matériaux*, 1928).

(3) Loc. cit. a p. 505 nota 2.

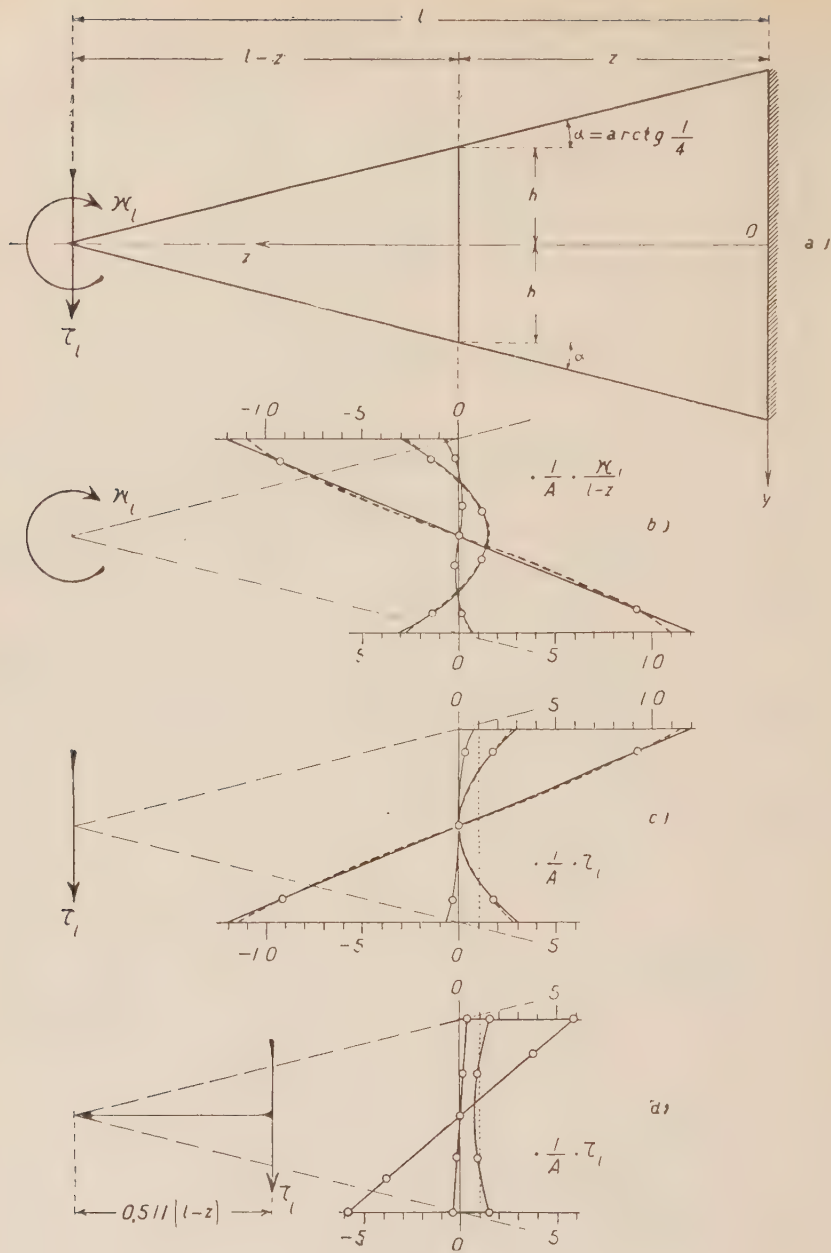


Fig. 1.

non sono eccessivi. Innanzi tutto osserviamo che basta occuparsi della sola σ_x , poichè per τ_{xy} gli errori sono in generale molto meno notevoli e per σ_y sono così piccoli che nella scala adottata non sono quasi più apprezzabili: in particolare per $y = \pm b$, dove ordinariamente si ha il massimo divario

tra curve esatte e schematiche, gli errori per τ_{yz} e σ_y sono rispettivamente eguali alla quarta ed alla sedicesima parte di quello per σ_z . Riguardo all'errore che per $y = \pm h$ si commette per σ_z notiamo poi che esso *dipende essenzialmente dalle condizioni di sollecitazione*: esso raggiunge il valore massimo del

$$\frac{12 - 10.892}{10.892} = 10.18\% \text{ nel caso particolare della sola coppia } \mathfrak{M}_l, \text{ si riduce}$$

$$\text{al } \frac{12 - 11.433}{11.433} = 4.96\% \text{ nel caso della sola forza } \mathfrak{T}_l, \text{ e varia al variare}$$

del rapporto tra \mathfrak{M}_l e \mathfrak{T}_l .

È molto interessante la constatazione che esiste in particolare un valore del rapporto tra \mathfrak{M}_l e \mathfrak{T}_l — ed è immediatamente determinabile mediante la prima delle 2), noti i valori esatti di σ_z per $y \pm = h$ nei due soliti casi particolari — per il quale tale errore per σ_z , e quindi anche per τ_{yz} e per

σ_y , si annulla. Nel caso attuale, $\frac{dh}{d\chi} = -\frac{1}{4}$, questo rapporto è uguale a

$$0.511(l - \chi), \text{ e per inclinazioni inferiori del profilo tende a } 0.5(l - \chi).$$

Per tale condizione di sollecitazione il numero dei punti di intersezione tra la curva esatta e quella schematica aumenta per σ_z di due (fig. 1 d) salendo a 5; e le differenze tra le curve stesse *divengono assolutamente insignificanti*: anche con la notevole inclinazione del profilo del solido preso in esame l'errore massimo è dell'ordine del 0.11%, e si ha per $y = \sim 0.3 h$. Per la tensione τ_{yz} , per $y = 0$, si ha un errore del 0.32%; ed infine per σ_y l'errore massimo non raggiunge il 0.10%. A questa straordinaria approssimazione della soluzione schematica fa riscontro la legge di variazione al solito completamente errata che si avrebbe per τ_{yz} e σ_y usando le ordinarie formule.

Pur riservandomi di ritornare sull'argomento — per ricercare le modificazioni prodotte nella distribuzione delle tensioni dalla presenza del carico sulla superficie laterale del solido — è immediata l'estensione del risultato ora ottenuto al caso della mensola che sopporta un carico ripartito uniformemente sull'orizzontale per tutta la sua lunghezza⁽¹⁾, poichè la condizione che per una data sezione la risultante ad essa relativa passi a metà distanza dal vertice è per questo carico soddisfatta per ogni valore di χ , cosicchè — salva la riserva avanzata — *per tale condizione di carico la soluzione schematica è particolarmente appropriata*.

(1) È interessante notare che per questo carico il solido considerato è solido di egual resistenza alla flessione: C. GUIDI, *Scienza delle Costruzioni*, parte II.

Chimica (Biochimica vegetale). — *Ricerche nel gruppo delle fitosterine*. — II. *Sulle sterine dell'olio di riso*⁽¹⁾. Nota di C. ANTONIANI, presentata⁽²⁾ dal Socio A. MENOZZI.

Le sterine dell'olio di riso vennero già in precedenza studiate da Wein-
hagen⁽³⁾ che segnalò la presenza di un prodotto sterinico con p. f. 131-133 e
di un idrocarburo con p. f. 79.5-80.5.

Recentemente un nuovo studio venne compiuto da Anderson e Ne-
benhauer⁽⁴⁾ i quali hanno segnalato la presenza di diidrositosterina, di stig-
masterina e di quattro altri termini così contrassegnati:

fitosterina A: p. f. 139-140; α_D — 38. Acetild. p. f. 135.5-136.5; α_D — 41.6

fitosterina B: p. f. 140-141; α_D — 37.7. Acetild. p. f. 134-135; α_D — 40.9

fitosterina C: p. f. 140; α_D — 36.7. Acetild. p. f. 131-133; α_D — 40

fitosterina D: Acetilderivato α_D — 29.7.

Io venni a conoscenza di questi dati mentre attendevo ad uno studio
di carattere chimico-fisiologico sull'insaponificabile dell'olio di riso e poichè
alcune mie osservazioni incidentali non si accordavano interamente con le
conclusioni di Anderson e Nebenhauer, ritenni opportuno di riprendere in
esame la natura chimica delle sterine del riso.

La materia prima utilizzata per queste ricerche fu la comune pula di
riso, prodotto che, come si sa, corrisponde all'incirca allo strato aleuronico
della cariosside di riso. Essa conteneva il 13 % di olio greggio. Di questo
il 5.7 % era costituito da sostanze insaponificabili, di cui la metà circa
(2.7 % dell'olio) rappresentato da sterine, a loro volta presenti per il 40 %
allo stato libero e per il 60 % allo stato combinato. (Metodo Windaus alla
digitonina).

Per successive ricristallizzazioni da alcool-etero ottenni dapprima un
prodotto non sterinico, identificato per alcool miricilico, conformemente ai

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica Agraria del R. Istituto Sup. Agrario
di Milano.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1932.

(3) « Zeitschr. Physiol. Chem. », 100, p. 159 (1917).

(4) « Journ. Am. Chem. Soc. », 48-2972 (1926).

risultati di Anderson e Nebenhauer⁽¹⁾ poi varie frazioni steriniche con punto di fusione variabile da 129 a 132 e potere rotatorio variabile da -18 a -26.

Di queste varie frazioni riunite procedetti alla purificazione secondo il noto metodo di Windaus e Hauth⁽²⁾ dell'acetilbromurazione:

gr. 22 di acetilderivato, preparato nel modo solito, vennero disciolti in 250 cc. di etere e trattati con 375 cc. di soluzione bromoacetica al 5 % di Br. La soluzione venne lasciata a sè a temperatura ambiente (17°) e dopo tre ore circa si osservò una lievissima separazione di prodotto microcristallino. Data la scarsissima quantità di prodotto separatosi, la soluzione venne lasciata nuovamente a sè per 12 ore a 0°C. Dopo questo tempo si notò abbondante separazione di una massa bianca cristallina, che si separò per filtrazione dalla soluzione madre. Questa lasciata nuovamente a sè a 0°C diede origine, dopo 4-5 ore ad una leggera nuova separazione di prodotto, che si riunì a quello di prima separazione.

La massa così ottenuta venne lavata con una miscela di etere e acido acetico negli stessi rapporti della soluzione di bromurazione, e quindi ridisciolta in cloroformio. Essa fornì, contrariamente a quant'era da attendersi, un prodotto solubile sia in etere che in alcool, con p. f. 70-71° e nel quale la reazione del bromo era negativa. Questo prodotto venne identificato per acetato miricilico.

È noto che operando nelle condizioni descritte, ed anche senza bisogno di procedere ad un raffreddamento della soluzione bromoacetica, si ha, nel caso di presenza di stigmasterina, la separazione del corrispondente derivato acetiltetrabromurato insolubile.

La soluzione madre etereo-bromo-acetica, dopo parziale evaporazione dell'etere in corrente d'aria, venne trattata cautamente con acqua; il prodotto separatosi per effetto di tale trattamento venne raccolto e lavato alla pompa con acqua, essiccato nel vuoto su acido solforico e quindi ridisciolto in etere.

Dopo qualche tempo (circa 12 ore) dalla soluzione eterea lasciata a sè a temperatura ambiente (17°) si notò la separazione di una leggera massa microcristallina che si asportò per filtrazione. Questa massa è difficilmente solubile in etere ed in alcool, dà la reazione del bromo, fonde a 207°. Per successiva ricristallizzazione da cloroformio addizionato di qualche goccia di alcool essa ha fornito gr. 0.150 circa di un prodotto con p. f. 210° contenente il 37.3 % di Br. Per successiva debromurazione e saponificazione questo ha dato una sterina con p. f. 164-165°.

(1) Ecco le caratteristiche da me osservate per questo prodotto: p. f. 84° (Corr.)
Anal. elem. sost. gr. 0.087 = gr. 0.261 CO₂; gr. 0.113 H₂O. C 82.1 % — H 14.5 % Calcolato per C₃₀H₆₂O: C 82.2 % — H 14.1 %

Peso molecolare: 1) sost. gr. 0.0095 in gr. 0.1082 canfora: Δ 7.7. P. M. 454

» » 2) » » 0.0245 » » 0.0970 » Δ 13.0. P. M. 439

Peso molecolare calcolato: 438.

(2) Ber. 39-4378 (1906).

Questi dati si accordano con quelli dati dal Windaus per la stigmasterina, della quale (o di sterina analoga) confermo pertanto la presenza nell'olio di riso conformemente ai risultati di Anderson e Nebenhauer.

Ma ciò che mi preme far rilevare è il fatto — sin qui non mai segnalato per quanto è a mia conoscenza — di queste condizioni affatto speciali di separazione del composto tetrabromurato; condizioni che sono nettamente diverse da quelle indicate dal Windaus⁽¹⁾ come caratteristiche per le miscele di stigmasterina e sitosterina.

Dalla soluzione eterea madre del prodotto tetrabromurato testé descritto, ho separato frazionatamente i tre prodotti dibromurati seguenti:

A) p. f. 130°	B) p. f. 126°	C) p. f. 120°
α_D — 30.2	Br. 29.2 %	Br. 28.0 %
Br. 28.6 %		
Br. calc. per $C_{29}H_{48}O_2Br_2$ 27.2 %		

questi, separatamente sottoposti a debromurazione e a saponificazione, diedero rispettivamente i tre prodotti sterinici seguenti:

A) Acetilderivato: p. f. 127–128°; α_D — 31.8.	Sterina: p. f. 137–138°; α_D — 27.0
B)	Sterina: p. f. 138°; α_D — 27.7
C)	Sterina: p. f. 138°; α_D — 19.6

Le tre sterine così ottenute, sottoposte a ricristallizzazione da alcool a 99°, fornirono, dopo una diecina di ricristallizzazioni, i tre prodotti seguenti:

1) α_D = — 8.0	2) α_D = — 11.4	3) α_D = — 4.6
-----------------------	------------------------	-----------------------

mentre dalle rispettive soluzioni madri si ottennero i prodotti seguenti:

A_1) α_D = — 38.6	B_1) α_D = — 41.0	C_1) α_D = — 37.2
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

che per successive ricristallizzazioni, sempre da alcool a 99°, portarono a tre prodotti di potere rotatorio leggermente superiore:

A_2) α_D = — 40.6	B_2) α_D = — 42.0	C_2) α_D = — 41.0.
-----------------------------	-----------------------------	------------------------------

Queste tre frazioni vennero riunite e ricristallizzate. Dalla soluzione madre si separò una sterina con le caratteristiche seguenti:

(1) Loc. cit.

Sterina.

p. f. 143° (corr.)

potere rotatorio: $\alpha_D = -42.8$ (C = 2.5)

peso molecolare: mg. 9.4 in mg. 200.3 di canfora. $\Delta = 5.0 \cdot P. M. 376$

» » mg. 8.0 in mg. 93.2 di canfora. $\Delta = 8.5 \cdot P. M. 404$

Calcolato per $C_{27}H_{46}O$: 386.

Acetato.

p. f. 135.5° (corr.)

potere rotatorio: $\alpha_D = -41.7$ (C. 3.35)

Analisi elementare: gr. 0.1640 di sost.: CO_2 gr. 0.485;

H_2O gr. 0.176. C 80.7 % H 12.0 %

Calcolato per $C_{29}H_{48}O_2$: C 81.3 %; H 11.2 %.

Dibromoacetilderivato.

p. f. 133° (corr.)

Br. 26.65 %. Calcolato per $C_{29}H_{48}O_2Br_2$: 27.2 %.

Diidroderivato.

p. f. 145.5 (corr.)

$\alpha_D + 20.9$ (C = 8.0).

I prodotti debolmente levogiri 1), 2) e 3) vennero a loro volta riuniti e sottoposti a cristallizzazione frazionata da alcool a 99°. Con ciò si separò una frazione con p. f. 142°, $\alpha_D - 39.5$ ed un'altra frazione con p. f. 140° ed $\alpha_D + 5$ circa.

Una parte della frazione destogira, sottoposta a bromurazione, fornì un prodotto bromurato contenente 8 % di bromo, cioè circa un quarto del contenuto che si calcola pel dibromoderivato sterinico. Questo fatto, unito al segno dell'attività ottica, dimostra che questa frazione è una miscela di sterina e di diidrosterina.

La restante parte della frazione destogira e la frazione levogira, vennero separatamente sottoposte a idrogenazione e con ciò si ottennero due prodotti idrogenati tra loro identici, con p. f. 145°, $\alpha_D + 20.0$, che si identificano cioè entrambi a loro volta col diidroderivato della sterina testè descritta.

Risulta da quanto ho esposto che per debromurazione e successiva saponificazione delle tre frazioni bibromoacetilate A), B) e C) si ottiene una sola sterina, accompagnata dal corrispondente diidroderivato.

Tale sterina, presenta un punto di fusione ed un potere rotatorio sensibilmente più alti di quelli dati da Anderson e Nebenhauer per la frazione indicata come *fitosterina A*. Credo che si tratti però dello stesso termine e che le differenze suddette tra i valori delle due costanti fisiche siano imputabili alla presenza di una piccola quantità di diidrosterina nella frazione isolata dai suddetti ricercatori.

Oltre alla sterina ed alla diidrosterina qui descritte, nessun altro termine potè essere da me separato dai prodotti di debromurazione e saponificazione del biacetilderivato. I vari prodotti sterinici separatisi durante le numerose ricristallizzazioni da alcool, si rivelarono sempre miscele della stessa sterina e della stessa diidrosterina.

In base a questi risultati debbo ritenere che le frazioni steriniche indicate da Anderson e Nebenhauer col nome di *fitosterina B*, *fitosterina C* e *fitosterina D* non siano altrettanti termini distinti, ma semplicemente miscele in vario rapporto di un'unica sterina - quella testè descritta - e del corrispondente diidroderivato.

Chimica. — *Protoselensolfocloruro*. Nota ⁽¹⁾ di A. BARONI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Per quanto già da tempo fosse noto che il selenio agisce sul protocloruro di zolfo S_2Cl_2 , non mi risulta che qualcuno abbia studiato quali composti si originano nella mescolanza di queste due sostanze.

Infatti già F. Kraft ed O. Steiner ⁽³⁾ hanno osservato che lo zolfo è spostato dai suoi derivati alogenati dal selenio e Rathke ⁽⁴⁾ ha notato la formazione del protocloruro di selenio Se_2Cl_2 dal protocloruro di zolfo e selenio. Le ricerche di questi sperimentatori sono risultate complicate dalla formazione del protocloruro di selenio e dal fatto che per distillazione questo si decompone in tetracloruro di selenio $SeCl_4$ e selenio.

In un precedente lavoro sulla formazione di catene miste di zolfo e selenio con radicali alchilici ⁽⁵⁾, io ebbi occasione di occuparmi della azione dello zolfo sui poliseleniuri e del selenio sui polisolfuri alchilici e di osservare

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1932.

(3) « Berichte », 34, I, 560 (1901).

(4) « Ann. d. Chem. », 152, 181.

(5) « Rend. Lincei », IX, 6° 1020 (1929).

che tale azione è identica a quella dello zolfo sui composti solforati semplici; infatti per riscaldamento a temperatura sufficientemente elevata (200°) del diseleniuro dietilico con zolfo si ottiene la somma di un atomo di zolfo con formazione di diselensolfuro dietilico e per riscaldamento del disolfuro dietilico con selenio si ottiene la formazione di disolfoseleniuro dietilico, composti identici a quelli da me preparati per azione dell'ossicloruro di selenio e del cloruro di tionile rispettivamente sull'etilmercaptano e sull'etilseleni-mercaptano.

Era quindi logico supporre che una analoga reazione si originasse dalla mescolanza a temperatura ordinaria o nel riscaldamento a temperature successivamente crescenti del protocloruro di zolfo S_2Cl_2 col selenio e che cioè il selenio potesse spostare parzialmente e gradualmente lo zolfo dal protocloruro con formazione di cloruri misti di zolfo e selenio.

Per potere provare ciò io ho preparato delle miscele di protocloruro di zolfo e di selenio nelle proporzioni di una molecola del primo con un atomo del secondo e le ho sottoposte a distillazione frazionata dopo averle riscaldate in tubo chiuso ed in bagno d'olio per quattro ore a temperatura di 100°, 150°, 200° e 250°. Mediante accurate distillazioni frazionate ho potuto osservare ed isolare vari composti che si originano dall'azione del selenio sul protocloruro di zolfo e cioè il dicloruro di zolfo SCl_2 , il tetracloruro di selenio $SeCl_4$ ed un cloruro misto di zolfo e selenio o protoselensolfocloruro $SeSCl_2$ che fino ad oggi non era noto: esso è un liquido di colore rosso scuro che distilla a 60°–62° a 20 mm. La grande quantità di $SeCl_4$ che si ottiene durante la distillazione mi induce a ritenere plausibile la formazione in un primo tempo del protocloruro Se_2Cl_2 che, decomponendosi durante la distillazione, separerebbe selenio come ha mostrato Kraft.

Il protoselensolfocloruro si ottiene con rendimenti bassi; la massima resa (13.2 %) si osserva per le miscele riscaldate a 200°, mentre con le miscele riscaldate a temperature superiori o inferiori a questa si hanno rendimenti notevolmente minori. Rendimenti migliori si hanno distillando delle miscele invecchiate dopo riscaldamento: distillando una miscela dopo invecchiamento per quattro mesi ho ottenuto infatti una resa del 22 %.

L'azione del selenio sul protocloruro di zolfo è stata da me studiata anche mediante misure di indice di rifrazione delle miscele appena preparate e dopo invecchiamento per quattro mesi. In un precedente lavoro sull'azione dello zolfo sui cloruri di zolfo ⁽¹⁾ ho potuto osservare che in funzione dell'invecchiamento le curve degli indici di rifrazione delle miscele riscaldate a 100°, 150° e 200° tendono a riunirsi alla composizione del cloruro politionico S_3Cl_2 ; un analogo andamento presentano le curve per le miscele di protocloruro di zolfo S_2Cl_2 e di selenio (fig. 1 e 2). In questo caso l'equilibrio si stabilisce molto più rapidamente per la minore tendenza che ha il

(1) « Rend. Lincei », XV, 6°, 305 (1932).

selenio di dare soluzioni soprasature, cosa che si verifica invece molto facilmente per lo zolfo. Da queste misure risulta anche che la solubilità massima del selenio nel protocloruro di zolfo e per l'intervallo di temperatura studiato, è di due atomi di selenio in una molecola di S_2Cl_2 , perchè le miscele più

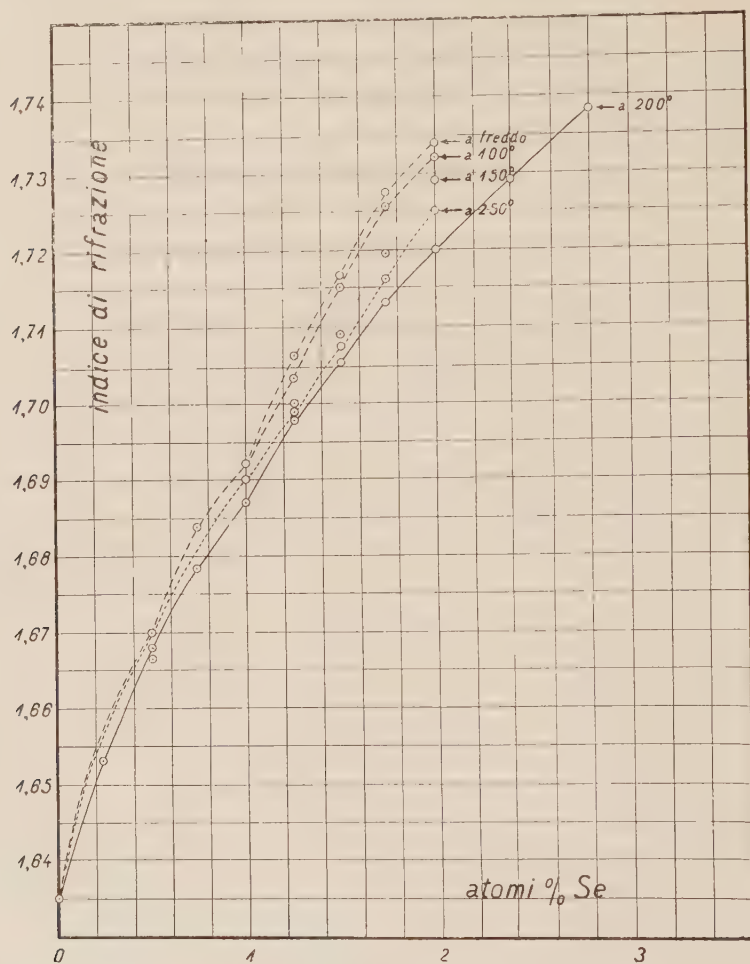


Fig. 1.

ricche in selenio depositano il selenio in eccesso subito o per successivo invecchiamento.

La curva della densità di queste stesse miscele ha un andamento quasi rettilineo; non si hanno inoltre variazioni di densità per le miscele riscaldate alle diverse temperature.

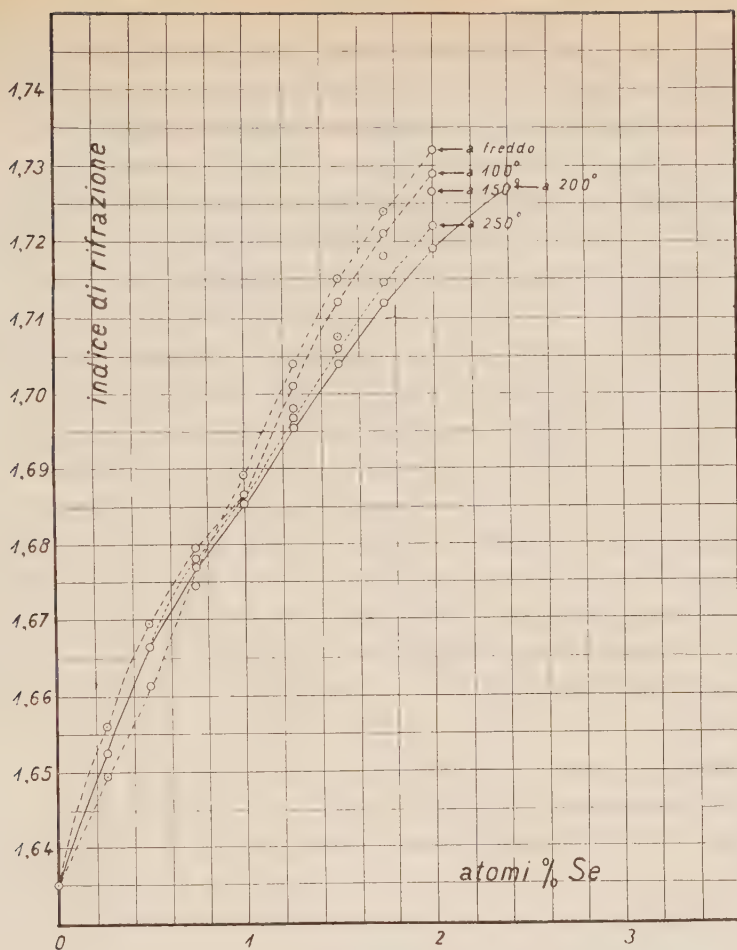


Fig. 2.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione del protoselensolfocloruro. — Questo composto si ottiene col migliore rendimento riscaldando una miscela di protocloruro di zolfo S_2Cl_2 e di selenio nelle proporzioni di una molecola del primo con un atomo del secondo in tubo chiuso ed in bagno d'olio a 200° per quattro ore. Dopo raffreddamento la miscela viene distillata nel vuoto a 20 mm. di mercurio. Si ottiene una piccola quantità di dicloruro di zolfo SCl_2 che distilla già a temperatura ordinaria e deve venire condensato in un apposito pallone posto dopo il ragno di frazionamento e raffreddato fortemente con una miscela di anidride carbonica ed acetone; a 45° distilla una miscela di protocloruro di zolfo rimasto inalterato e di tetracloruro di selenio $SeCl_4$ che si forma nella reazione e nella decomposizione del protocloruro di selenio e che viene tra-

scinato quasi completamente; a 60°-62° distilla il protoselensolfocloruro che risulta però sempre impuro di SeCl_4 . Per ripetute distillazioni lo si può purificare perfettamente, come pure si può utilizzare per ciò la proprietà del tetracloruro di selenio di essere insolubile nell'etere: aggiungendo perciò dell'etere anidro alla frazione che distilla a 60°-62° si separa tutto il tetracloruro di selenio dal protoselensolfocloruro che invece si scioglie facilmente in etere. Per evaporazione della soluzione eterea e successiva distillazione del residuo nel vuoto, si ottiene il composto allo stato puro.

Eseguendo distillazioni di miscele di protocloruro di zolfo e di selenio riscaldate a temperature di 100°, 150°, 200° e 250° in tubo chiuso ed in bagno d'olio per quattro ore, ho osservato che la quantità di protoselensolfocloruro che si può ottenere cresce con la temperatura raggiungendo un massimo a 200° per poi diminuire. I rendimenti sono però bassi perchè appunto nelle migliori condizioni, cioè per distillazione della miscela riscaldata a 200°, da gr. 53.2 di miscela $\text{S}_2\text{Cl}_2 + \text{Se}$ ho ottenuto solo gr. 5.9 di SeSCl_2 . Il rendimento in protoselensolfocloruro è stato quindi del 13.2 %.

Il protoselensolfocloruro è stato analizzato scomponendolo secondo il metodo dato da Hidemaro Endoh⁽¹⁾ per la determinazione dello zolfo e del cloro nel protocloruro di zolfo S_2Cl_2 , e dosando il cloro come AgCl , il selenio come selenio metallico e lo zolfo come BaSO_4 . I risultati analitici, sono i seguenti:

peso sostanza	peso AgCl	peso Se	peso BaSO_4	Cl %	Se %	S %
0.4711	0.7404	0.2040	0.5996	38.88	43.30	17.48
0.4280	0.6715	0.1859	0.5458	38.81	43.43	17.52

teorici: Cl = 38.93 % , Se = 43.47 % , S = 17.60 %.

Del protoselensolfocloruro ho determinato anche l'indice di rifrazione a 20° col metodo della deviazione minima usando un prisma con angolo di apertura di 15° ed ho ottenuto il valore 1.7233. Ho determinato anche il peso specifico pure a 20° ottenendo il valore 2.1503.

Determinazione dell'indice di rifrazione delle miscele di $\text{S}_2\text{Cl}_2 + \text{Se}$. — L'indice di rifrazione è stato determinato col metodo della deviazione minima usando un prisma di vetro con angolo di apertura di 15° e calcolando l'indice di rifrazione con la formula:

$$n = \frac{\text{sen } \frac{\delta_m + \alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\delta_m}{2}}$$

nella quale α è l'angolo rifrangente e δ_m è la deviazione minima.

(1) « Journ. chem. Soc. Ind. » (Suppl.) 33, 290 B-92 B (1930).

La fig. 1 riporta gli indici di rifrazione delle miscele preparate a freddo e di quelle riscaldate a 100°, 150°, 200° e 250° in tubo chiuso ed in bagno d'olio per quattro ore determinato subito e la fig. 2 riporta gli stessi indici determinati dopo invecchiamento per quattro mesi.

Come ho già rilevato, tali curve, specialmente quelle delle miscele invecchiate, tendono a riunirsi alla composizione del protoselenosolfocloruro. Le differenze che si osservano con le curve ottenute per le miscele appena preparate, sono dovute al fatto che anche nel caso delle miscele $S_2Cl_2 + Se$ si è in presenza di un equilibrio che si stabilisce solo lentamente, però con notevole rapidità rispetto a quello delle miscele $S_2Cl_2 + S$ da me precedentemente studiate. Dai due grafici si osserva inoltre che la solubilità del selenio nel protocloruro di zolfo va aumentando con la temperatura fino a 200° per poi diminuire, come è dimostrato dallo scarto di indice di rifrazione.

Azione del protoselenosolfocloruro sulla gomma e sugli olii. — Molto curiosa è l'azione del protoselenosolfocloruro sulla gomma e sugli olii. Sono state fatte diverse prove sia in assenza che in presenza di solfuro di carbonio. In ogni caso si osserva che la formazione dei fatturati avviene istantaneamente a differenza di quello che si verifica col protocloruro di zolfo. Infatti, con questo ultimo, usando gr. 1.18 di S_2Cl_2 , gr. 10 di CS_2 e gr. 4 di olio di ricino sia ha coagulazione con formazione del fatturato in sette minuti primi; col protoselenosolfocloruro ($SeSCl_2$ gr. 1.58, CS_2 gr. 10, olio di ricino gr. 4) si ha invece coagulazione istantanea con forte sviluppo di calore. Con l'olio di colza mentre il protocloruro di zolfo (S_2Cl_2 gr. 1, olio gr. 4) in assenza di solvente dà una soluzione assai viscosa dopo 5' e coagula dopo 6', il protoselenosolfocloruro ($SeSCl_2$ gr. 1.30, olio gr. 3.5) dà coagulazione istantanea pure con forte sviluppo di calore. Questa azione energica è confrontabile con quella data nelle stesse condizioni dal tetracloruro di zolfo SCl_4 . Anche sulla gomma il protoselenosolfocloruro ha una azione molto energica, quasi bruciante.

Azione del protoselenosolfocloruro sulla piperidina. — Per vedere in che modo il selenio sia legato in questo composto, ho fatto reagire il protoselenosolfocloruro sulla piperidina. A questo scopo ho sciolto gr. 4.03 di piperidina in etere etilico anidro e freddo e nella soluzione ottenuta ho fatto gocciolare lentamente gr. 2.16 di $SeSCl_2$ sciolto pure in etere anidro; la reazione avviene abbastanza energicamente con sviluppo di calore. Filtrando il cloridrato di piperidina che si forma nella reazione e il selenio che si separa contemporaneamente ed evaporando la soluzione eterea rimane un residuo bianco esente di selenio che ho ricristallizzato dall'alcool. Il suo punto di fusione (p. f. 74°) corrisponde a quello della monotiopiperidina $(C_5H_{10}N)_2S$ che è stata già preparata per azione del dicloruro di zolfo SCl_2 sulla piperidina ⁽¹⁾

(1) « Berichte », 28, 1013 (1895).

In base a questa reazione si deve ritenere che nel protoselensolfocloruro il selenio sia unito allo zolfo e perciò più labilmente: a questo composto spetta quindi la formula $\text{Se} = \text{S} = \text{Cl}_2$.

Riassumendo:

a) Viene preparato il protoselensolfocloruro per azione del selenio sul protocloruro di zolfo S_2Cl_2 e ne vengono determinate le costanti caratteristiche. Questo composto si presenta come un liquido di colore rosso scuro che bolle a 60° – 62° a 20 mm. Viene inoltre esaminato il suo comportamento nella vulcanizzazione del caucciù e nella preparazione dei fatturati.

b) Viene studiata l'azione del selenio sul protocloruro di zolfo anche mediante misure di indice di rifrazione di miscele riscaldate a temperature di 100° , 150° , 200° e 250° . Le misure sono state eseguite sulle miscele appena preparate e dopo invecchiamento per quattro mesi.

c) Viene studiata l'azione del protoselensolfocloruro sulla piperidina, azione che conduce alla formazione della monotiopiperidina con separazione di selenio: ciò rende verosimile per questo composto la formula $\text{Se} = \text{S} = \text{Cl}_2$.

Fisiologia. — *Sull'azione tossica e sull'eliminazione della nicotina.* — I. *Azione tossica della nicotina e dell'ossinicotina* ⁽¹⁾. Nota di NICOLETTA SABATUCCI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nicotina. Nelle nostre ricerche usammo la nicotina Merck e la nicotina Kahlbaum: di ambedue determinammo il reale contenuto in nicotina col metodo gravimetrico di Bertrand e Javiller, basato sulla proprietà che ha l'acido silicotungstico, composto solubilissimo in acqua, di fornire, con le soluzioni degli alcaloidi, dei precipitati generalmente fioccosi, che dopo breve riposo diventano polverosi, cristallini e quindi facili a raccogliersi su filtro. Questi silicotungstati sono generalmente insolubili nell'acqua, resistono senza disciogliersi all'azione degli acidi minerali e lasciano per calcinazione un residuo fisso di anidride silicotungstica. Con la nicotina l'acido silicotungstico fornisce un sale pochissimo solubile anche in acido cloridrico all'1 % ($12 \text{ Tu}_3\text{OSiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} \cdot 2\text{C}_{10}\text{H}_{14}\text{N}_2 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$) che precipita dalle soluzioni di nicotina sotto forma di fiocchi bianchi e che con il riposo cristallizza in lamelle fini e lucenti.

(1) Le ricerche furono eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della Regia Università di Roma, per consiglio e sotto la guida del prof. S. BAGLIONI che ne ha già comunicato alcuni risultati nel « Bollettino della Società di Biologia Sperimentale » (*Sull'eliminazione della nicotina*, seduta del 7 maggio 1927).

(2) Nella seduta del 20 novembre 1932.

Nella determinazione del contenuto reale di alcaloide nella nicotina da noi adoperata abbiamo operato nel modo seguente: una determinata quantità di nicotina in esame, in soluzione di acido cloridrico all'1%, venne trattata con una soluzione di acido silicotungstico al 10%; il precipitato ottenuto separato per filtrazione e raccolto su filtro senza ceneri, venne lavato con una soluzione di acido cloridrico all'1%, poi seccato, calcinato e pesato: moltiplicando il peso dell'anidride silicotungstica così ottenuta per il fattore 1.139 si ebbe la quantità di nicotina contenuta nella nicotina Merck e Kahlbaum in esame. Esse risultarono una contenente il 98%, l'altra il 95% di nicotina; nelle esperienze usammo sempre soluzioni in acqua distillata.

Abbiamo cominciato con lo stabilire le dosi tossiche e letali per la rana, servendoci di rane esculente del peso medio di circa 20 gr. sperimentando ad una temperatura di circa 15°.

Dosi tossiche e letali della nicotina. Iniettando in una rana di 20 gr. 3/10 di mmg. di nicotina, si osserva subito dopo l'iniezione, grande aumento iniziale dell'eccitabilità che fa compiere all'animale salti ripetuti spontanei, provocati da lieve stimolazione cutanea: dopo circa dieci minuti scompaiono il riflesso oculare, di posizione e quello delle narici (per il quale stimolando l'animale nelle narici con un filo metallico, esso porta gli arti anteriori sul luogo dello stimolo cercando di allontanarlo).

L'animale assume quindi la caratteristica posizione tetanica di tutto il corpo: trae gli arti posteriori in alto flettendoli completamente in modo che i calcagni si avvicinano tra loro fino a toccarsi e quasi ad incrociarsi. Gli arti anteriori sono pure contratti: nelle femmine sono contratti lungo la linea mediana del corpo, nei maschi sono incrociati sotto il petto.

Dopo circa 15 minuti dall'iniezione, ricompaiono i riflessi (di posizione, corneale e delle narici) e in breve la rana ritorna normale.

Al disotto dei 3/10 di mmg. non esiste nessun'altra dose capace di dare aumento dell'eccitabilità senza dare perdita dei riflessi. Dosi minori dei 3/10 di mmg. provocano nella rana solo qualche salto dovuto allo stimolo della puntura dell'iniezione, e del tutto paragonabile all'eccitazione ottenuta in una rana di controllo, iniettando solo acqua distillata. Questa dose di 3/10 di mmg. per una rana di 20 gr. corrisponderebbe a gr. 0.015 per kg. di peso.

In altre rane abbiamo determinato la dose minima tossica capace di dare paralisi completa e ristabilimento in poche ore. Per una rana di 20 gr. questa dose è di 1.2 mmg. In seguito ad un'iniezione di 1.5 mmg. di nicotina, la rana salta ripetutamente per pochi secondi, cade sul dorso, ma riesce a riprendere la posizione normale. Dopo due minuti gli arti posteriori assumono la caratteristica posizione tetanica: cessa il ritmo respiratorio visibile alla gola e gli arti anteriori sono contratti nelle femmine lungo la linea mediana del corpo, nei maschi contro il petto. Le palpebre inferiori sono sollevate e scompaiono rapidamente i riflessi corneali e delle narici. Dieci minuti dopo l'iniezione la rana si presenta con il capo abbassato, ma senza toccare il fondo,

pizzicata sulla pelle mediante una pinza, reagisce debolmente con gli arti posteriori che non sono più contratti; scompare del tutto il riflesso di posizione e la retrazione degli arti posteriori in seguito ad estensione provocata è torpida. Dopo 15 minuti dall'iniezione la rana è del tutto paralizzata. Questa paralisi dura 4 o 5 ore; dopo questo tempo la paralisi va lentamente risolvendosi: ricompare il ritmo respiratorio alla gola e da ultimo il riflesso di posizione. Circa 6 ore dopo l'iniezione la rana si comporta del tutto come una rana normale. Questa dose di 1.5 mmg. per una rana di 20 gr. corrisponderebbe a gr. 0.05-0.10 per kg. di peso.

In altre rane abbiamo determinato *la dose minima letale*: per una rana di 20 gr. essa è circa di 3 mmg. Iniettando per via sottocutanea 3 mmg. di nicotina ad una rana di 20 gr. si osserva subito aumento dell'eccitabilità iniziale: la rana salta ripetutamente per 10-30 secondi; i salti diventano poi più deboli e cessano all'incirca un minuto dopo l'iniezione. Il capo è piegato verso il basso e gli arti anteriori contratti contro il petto o lungo il corpo secondo si tratti di maschi o di femmine. I muscoli degli arti anteriori e dello sterno si trovano in uno stato di rigidità. Stimolata due minuti dopo l'iniezione, essa non reagisce più essendo scomparsi tutti i riflessi; gli arti posteriori assumono la nota posizione sopra il dorso: questa posizione è così caratteristica ed avviene per dosi così piccole di nicotina che in medicina legale queste prove si ritengono come indispensabili per l'identificazione dell'alcaloide in caso di avvelenamento. Dopo 3 o 4 minuti dall'iniezione, l'animale è in paralisi completa, alla quale segue la morte rapidamente. Questa dose di 3 mmg. per una rana di 20 gr. corrisponderebbe a gr. 0.150 per kg. di peso. *Queste dosi così stabilite hanno valore solo se le rane durante l'intossicazione sono lasciate all'aria libera*; vedremo nella seguente Nota, occupandoci dell'eliminazione, come queste dosi variano secondo l'ambiente dove si mantiene l'animale.

Ossinicotina. L'ossinicotina usata nelle nostre esperienze è stata da noi stessi preparata secondo il metodo di Pinner e Wolffstein, che consiste nella lenta ossidazione della nicotina con acqua ossigenata in presenza di asbesto platinato. È necessario trattare la nicotina con tanta acqua ossigenata che per ogni molecola di base ci siano 3 atomi di ossigeno attivo.

Per 5 gr. di nicotina occorrono 125 gr. di acqua ossigenata al 2.5 %; dopo filtrazione, in seguito a leggero intorbidamento, si lascia stare il miscuglio per qualche settimana dopo aggiunta di piccole quantità di spugna di platino o di asbesto platinato. L'odore della nicotina scompare del tutto e per provare se il miscuglio non contiene più nicotina, se ne decompone una parte con soda; si agita con etere; il liquido filtrato per evaporazione non deve lasciare un residuo che odori di nicotina; si evapora allora tutto il liquido a bagno maria, così il miscuglio, fino ad allora del tutto incolore, si trasforma in uno sciroppo giallo che non presenta nessuna tendenza a cristallizzare, con odore che ricorda quello dell'acido cianidrico; per ottenere il prodotto cristallizzato si evapora il liquido nel vuoto a 40°-50° e si ottiene così uno sciroppo giallo chiaro che si libera dall'eccesso di acqua ossigenata per

agitazione con alcool assoluto. Il filtrato alcoolico si libera dall'alcool per evaporazione sempre nel vuoto e si ottiene così uno sciroppo giallo che mantenuto convenientemente in essiccatore privo di aria solidifica cristallizzando.

L'ossinicotina è una base che differisce dalla nicotina per la presenza di un atomo di ossigeno in più. Si presenta come una massa molto igroscopica alterabilissima; è una base debole, che presenta tutte le reazioni della nicotina, eccetto, secondo nostre personali osservazioni, quella di Ehrlich con la paradimetilamidobenzaldeide. Assai diverso è il comportamento biologico di questa sostanza, essendo la sua tossicità molto minore di quella della nicotina.

Per una rana di circa 20 gr. occorrono 6 o 7 mmg. di ossinicotina in soluzione acquosa iniettati sottocute per osservare appena qualche sintomo d'intossicazione, e cioè passeggera comparsa della caratteristica posizione degli arti posteriori. La rana si rimette dopo pochi minuti senza presentare affatto una fase di aumento dell'eccitabilità nè di abolizione dei riflessi. Iniettando 10 mmg. di ossinicotina si osservano quasi gli stessi fenomeni che si hanno iniettando 1,5-2 mmg. di nicotina e cioè scomparsa dei riflessi, posizione tetanica caratteristica e paralisi che si risolve però completamente in due o tre ore.

La dose minima letale è rappresentata da 15 mmg. sempre per una rana di 20 gr. I sintomi dell'avvelenamento sono del tutto simili a quelli per nicotina, solo manca quasi del tutto il periodo di aumento dell'eccitabilità agli stimoli meccanici. Due o tre minuti dopo l'iniezione, la rana assume la caratteristica posizione per poco tempo. Per dosi sufficienti la rana entra subito in paralisi e cessano i riflessi di posizione e quello corneale. Scompare il ritmo respiratorio alla gola e gli arti posteriori sono fortemente contratti.

A differenza dell'avvelenamento da nicotina, in questo caso l'animale non poggia con la testa verso il fondo, ma si mantiene nella posizione normale.

Concludendo possiamo dire che per una rana di 20 gr. la dose minima tossica capace di dare paralisi completa e ristabilimento in poche ore è di 1.2 mmg.

Sempre per una rana di 20 gr. la dose minima letale è di 3 mmg.; vedremo nella Nota seguente come queste dosi varino secondo l'ambiente dove si mantiene l'animale.

Per l'ossinicotina la dose minima letale, sempre per una rana di 20 gr., è di 15 mmg.: il fatto della minore tossicità dell'ossinicotina dimostra che l'azione tossica della nicotina dipende, almeno in parte, dalla funzione chimica bloccata dall'ossigeno.

Fisiologia. — *Sull'azione tossica e sull'eliminazione della nicotina.* - II. *Eliminazione ed assorbimento cutaneo della nicotina e della caffeina*⁽¹⁾. Nota di NICOLETTA SABATUCCI, presentata⁽²⁾ dal Corresp. S. BAGLIONI.

Le rane intossicate coll'inoculazione sottocutanea di nicotina, dopo le fasi di eccitazione e di paralisi, si ristabiliscono più o meno rapidamente o non si ristabiliscono affatto, a seconda dell'ambiente in cui soggiornano (aria o acqua): pertanto la dose minima letale viene a variare in rapporto a queste condizioni.

Iniettando ad una rana 1.5 mmg. di nicotina abbiamo potuto osservare in numerose esperienze, che se si pone la rana sotto una campana di vetro, all'aria umida, la rana si ristabilisce completamente in poche ore. Ciò avviene anche con volumi di aria confinati, purchè non inferiori a 150 cc. Al disotto di questa quantità si ha la morte dell'animale anche per 1.5 mmg. Se invece si pone la rana subito dopo l'iniezione di 1.5 mmg. di nicotina nell'acqua, il suo comportamento è diverso, anche in questo caso, secondo la quantità di acqua. Nelle nostre esperienze ponevamo l'animale subito dopo l'iniezione in un cilindro contenente quantità note di acqua e lo mantenevamo sospeso mediante un filo che gli passava attraverso le mandibole inferiori, in modo che metà della testa restasse al di fuori dell'acqua. In seguito a numerosi esperimenti, abbiamo potuto stabilire che perchè nell'acqua la rana si ristabilisca, come avviene nell'aria, per un'iniezione di 1.5 mmg. di nicotina, occorrono circa 400 cc. di acqua. Un ristabilimento più rapido, sempre per la stessa dose, si aveva invece tenendo la rana in acqua corrente.

Ponendo la rana in 200 cc. d'acqua, sempre dopo l'iniezione di 1.5 mmg. di nicotina, questa era del tutto paralizzata dopo circa un'ora, e all'autopsia eseguita dopo circa dieci ore il cuore in poche esperienze batteva ancora debolmente. In una sola esperienza la rana moriva solo dopo 6 o 7 ore.

In 100 cc. d'acqua, sempre per la medesima dose, la rana è completamente paralizzata dopo circa mezz'ora e dopo aver assunto la caratteristica posizione tetanica muore in poco tempo. All'autopsia il cuore fu trovato sempre immobile in diastole. In una sola di esse il cuore, stimolato meccanicamente toccando il ventricolo con la branca di una pinza, reagì con una *revolutio cordis* completa.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana della Regia Università di Roma diretto dal prof. Silvestro Baglioni.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1932.

Nell'acqua dove erano state poste le rane intossicate abbiamo potuto nettamente stabilire la presenza di nicotina mediante l'acido silicotungstico.

Altre esperienze sono state eseguite ponendo una rana normale in un determinato volume d'acqua contenente diverse dosi di nicotina, per studiare l'assorbimento del veleno attraverso la cute. Ponendo una rana di 20 gr. in 200 cc. d'acqua contenente 3 mmg. di nicotina, essa assume la caratteristica posizione tetanica dopo circa 5 minuti. Dopo dieci minuti scompare il ritmo respiratorio visibile alla gola e dopo circa un quarto d'ora la rana è del tutto paralizzata e non si ristabilisce più. Ponendo in 200 cc. d'acqua 2 mmg. di nicotina, si hanno i medesimi effetti tossici, però se appena sopraggiunta la paralisi si estrae la rana dall'acqua e si pone all'aria umida essa si ristabilisce completamente.

Caffeina. Abbiamo ripetuto le medesime esperienze eseguite con la nicotina usando la caffeina in soluzione di benzoato di sodio secondo la F. U. e siamo giunti a risultati molto diversi. La tossicità della caffeina essendo molto minore di quella della nicotina, così la *dose minima letale* di caffeina per una rana di 20 gr. è di 12-15 mmg. iniettati sotto cute. Subito dopo l'iniezione la rana salta e presenta ripetuti tetani estensori spontanei. La retrazione degli arti posteriori in seguito ad estensione provocata è più lenta che in una rana normale. Scompare quasi subito il riflesso di posizione, più tardi quello corneale e quello delle narici. Dopo 5 minuti cessa il ritmo respiratorio alla gola e continuano sempre i tetani estensori. La rana muore dopo circa un'ora, mantenendo gli arti posteriori rigidamente in tetano. Iniettando da 5 a 10 mmg. di caffeina si ha subito scomparsa dei riflessi, ipertonia degli arti posteriori: la rana reagisce agli stimoli meccanici con ripetuti tetani estensori. Lasciando la rana all'aria occorrono da due a tre giorni perchè essa ritorni del tutto normale: durante questo periodo la rana, ad ogni minimo stimolo esterno, reagisce con ripetuti tetani estensori. Anche per la caffeina il comportamento della rana intossicata varia secondo l'ambiente in cui si mantiene dopo l'iniezione. Ponendo l'animale subito dopo l'iniezione in un cilindro contenente 200 cc. d'acqua, è stato visto che per un'iniezione di 10-15 mmg. di caffeina la rana, mantenuta sempre nell'acqua, all'infuori di un lieve aumento di eccitabilità, non presenta nessun sintomo d'avvelenamento.

Occorrono 20-25 mmg. di caffeina per ottenere, sempre nell'acqua, tetani estensori in seguito a percussioni lievi del cilindro nel quale era posta la rana; anche per queste dosi, la rana si ristabilisce completamente in tre o quattro ore.

20-30 mmg. rappresentano, per una rana di 20 gr., la *dose minima letale*, quando l'animale è mantenuto nell'acqua; in questo caso la rana presenta tutti i sintomi dell'intossicazione che offre l'animale lasciato all'aria. Abbiamo inoltre osservato che per 5-10 mmg. di caffeina, il ritorno alla norma, tenendo l'animale sotto una campana di vetro all'aria umida, è molto lento

e occorrono da tre a quattro giorni perchè si abbia la totale scomparsa dei tetani.

Se però al secondo giorno di avvelenamento la rana, già in tetano si pone nell'acqua, dopo una o due ore, la rana ritorna completamente normale.

Volendo studiare anche l'assorbimento cutaneo della caffeina, abbiamo posto la rana normale in un cilindro di vetro contenente 200 cc. di acqua e 20 mmg. di caffeina, che rappresenterebbero la dose minima letale per una rana di 20 gr. lasciata all'aria; la rana in esperienza non presentava nessun sintomo d'avvelenamento. Occorre aggiungere all'acqua, nella quale si pone la rana, 30 mmg. di caffeina per notare soltanto aumento dell'eccitabilità. Aggiungendo 40 mmg. si osservano tetani estensori solo dopo 24 ore. Questo stato di tetano dura molto tempo, durante il quale la rana stimolata continua a reagire. Dopo circa 36 ore la rana muore.

Considerazioni e conclusioni.

Abbiamo visto che la dose minima letale di nicotina per una rana di 20 gr. è di 3 mmg., se dopo l'iniezione si lascia l'animale all'aria umida; se subito dopo l'iniezione la rana si pone in 200 cc. di acqua, la dose minima letale scende a 1.5 mmg. Mettendo l'alcaloide in 200 cc. d'acqua e ponendovi una rana normale, la quantità minima di nicotina necessaria per provocare la morte della rana è di 3 mmg.

Presupposto che la cute e i tessuti siano permeabili al veleno, e che la nicotina possa spostarsi tra acqua e rana (che possiamo considerare come due soluzioni) secondo le leggi della diffusione chimica, qualora l'affinità dell'acqua e della rana per la nicotina fosse la medesima, occorrerebbero, considerando il peso complessivo acqua più rana, 33 mmg. di nicotina invece di 3 mmg. Ciò non avvenendo è evidente che la rana presenti una speciale affinità per la nicotina essendo capace di assorbirla dalla soluzione acquosa.

Nel caso della caffeina, la dose minima letale per la rana lasciata all'aria è di 15 mmg. Ponendo subito dopo l'iniezione l'animale in 200 cc. d'acqua essa sale a 25 mmg., e mettendo infine una rana normale in 200 cc. d'acqua contenente l'alcaloide, occorre aggiungere 40 mmg. di caffeina perchè avvenga la morte della rana. Anche in questo caso se l'affinità dell'acqua e della rana per la caffeina fosse la medesima, occorrerebbe aggiungere una quantità di alcaloide molto maggiore, per produrre la morte della rana. Infatti riferendosi al peso totale di acqua, più rana, se ne sarebbero dovuti impiegare 44 mmg. Anche in questo caso la rana possiede quindi un'affinità elettiva verso la caffeina.

Il diverso comportamento della rana intossicata con nicotina nell'acqua e nell'aria, molto probabilmente dipende dal fatto che la nicotina, alcaloide volatile e solubile nell'acqua, diffonde dall'organismo nell'ambiente esterno lentamente e gradatamente secondo la concentrazione che essa va assumendo

nei due mezzi. Tale diffusione dalla superficie cutanea e polmonare nella rana costituirebbe, forse più che l'emuntorio renale, il processo normale di eliminazione del veleno. Esso cessa quando nell'ambiente esterno l'alcaloide ha raggiunto la stessa concentrazione che ha nell'ambiente interno, secondo la legge della diffusione chimica tra due soluzioni di diversa concentrazione.

Le osservazioni fatte suggeriscono l'ipotesi che l'azione tossica della nicotina non consista nel fatto che essa formi nell'organismo un composto stabile con i tessuti; se si formasse una combinazione chimica, non varrebbe più la legge della diffusione chimica, ma si potrebbe pensare invece che essa formi un composto instabile, che si dissocia secondo la legge della tensione (o grado di concentrazione) parziale. D'altra parte questo comportamento di eliminazione del veleno è reversibile; abbiamo visto che la nicotina si assorbe procedendo dall'ambiente (aria o acqua) verso l'interno dell'organismo, attraverso tessuti permeabili (cute negli anfibii, superficie polmonare nei vertebrati superiori), se l'organismo, privo di nicotina nel suo interno, soggiorna in ambiente contenente nicotina.

Se questa ipotesi è vera, allora molto probabilmente la nicotina agirebbe come per contatto coi centri nervosi, similmente ad un processo catalitico, e non verrebbe distrutto per tale processo come invece crede DIXON; oppure la nicotina formerebbe una combinazione chimica instabile, come quella che forma l'ossigeno coll'emoglobina (ossi-emoglobina).

La minore tossicità della caffeina sta in rapporto al fatto che essa non è volatile, ma solo solubile in acqua. La sua eliminazione ha luogo solo per via renale e non per la cute.

Fisiologia. — *Avitaminosi ed intossicazioni.* - II. *Scorbuto sperimentale ed intossicazione chimica da metalli e metalloidi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Proseguendo nello stesso ordine di ricerche, già esposto nella Nota I ⁽³⁾, ho considerato il comportamento dello scorbuto sperimentale nelle cavie, di fronte a piccole quantità di una miscela salina di vari metalli e metalloidi in soluzione acquosa. Le esperienze sono state eseguite su 15 animali divisi in 5 lotti, ciascuno di tre cavie: il primo era sottoposto al regime artificiale incompleto (costituito, secondo Bezssonoff, di avena p. 86, crusca p. 10, lievito di birra gr. 4, tuorlo d'uovo gr. 7.5, diluiti in 20 cc. d'acqua) con l'aggiunta di vitamina (4 cc. di succo fresco di arancia per animale e per giorno); il secondo lotto era tenuto al regime esclusivo scorbutogeno, per tutta la durata dell'esperienza; il terzo era sottoposto a questo regime, ma, ai primi segni dell'avitaminosi C, ricevette una piccola dose di miscela metallo-metalloidea; il quarto lotto era sottoposto alla dieta artificiale incompleta con l'aggiunta, sin dall'inizio dell'esperimento, di una piccola dose di miscela metallo-metalloidea; finalmente il quinto lotto era tenuto al regime artificiale, reso completo dall'aggiunta di succo fresco di arancia, più una piccola dose di miscela metallo-metalloidea (sin dall'inizio dell'esperimento).

Si sono impiegati animali aventi press'a poco lo stesso peso iniziale, ed in buone condizioni di salute; essi sono stati tenuti separatamente nello stabulario, nelle gabbie speciali che si adoperano per lo studio del ricambio materiale; erano pesati giornalmente alla stessa ora ed esaminati dal punto di vista del comportamento generale e della sintomatologia eventualmente offerta. Si conosceva sempre il peso dell'alimento somministrato (30 gr. *pro die*, per ciascun animale); il giorno dopo questo si ripesava e dalla differenza si ricavava l'alimento ingerito, tenendo conto, per quanto è stato possibile, delle piccole quantità di cibo che lo stesso animale espelleva dalla gabbia. Il succo di arancia era pipettato nella cavità orale delle cavie; anche la somministrazione della miscela acquosa metallo-metalloidea si faceva per via orale. Per la composizione di quest'ultima rimando alla Nota I.

I risultati ottenuti, per quanto si riferisce alla curva del peso (espresso in grammi) degli animali in esperimento ed alla sintomatologia da essi presentata, sono riassunti nella seguente tabella.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1932.

(3) M. MITOLO, questi « Rendiconti », XVI, 1932.

TABELLA.

Data	Primo lotto			Secondo lotto			Terzo lotto			Quarto lotto			Quinto lotto				
	1 ^a cavia	2 ^a cavia	3 ^a cavia	Note	1 ^a cavia	2 ^a cavia	3 ^a cavia	Note	1 ^a cavia	2 ^a cavia	3 ^a cavia	Note	1 ^a cavia	2 ^a cavia	3 ^a cavia	Note	
Ago- sto 1932																	
2	281	290	295		337	251	291		350	348	302		235	231	213		
3	278	276	283		314	235	286		319	343	280		223	225	206		
4	271	285	278		318	230	275		305	343	280		213	218	194		
5	285	285	287		314	247	293		306	347	272		222	227	197		
6	295	295	295		324	255	300		315	347	270		207	215	187	da oggi 3 cc. di mi- scela	da oggi 3 cc. di mi- scela
7	300	300	306		318	259	308		315	357	270		220	232	202		
8	303	301	309		320	260	310		320	362	284		225	230	207		
9	311	313	314		325	275	317		337	370	284		230	236	216		
10	322	313	320		323	277	320		332	370	280		237	233	220		
11	323	324	324		332	281	325		339	380	272		241	241	223		
12	334	327	332		336	288	332		347	387	274		244	243	230		
13	332	327	332		333	293	332		330	382	290		237	242	225		
14	330	336	334		338	294	327		339	377	302		235	235	230		
15	328	338	333		337	287	329		344	380	300		232	227	225	anoressia; dimagra- mento progressivo	
16	325	329	322		335	280	329	anoressia, dimagra- mento progressivo	347	380	295	anoressia; da oggi 1/2 cc. di miscela	232	225	221		
17	317	325	334		331	274	332	tumefazioni artic- lari ant. e post.	348	381	290	dimagrimento, tu- mediazioni articola- ri ant. e post.	220	215	220	tumefazioni artic- lari ant. e post.	
18	317	318	334		325	280	334		341	377	276		217	209	213	torpore, pelo arruf- fato	
19	306	319	334		317	255	327		337	377	271		202	196	202	da oggi 1/2 cc. di miscela	da oggi 1/2 cc. di miscela
20	307	313	332		303	248	320	torpore, pelo arruf- fato	325	367	270		200	178	195	disipnea	
21	309	307	330		297	242	307		309	361	264	torpore, pelo arruf- fato	192	morta	185		
22	305	297	327		287	232	297		290	347	265		180	—	175	cav. 1 ^a , tremore ge- neralizzato	
23	308	304	338		290	218	294		293	350	262		180	—	morta		
24	313	287	343		283	223	274		282	345	250	fecì emorragiche, sta- to agonico, emor- ragie gengivali	172	—	—		
25	305	272	341		272	208	251		273	325	250		162	—	—		
26	312	266	347		263	203	255		262	307	249		morta	—	—		

da oggi 1/2 cc. di miscela

Dalla tabella appare che gli animali del primo lotto, a dieta scorbutogena più succo fresco di arancia, si sono conservati bene e sono cresciuti di peso; solo la cavia n. 2 alla fine dell'esperienza aveva un peso corporeo inferiore a quello iniziale, probabilmente perchè, a lungo andare, si è stabilito uno stato carenziale di origine alimentare (non di vitamina C, ma di qualche altro fattore nutritivo). Al principio della ricerca le cavie hanno perduto un po' di peso, ma entro 4-5 giorni lo hanno ricuperato, non appena si sono assuefatte alla dieta; hanno poi raggiunto il massimo peso corporeo tra l'11° e il 13° giorno di esperienza.

Le cavie del secondo lotto hanno perduto peso al principio della prova, ma lo hanno ricuperato (lentamente la cavia n. 1) per raggiungere il massimo in un tempo uguale a quello impiegato dal primo lotto; però, al 15° giorno, gli animali sono stati colpiti dai primi sintomi dell'avitaminosi (anoressia, dimagrimento progressivo, tumefazioni dolorose articolari prima degli arti posteriori, poi degli anteriori); in seguito si è notato torpore nei movimenti e pelo arruffato. Alla fine dell'esperienza, cioè al 25° giorno, non erano ancora comparsi i segni terminali dello scorbutto sperimentale, ossia le feci emorragiche, il tremore generalizzato, lo stato paralitico, la dispnea, le emorragie gengivali, la caduta dei denti, ecc.

Le cavie del terzo lotto, dopo aver ricuperato, più o meno lentamente, il proprio peso, hanno anch'esse raggiunto il massimo peso corporeo verso l'11° giorno; al 15° (primi sintomi dell'avitaminosi) sono state trattate con cc. 0.5 di miscela metallo-metalloidea, *pro die*; alla fine dell'esperienza gli animali erano ancora in vita, e ciascuno aveva ricevuto cc. 5.5 di miscela (ossia mgr. 1.98 di sali metallici e metalloidi). Non si può dire che, rispetto al secondo lotto, vi sia stato nel terzo una accelerazione o una complicazione nell'andamento dell'avitaminosi.

Gli animali del quarto lotto sono stati trattati dal 5° giorno di esperimento con 3 cc. di miscela salina; il ricupero del peso è stato più lento, ma anch'essi hanno raggiunto il massimo peso corporeo verso l'11° giorno. Dopo di che sono comparsi la perdita dell'appetito, il dimagrimento progressivo, le tumefazioni articolari e (per la cavia n. 1) tutto il corteo dei sintomi, anche i più gravi, dell'avitaminosi sperimentale della cavia (tremore, dispnea, emorragie gengivali, diarrea sanguinolenta). La morte è sopravvenuta al 25° giorno per la cavia n. 1, al 20° per la cavia n. 2, al 22° per la cavia n. 3. All'autopsia, si notavano emorragie più o meno estese, sottocutanee, intramuscolari e sottoperiostee, ed aumento del volume delle capsule surrenali e della milza. In altri termini, per gli animali di questo lotto, carenzati, ma trattati con miscela metallo-metalloidea (la cavia n. 1 ne ha ricevuto cc. 42.5, pari a mgr. 15.30 di sali; la cavia n. 2 cc. 40, pari a mgr. 14.40; la cavia n. 3 cc. 41, pari a mgr. 14.76), non si sono avuti sintomi propri dell'intossicazione da metalli e metalloidi, ma l'evoluzione dello scorbutto sperimentale è stata notevolmente accelerata, tanto da portare a morte tutte le cavie del lotto medesimo.

Infine, gli animali del quinto lotto, tenuti a dieta scorbutogena più vitamina e (dal 5° giorno) miscela di metalli e metalloidi, non hanno subito alcun disturbo, comportandosi come le cavie del primo lotto e raggiungendo il massimo peso tra l'11° e il 13° giorno: eppure ciascuna ha ricevuto cc. 43 di miscela (ossia mgr. 15.48 di sali metallici e metalloidici). La somministrazione orale, *in un sol giorno*, ad una cavia (di gr. 360), di cc. 40 della miscela (in quattro volte; 10 cc. per volta) non ha provocato nell'animale alcun sintomo di intossicazione.

In conclusione, l'ingestione, per via orale, di una miscela di sali metallici e metalloidici, in dosi tali da non riuscire tossiche per gli animali normali, provoca, nelle cavie in avitaminosi C, modificazione nell'andamento della carenza alimentare, nel senso che essa viene favorita ed accelerata.

Se non si è verificata una netta agevolazione della sindrome scorbutica in cavie che hanno ricevuto la miscela salina soltanto all'inizio dell'avitaminosi, l'accelerazione della carenza è stata molto evidente quando gli animali carenzati sono stati trattati sin dal principio dell'esperimento con una piccola dose di metalli e metalloidi. Tutte e tre le cavie del quarto lotto sono venute a morte, a differenza di quelle degli altri lotti carenzati; e si può dire che per gli animali del quarto lotto l'evoluzione dello scorbuto è stata completa (si sono notate perfino le feci emorragiche, la grave dispnea, il tremore generalizzato, le emorragie gengivali, sintomi che di solito si verificano soltanto negli stati terminali dell'avitaminosi).

Però a differenza di quanto si è alcune volte osservato nel decorso della polineurite sperimentale in piccioni contemporaneamente avvelenati con miscela metallo-metalloidica (v. Nota I), per le cavie non si è notata, nè clinicamente, nè al tavolo anatomico, associazione della sindrome e del reperto scorbutico con quelli di intossicazione da metalli e metalloidi; ma senza dubbio questi ultimi hanno favorito nettamente il decorso dell'avitaminosi.

I risultati delle ricerche, comunicate in questa e nella I Nota, trovano un certo riscontro nella vecchia teoria sul significato biologico delle vitamine (sostenuta da Eijkmann, Jamigava, Koyama, Midorikawa, Mogi, Bucco, ecc.), secondo cui questi fattori alimentari esplicano nell'organismo una prevalente azione antitossica.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 dicembre 1932 (anno XI)

Presidenza del Socio anziano prof. sen. E. MARCHIAFAVA

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.* Nota⁽¹⁾ del Socio F. ENRIQUES.

1. Il sig. Severi⁽²⁾ — avendo posto felicemente la definizione delle *serie razionali di gruppi di punti equivalenti* sopra una superficie, e insegnato a operare su di esse per somma e sottrazione — è riuscito a trovare una interessante interpretazione geometrico-funzionale del carattere numerico 1, conosciuto come invariante di Zeuthen-Segre. Si tratta precisamente di una serie di grado $1 + 4$, che viene definita virtualmente a partire dal gruppo jacobiano $(C)_j$ di un fascio lineare di curve C , mediante la formula

$$(C)_j - (CC) - 2(CC'):$$

(CC) designa il gruppo delle intersezioni di due C , e (CC') il gruppo delle intersezioni di C con una curva C' aggiunta a $|C|$.

La serie di Severi così definita gode di *invarianza relativa*, in ordine alle trasformazioni birazionali della superficie F che non introducono curve eccezionali, riuscendo indipendente dal fascio o dal sistema $|C|$ scelto su F .

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(2) *Un nuovo campo di ricerche...* «Memorie della R. Acc. d'Italia», vol. III (1932).

Ora a me sembra interessante notare che il modo tenuto dal Severi non è il solo modo con cui si possono costruire sopra una superficie delle serie invarianti di gruppi equivalenti.

In particolare voglio indicare la costruzione di una serie invariante di gruppi di $p + 1$ punti ($p = p_a =$ genere numerico), che gode dell'invarianza assoluta.

Alla serie invariante che qui abbiamo in vista, si arriva seguendo l'idea generale che sta a base della teoria delle curve invarianti, come è sviluppata nella mia *Introduzione alla geometria sopra le superficie...* (« Società Italiana detta dei XL », 1896) e — nella forma più semplice — dalla Nota *Intorno ai fondamenti della geometria sopra una superficie...* (« R. Acc. di Torino », 1901)⁽¹⁾. Analoga dimostrazione potrebbe svilupparsi per l'invarianza della serie di Severi.

2. Si consideri una rete di curve C e le curve cuspidate che le appartengono. È noto che il numero χ di queste si esprime semplicemente per mezzo del genere π delle C e del genere numerico $p (= p_a)$ della superficie, colla formula:

$$(1) \quad \chi = 24 (\pi + p)^{(2)}.$$

Ora il gruppo $(C)_\chi$ delle cuspidi di codeste curve cuspidate appartiene, in generale, ad una serie razionale covariante di $|C|$; ed è facile vedere come questa serie si modifichi quando si passa da $|C|$ ad un sistema lineare più ampio $|C + K|$.

Precisamente si può dimostrare la relazione di equivalenza

$$(2) \quad (C + K)_\chi \equiv (C)_\chi + 24 (CK) + 12 (KK')$$

dove (CK) designa il gruppo delle intersezioni di una C con K , e (KK') un gruppo canonico di K , intersezione di K con una curva aggiunta K' .

Per dimostrare questa relazione conviene considerare una rete $K + (C)_2$ di curve spezzate $K + C$, con K componente fissa, ritenendola come limite di una rete $(L)_2$ contenuta entro $|L| = |C + K|$, la quale sia fatta tendere alla prima, in un modo determinato, attraverso una serie ∞' di stati.

Siccome la rete delle curve riducibili $K + (C)_2$ contiene infinite curve cuspidate, essendo K luogo di tacnodì delle curve composte con χ e con una C tangente, occorre esaminare più da vicino il passaggio al limite sopra indicato.

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, redatte da L. Campedelli. Edizione litografica, Cedom, Padova, 1932. Cap. II.

(2) Cfr. H. G. ZÉUTHEN, *Etudes géométriques*, « Math. Annalen », 4 (1871); M. NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...*, « Math. Ann. », 8 (1875); F. SEVERI, *Il genere aritmetico...*, « Atti Acc. Torino », 37 (1902); T. BONNESEN, *Sur les séries linéaires...*, « Bull. de l'Académie de Danemark », 1906.

Designamo:

- con π , come già si è detto, il genere di C ,
- con ρ il genere di K ,
- con d il numero delle intersezioni (CK) ,
- e quindi con $\Pi = \pi + \rho + d - 1$ il genere di $|L|$.

Giova considerare:

a) Una rete generica $(L)_2$ di curve L irriducibili, che possiamo supporre contenga $24(\Pi + p)$ curve cuspidate distinte, e non contenga entro di sè infinite curve spezzate di cui faccia parte la K ;

b) Una rete particolare $(\bar{L})_2$ di curve irriducibili L , che contenga dentro di sè un fascio $K + (C)$, di curve spezzate colla componente fissa K : questa rete e la $K + (C)_2$, avendo comune un fascio, saranno contenute insieme in un sistema lineare $\infty^3(\bar{L})_3$, per cui K è curva fondamentale;

c) La rete delle curve riducibili $(\bar{L})_2 = K + (C)_2$.

Osserviamo anzitutto che cosa diventi il gruppo delle cuspidi delle curve cuspidate di $(L)_2$, cioè il gruppo $(L)_\chi$, quando $(L)_2$ diventa $(\bar{L})_2$. È ovvio che un certo numero di cuspidi darà, al limite, cuspidi delle curve \bar{L} . fuori di K , il gruppo delle quali potrà essere designato con $(\bar{L})_\chi$; invece alcune delle curve cuspidate di $(L)_2$ tenderanno alle $2d + 2\pi - 2$ curve composte di K e di una C tangente del fascio $(C)_1$: il gruppo delle cuspidi di queste ultime curve è il gruppo jacobiano della serie g'_d segnata dalle curve di $(C)_1$ sopra K , da contare un certo numero x di volte. Così potremo scrivere:

$$(3) \quad (L)_\chi \equiv (\bar{L})_\chi + x \{ 2(CK) + (KK') \}$$

essendo (CK) il gruppo delle intersezioni di K con una C , e (KK') un gruppo canonico di K , intersezione di K con una curva aggiunta K' .

Ora cerchiamo che cosa diventi il gruppo $(\bar{L})_\chi$ quando la rete $(\bar{L})_2$, variando entro il sistema lineare $(\bar{L})_3$, attraverso una successione ∞' di stati, tenda alla $(\bar{L})_2 = K + (C)_2$.

A tal uopo ci riferiremo alla superficie F dello spazio S_3 che ha come sezioni piane le curve di $(\bar{L})_3$.

Su F un gruppo $(\bar{L})_\chi$ si costruisce intersecando la curva parabolica, C_b , sezione della hessiana H di F , colla curva sezione della polare di un punto generico A (cioè colla curva jacobiana C_j della rete delle sezioni di F coi piani per A), e prescindendo dalle intersezioni delle due curve $C_b C_j$, che cadono nel punto multiplo $(d\text{-plo})$ O , immagine di K . Pertanto, se il punto A , movendosi sopra una linea per O , tenda ad O (e quindi la rete $(\bar{L})_2$ alla $(\bar{L})_2 = K + (C)_2$) il gruppo delle cuspidi $(\bar{L})_\chi$ si moverà sopra la curva C_b , e infine si ridurrà al gruppo $(C)_\chi$ costituito dalle cuspidi della rete $(C)_2$ aumentato del gruppo dei punti di C_b infinitamente vicini ad O , da contare un certo numero y di volte. Ora, che cos'è il gruppo dei punti,

infinitamente vicini ad O , sulla curva parabolica C_b ? È, evidentemente, un gruppo di intersezioni $(C_b K)$, poichè l'intorno di O rappresenta appunto la curva K . Si può verificare precisamente che quel gruppo equivale (sopra K) ad un gruppo jacobiano della serie g_d segata dalle C , e quindi che

$$(\bar{L})_x \equiv (C)_x + y \{ 2 (CK) + (KK') \}.$$

La verifica accennata si fa valutando il comportamento della hessiana di F (e così della curva C_b) nel punto d -plo O . Si può riconoscere che la hessiana si comporta in O , come se avesse la molteplicità $4d-4$, e quindi come una superficie del sistema quadruplo delle aggiunte φ_{n-2} , che contenga 4 volte la curva (infinitesima) K , costituente l'intorno di O . Ciò posto, la curva luogo delle cuspidi delle curve di un sistema lineare $\infty^3 (L)_3$ è, in generale, una curva del sistema $|4L + 4L'| = |4C + 4K + 4C + 4K'|$; quando $(L)_3$ si riduce ad $(\bar{L})_3$ da essa si stacca $4K$, cosicchè

$$C_b = 8C + 4K',$$

e quindi il gruppo di punti

$$(C_b K) \equiv 8 (CK) + 4 (KK'),$$

ossia $(C_b K)$ è equivalente ad un gruppo jacobiano della serie g_d segnata dalle C sopra la K .

In ultima analisi avremo dunque

$$(\bar{L})_x \equiv (C)_x + y \{ 2 (CK) + (KK') \},$$

e infine, per la (3),

$$(L)_x \equiv (C)_x + (x + y) \{ 2 (CK) + (KK') \}.$$

La relazione numerativa (1), già innanzi ricordata, dà $x + y = 12$, e perciò

$$(2) \quad (L)_x \equiv (C + K)_x \equiv (C)_x + 24 (CK) + 12 (KK').$$

Scambiamo le due curve C e K , scrivendo

$$(C + K)_x \equiv (K)_x + 24 (CK) + 12 (CC').$$

Ne deduciamo in generale la relazione d'equivalenza sopra la superficie

$$(4) \quad (C)_x - 12 (CC') \equiv (K)_x - 12 (KK').$$

Questa relazione si lascia interpretare come segue. Al variare di una rete $(C)_2$ entro il sistema lineare $|C|$, il gruppo delle cuspidi della rete de-

scrive una serie razionale di gruppi equivalenti: sottraendo 12 volte un gruppo della serie razionale descritta dai gruppi (CC') , si definisce ancora una serie razionale di gruppi equivalenti. Ebbene:

La serie razionale di gruppi equivalenti che si ottiene partendo dal gruppo delle cuspidi di una rete di C e togliendo 12 volte il gruppo delle intersezioni di una C con una curva aggiunta C' , riesce indipendente dal sistema $|C|$ e perciò ha carattere invariante rispetto a trasformazioni birazionali della superficie.

Il grado della serie invariante così ottenuta vale $24(p+1)$. E, poichè p (genere numerico) è un invariante assoluto della superficie (anche rispetto a trasformazioni birazionali che introducono curve eccezionali) si comprende che la detta serie dovrà godere egualmente della invarianza assoluta. Ciò si verifica senza difficoltà, osservando che i gruppi di essa non dipendono affatto dai punti base del sistema $|C|$, e quindi non si altera l'ordine della serie stessa quando un punto base di $|C|$ venga sostituito con una curva eccezionale.

4. Sopra una data superficie F conosciamo ora tre serie invarianti:

1) la serie di Severi, S_s (che egli chiama canonica);

2) la serie canonica S_c definita dai gruppi delle intersezioni delle curve canoniche (poichè a questa serie ci sembra più conveniente di riservare un tal nome);

3) e la nostra serie S_e ;

i gradi rispettivi delle serie S_s , S_c e S_e sono

$$1 + 4, \quad p^{(1)} - 1 \quad \text{e} \quad 24(p + 1),$$

designando I l'invariante di Zeuthen-Segre, $p^{(1)}$ il genere lineare (relativo) di F , e p il suo genere numerico.

Ora fra i detti numeri sussiste la relazione indicata da Nöther ⁽¹⁾:

$$I = 12p - p^{(1)} + 9,$$

cioè

$$24(p + 1) = 2(1 + 4) + 2(p^{(1)} - 1).$$

Si presenta subito alla mente l'idea che questa relazione numerica ammetta un'interpretazione geometrica funzionale, cioè che si abbia:

$$S_e = 2S_s + 2S_c.$$

Per stabilire effettivamente questa relazione, basta interpretare geometricamente i passaggi con cui Bonnesen ⁽²⁾ dimostra la relazione numerica di Nöther, sopra ricordata.

(1) Loc. cit.

(2) Nella citata Nota dell'Accademia danese.

Si assuma, come modello della superficie, una F dotata di curva doppia ordinaria nello spazio S_3 , le cui sezioni costituiscano le curve C . Sopra F , il gruppo delle cuspidi di una rete di C è dato dalle intersezioni della curva sezione della hessiana colla polare di un punto O , fuori dei punti cuspidali della curva doppia. E sopra la medesima curva intersezione di F colla polare di O si ha il gruppo dei punti doppi per un fascio di C . Indichiamo con H la curva sezione di F colla hessiana, con T e T' le curve intersezioni di F colle polari di due punti O e O' , e con G il gruppo dei punti cuspidali della curva doppia di F . Avremo

$$(C)_x \equiv (HT) - 2G$$

$$(C)_i \equiv (TT') - G.$$

Si tratta di verificare che

$$(C)_x - 12(CC') \equiv 2\{(C)_i - (CC) - 2(CC')\} + 2[(C' - C)(C' - C)],$$

ossia

$$(C)_x \equiv 2(C)_i + 4(CC') + 2(C' C'),$$

e quindi che sussiste l'equivalenza dei gruppi di punti

$$(HT) \equiv 2(TT') + 4(CC') + 2(C' C').$$

A tal uopo si ricordi che

$$H = 4C + 4C',$$

$$T = 2C + C'$$

e

$$T' = 2C + C'.$$

Or dunque si deve verificare l'equivalenza

$$\{(4C + 4C')(2C + C')\} \equiv 2\{(2C + C')(2C + C')\} + \\ + 4(CC') + 2(C' C'),$$

che appare manifesta sviluppando i prodotti simbolici qui indicati.

In conclusione:

La serie invariante S_e da noi definita è il doppio della somma della serie di Severi e della serie canonica:

$$S_e \equiv 2(S_s + S_c).$$

Naturalmente anche la serie, virtualmente definita,

$$S_s + S_c,$$

di cui S_e è il doppio, costituirà una serie invariante per la superficie e godrà, come S_e , dell'invarianza assoluta: ciò risulta subito dal modo di variare in senso opposto delle due componenti, S_s e S_c , per l'introduzione di una curva eccezionale. Ma potrà darsi che, per qualche superficie, esista effettivamente S_e e non $S_s + S_c$, mancando ambedue o almeno una delle serie componenti.

Frattanto la circostanza che S_e si esprima come combinazione delle S_s e S_c , lascia presumere che in generale le serie invarianti sopra una superficie si riducano a due indipendenti, così come vi sono due caratteri numerici indipendenti; mentre vi è un solo sistema lineare invariante (il sistema canonico) ai cui multipli si riducono tutte le formazioni invarianti di questa natura ⁽¹⁾.

5. La questione fondamentale di calcolare la dimensione delle serie invarianti, o almeno un suo limite inferiore, e quindi — in particolare — di decidere quando esse abbiano un'esistenza effettiva, si presenta meno ardua di quel che *a priori* potrebbe aspettarsi. Per risolverla giova esaminare alcuni esempi.

Nel piano la S_s (come Severi ha osservato) è la serie delle terne di punti: $S_s = S_3$.

Invece la S_c vien data dalle intersezioni delle curve anticanoniche $C - C'$, cioè dalle cubiche: cosicchè $S_c = S_9$. La somma è la serie dei gruppi di 12 punti S_{12} , e la S_e è il doppio di questa serie.

Sopra la superficie generale del 4° ordine (le cui sezioni piane verranno designate con C) la serie S_s si costruisce a partire della serie dei gruppi jacobiani dei fasci (C):

$$(C)_j \equiv [(2C + C')(2C + C')],$$

togliendo

$$(CC) + 2(CC');$$

si avrà dunque

$$S_s \equiv [(2C + C')(C + C')] - (CC' - CC),$$

e poichè

$$|C|' = |C'|,$$

la serie S_s (d'ordine 24) verrà segnata sopra la superficie dalle sestiche intersezioni di una quadrica e di una cubica.

(1) La cosa si presenta come naturale estensione della costruzione e della dimostrazione d'invarianza data da ENRIQUES (per la serie canonica sopra le curve, 1899, e) per il sistema canonico sopra le superficie a partire dalla jacobiana di una rete di curve « Rendiconti Accademia di Torino », 1901. Il risultato si lascia prevedere *a priori* in base alla veduta, confortata da noti esempi, che per le superficie di moduli generali il numero-base di PICARD-SEVERI risulta eguale ad 1.

Siccome poi la serie canonica S_c è nulla, risulta

$$S_c = 2 S_s :$$

la S_c verrà segnata sopra la superficie del 4° ordine dalle curve d'ordine 12 intersezioni di una cubica con una superficie del 4° ordine.

Dal precedente esempio si può elevarsi alla costruzione delle serie invarianti, dapprima per le superficie d'ordine n qualunque, senza curva doppia, e poi per le superficie F dotate di curva nodale con un numero finito τ di punti cuspidali. Ma questa ricerca, e le osservazioni e i problemi che essa suggerisce, eccedono dai limiti della presente Nota.

Matematica. — *Sulle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la rappresentazione piana della superficie razionale a sezioni ellittiche dell'ottavo ordine.* Nota⁽¹⁾ del Socio F. ENRIQUES.

In una Memoria dei « Math. Annalen » (Bd. 49) del 1896, ebbi già a classificare le superficie razionali in ordine alle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la loro rappresentazione piana. In questa ricerca compare come uno dei tipi la superficie F_8 dell'ottavo ordine a sezioni ellittiche, che risponde al sistema lineare ∞^8 delle quartiche piane con due punti base doppi (A e B). Tale superficie io ritenni potersi rappresentare sul piano senza introdurre irrazionalità aritmetiche, avendo considerato come razionalmente dato il sistema ∞^2 delle coniche di essa che risponde alla rete delle rette (laddove esso è contenuto nel sistema ∞^3 che risponde a quello delle coniche per A e B). Il Severi ha avuto occasione di rilevare recentemente questa svista. Sorge ora la domanda:

Da quali irrazionalità aritmetiche dipende la rappresentazione piana della superficie F_8 ?

La risposta non è difficile, ma interessante per la semplicità del risultato. *La rappresentazione piana della F_8 si può far dipendere da tre radicali quadratici.*

All'uopo osserviamo:

1° La F_8 contiene due fasci di coniche rappresentati sul piano dai fasci di rette per A e B; le coniche di essi stanno in piani formanti due serie razionali, diciamo α e β .

2° Le due serie di piani α e β generano due varietà a tre dimensioni secanti uno S_4 secondo due curve razionali C_α e C_β .

3° Mediante un radicale quadratico (risoluzione d'un'equazione di 2° grado) si può separare le due curve C_α e C_β ; e l'introduzione di altri due

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

radicali quadratici serve a determinare due punti di esse, uno sopra ciascuna delle due curve. Dopo ciò avremo due coniche di F_8 secantisi in un punto razionalmente determinato della superficie.

4) Ora, essendo dato un punto di F_8 , la F_8 potrà proiettarsi dal relativo piano tangente sopra una superficie di Veronese, sulla quale saran pur dati razionalmente dei punti, e quindi rappresentarsi sul piano senza aggiunta di altre irrazionalità.

Meccanica. — *Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo circolare munito di un'appendice rettilinea indefinita.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota precedente ⁽²⁾ ho esposto un primo esempio di corrente traslocircolatoria piana in presenza di un ostacolo illimitato. Come già annunciai, in questa Nota tratto un altro esempio, meno semplice, ma non privo di interesse e che ha il vantaggio, sul precedente, che il modulo della velocità si mantiene sempre limitato. È da rilevarsi il comportamento delle linee di flusso, specialmente del *filone* [n. 3] e delle azioni dinamiche della corrente sul profilo circolare, che si manifestano con una resistenza diretta e un'azione sostentatrice [n. 4, formule (11)], la quale ultima ha un'intensità che è di 16/15 di quella che competerebbe al disco isolato, senza appendice, secondo il teorema di Kutta-Joukowski.

1. *Corrente circolatoria.* — Ponendo:

$$(1) \quad f_1 = \frac{1}{4} C \left(\sqrt{\frac{\bar{\chi}}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\chi}} \right),$$

con C e a costanti reali e $a > 0$, risulta definito nel piano $z = x + iy$ il potenziale cinetico $f_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ di una corrente piana circolatoria attorno a un profilo costituito dalla circonferenza $|\chi| = a$ e dalla semiretta $y = 0$, $x \geq a$ (fig. 1 e 2) ⁽³⁾. La costante C rappresenta la *circolazione* relativa al profilo circolare a partire dal punto $z = a$: è positiva nel verso indicato dalla fig. 1 e negativo in quello segnato nella fig. 2 ⁽⁴⁾.

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(2) CISOTTI, *Corrente traslocircolatoria piana che investe un'asta rettilinea indefinita*. Questi « Rend. », vol. XVI (2° sem. 1932), p. 465.

(3) ID., *Sulle azioni idrodinamiche in prossimità di salienti*. Questi « Rend. », vol. VIII (2° sem. 1928), p. 458.

(4) I disegni delle figure sono del prof. Masotti, a cui vanno i miei cordiali ringraziamenti.

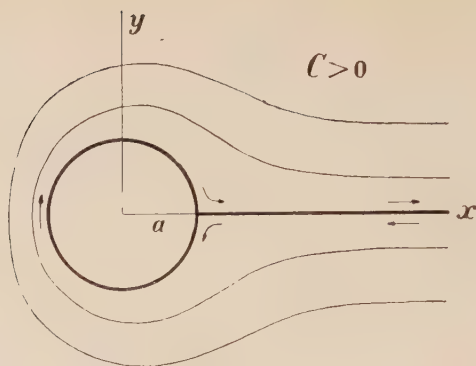


Fig. 1.

La velocità, complessa, è definita dalla seguente relazione:

$$(2) \quad w_1 = \frac{df_1}{d\zeta} = \frac{C}{8\zeta} \left(\sqrt{\frac{\zeta}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\zeta}} \right).$$

Da questa risulta il carattere locale della corrente, cioè evanescente per $\zeta \rightarrow \infty$. Il modulo della velocità è nullo per $\zeta = a$ e $\zeta \rightarrow \infty$ ed è sempre finito nel campo del moto (1).

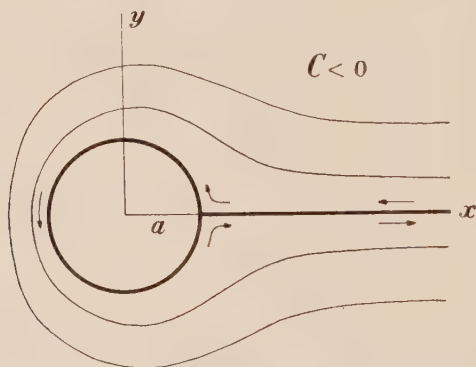


Fig. 2.

2. *Corrente traslatoria.* — La relazione

$$(3) \quad f_0 = -V \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right)$$

(1) A differenza del caso trattato nella Nota precedente a questa, in cui il profilo essendo costituito dalla sola asta rettilinea la velocità diviene infinita nel punto cuspidale. Può essere interessante notare che il modulo della velocità assume il massimo valore $\frac{C}{12\sqrt{3}a}$ per $\zeta = 3a$.

definisce, com'è notissimo, il potenziale cinetico di una corrente di velocità assintotica di valore V , parallela all'asse reale e di verso opposto. La corrispondente velocità, complessa, è definita dalla relazione

$$(4) \quad w_0 = \frac{df_0}{dz} = -V \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right).$$

È pure notissimo l'andamento delle linee di flusso ⁽¹⁾.

3. *Corrente traslocircolatoria.* — Colla posizione

$$(5) \quad f = f_0 + f_1 = -V \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{1}{4} C \left(\sqrt{\frac{z}{a}} + \sqrt{\frac{a}{z}} \right),$$

risulta definito il potenziale cinetico di una corrente traslocircolatoria, il cui andamento ci proponiamo di ricavare dalla precedente posizione. Ponendo $z = \rho e^{i\sigma}$, $f = \varphi + i\psi$, dalla (5), separando le parti, reale ed immaginaria, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi &= -V \left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \sigma + \frac{1}{4} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \cos \frac{\sigma}{2}, \\ \psi &= -V \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \sin \sigma + \frac{1}{4} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \sin \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Quest'ultima può altresì scriversi:

$$\psi = \left[-2aV \left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \cos \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{4} C \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{\rho}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right] \cdot \sin \frac{\sigma}{2}.$$

Scende da questa relazione che la linea di flusso $\psi = 0$ è costituita: della circonferenza $\rho = a$ e $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, delle semirette $\sigma = 0$, $\sigma = 2\pi$, $\rho \geq a$, e infine della linea di equazione

$$(6) \quad \left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \cos \frac{\sigma}{2} = \frac{C}{8aV},$$

che è il *filone*. Si noti che il punto

$$(7) \quad \rho = a, \quad \sigma = 2 \arccos \frac{C}{16aV}, \quad \text{se } \frac{|C|}{16aV} \leq 1,$$

è quello in cui il filone si stacca dal profilo rigido circolare: precisamente se $0 < C < 16aV$ il punto appartiene alla semicirconferenza superiore

(1) Cfr. ad es. CISORTI, *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini (1921), p. 115; nella fig. 43 il verso è opposto a quello che ora consideriamo.

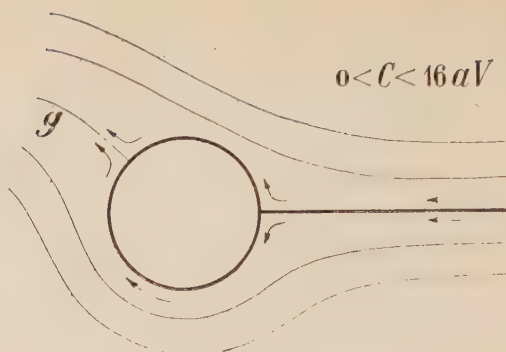


Fig. 3.

($\rho = a$, $0 < \sigma < \pi$, fig. 3); se $-16 aV < C < 0$ esso appartiene alla semicirconferenza inferiore ($\rho = a$, $\pi < \sigma < 2\pi$, fig. 4).

Se

$$\frac{|C|}{16 aV} > 1$$

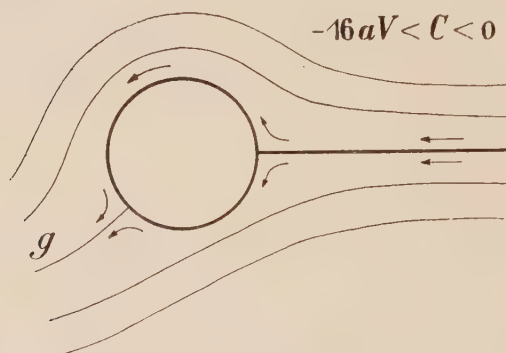


Fig. 4.

la (6) non è soddisfatta per nessun punto della circonferenza, il che significa che il filone non ha alcun punto comune colla predetta circonferenza. Poichè la (6) risolta rispetto a ρ fornisce

$$(6') \quad \rho = \frac{C^2}{128 aV^2 \cos^2 \frac{\sigma}{2}} - a + \frac{C}{8 V \cos \frac{\sigma}{2}} \sqrt{\frac{C^2}{256 a^2 V^2 \cos^2 \frac{\sigma}{2}} - 1},$$

dalla quale scende, per $\sigma = 0$ e $\sigma = 2\pi$:

$$\rho = \frac{C^2}{128 aV^2} - a \pm \frac{C}{8 V} \sqrt{\frac{C^2}{256 a^2 V^2} - 1},$$

valendo il segno $+$ per $\sigma = 0$ e il segno $-$ per $\sigma = 2\pi$. Ne segue che se $|C| > 16aV$ la (6') è soddisfatta per il valore di

$$(8) \quad \rho = \frac{C^2}{128aV^2} - a + \frac{|C|}{8V} \sqrt{\frac{C^2}{256a^2V^2} - 1}.$$

Ciò significa che per $|C| > 16aV$ il *filone* g si stacca dall'asta rettilinea nel punto precisato dalla (8): se $C > 16aV$ si stacca dal bordo superiore

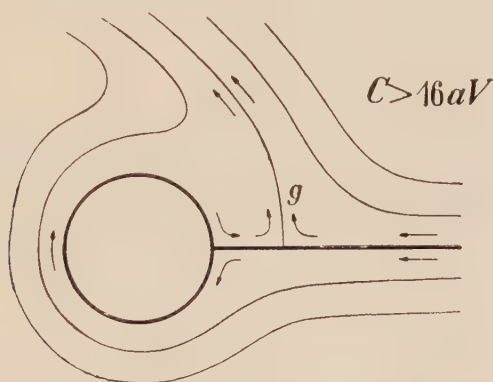


Fig. 5.

($\rho > a$, $\sigma = 0$; fig. 5); se $C < -16aV$ dal bordo inferiore ($\rho > a$, $\sigma = 2\pi$; fig. 6).

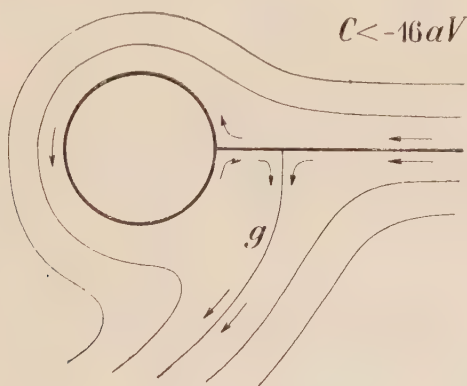


Fig. 6.

Per $|C| = 16aV$, la (6') diviene:

$$\rho = a \left(1 \pm \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}}{\cos \frac{\sigma}{2}} \right), \text{ valendo il segno } + \text{ se } C > 0, \text{ il segno } - \text{ se } C < 0.$$

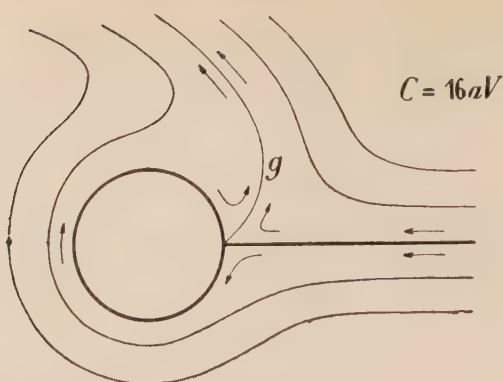


Fig. 7.

In tal caso il filone si stacca dal punto di saldatura del profilo circolare coll'asta: dalla parte del bordo superiore ($\rho = a$, $\sigma = 0$; fig. 7) se $C = 16aV$, dalla parte del bordo inferiore ($\rho = a$, $\sigma = 2\pi$; fig. 8) se $C = -16aV$.

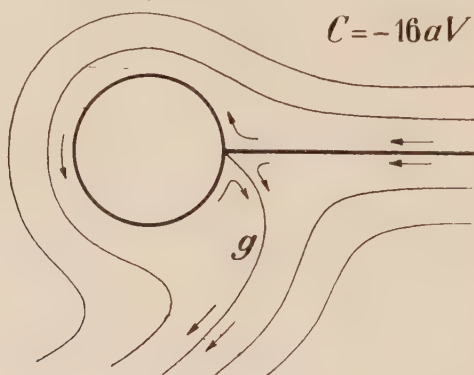


Fig. 8.

Per derivazione dalla (5), oppure direttamente dalle (2) e (4), la velocità risulta definita, in modo complesso, nel modo seguente:

$$(9) \quad w = \frac{df}{d\zeta} = w_0 + w_1 = -V \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) + \frac{C}{8\zeta} \left(\sqrt{\frac{\zeta}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\zeta}} \right).$$

Ponendo $\zeta = \rho e^{i\sigma}$, $\rho \geq a$, $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ si ottiene:

$$(9') \quad w = \frac{1}{\rho} e^{-i\sigma} \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{a}} e^{i\frac{\sigma}{2}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{-i\frac{\sigma}{2}} \right\} \left\{ \frac{C}{8} - aV \left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} e^{i\frac{\sigma}{2}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{-i\frac{\sigma}{2}} \right) \right\}.$$

Risulta che $w = 0$ nei punti $\rho = a$ e $\sigma = 0$; $\rho = a$ e $\sigma = 2\pi$, corrispondenti alla saldatura del cerchio coll'asta rettilinea, e inoltre quando è nulla l'espressione entro le ultime $\{ \}$, cioè quando

$$\left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \cos \frac{\sigma}{2} = \frac{C}{8aV} \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{\frac{\rho}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \sin \frac{\sigma}{2} = 0.$$

La prima di queste dice che il punto ulteriore in cui $w = 0$ appartiene al filone che ha per equazione la (6), e la seconda esprime che dev'essere $\rho = a$, oppure $\sigma = 0$ oppure $\sigma = 2\pi$: dunque $w = 0$ nel punto in cui il filone si stacca dalla parete rigida, sia che ciò avvenga dalla circonferenza, oppure dall'asta. Il filone si stacca dalle pareti rigide normalmente tranne nel caso in cui il distacco ha luogo nel punto di saldatura del disco coll'asta; in tal caso infatti il filone si stacca con un angolo di 45° sull'asta e sul profilo circolare.

Ponendo nella (9') $\rho = a$ si ottiene:

$$(10) \quad w = \left\{ \frac{C}{4a} - 4V \cos \frac{\sigma}{2} \right\} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)} \sin \frac{\sigma}{2}.$$

4. *Azioni dinamiche sul profilo circolare.* — Chiamando μ la densità costante del fluido, le note formule di Blasius consentono di determinare le componenti R_x e R_y della risultante delle pressioni dinamiche subite dal profilo circolare γ , nel modo seguente:

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \mu \int_{\gamma} w^2 d\chi,$$

effettuandosi l'integrazione nel senso antiorario. Portando nella precedente l'espressione (10) di w , con facili calcoli, si ottiene:

$$(11) \quad R_x = -\frac{\pi\mu C^2}{64a}, \quad R_y = -\frac{16}{15} \mu CV.$$

La prima è una resistenza diretta, la seconda un'azione sostentatrice, la cui intensità è $16/15$ di quella che competerebbe al disco isolato, cioè senza appendice: dunque munendo il disco di una lunga appendice rettilinea vi è presunzione di un aumento di portanza, relativa al solo disco.

Fisica. — *Su di un nuovo fenomeno fotoelettrico presentato da lamine metalliche.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Q. MAJORANA.

Ho ripreso lo studio sperimentale dell'azione di un raggio luminoso pulsante, su di una sottile lamina metallica, del quale studio ho già dato notizia in due recenti Note, presentate a questa Accademia. Ho accresciuto l'illuminamento della lamina, portandolo, nel caso della lampada intensiva ad incandescenza a più milioni di lux; ho perfezionato inoltre il congegno per la misura dello spostamento di fase ϕ , tra le pulsazioni della luce e quelle della resistenza elettrica della lamina.

Le conclusioni sperimentali a cui sono arrivato nelle Note citate sono così state in generale confermate e, solo in parte, leggermente modificate od ampliate. Così, si è riconosciuto che l'argento, pur presentando sensibilità selettiva per le $\lambda < 3000 \text{ \AA}$, è ancora abbastanza sensibile alle λ maggiori. Inoltre, tutti gli altri metalli sperimentati e già allora elencati (escluso sempre l'Al) presentano anche essi una discreta sensibilità per l'u. v., della quale non mi ero accorto nelle esperienze già descritte. Avverto per altro, che tale discriminazione è stata ancora fatta, come già si disse, semplicemente interponendo una lastra di vetro comune, sul percorso dei raggi della lampada a mercurio. Purtroppo la intensità luminosa necessaria all'esperimento è tale, che non si può pensare per ora a studiare il fenomeno mediante luce dispersa per es. da un prisma. Debbo dire inoltre, che uno studio preliminare della distribuzione della energia raggiante nello spettro della lampada a mercurio, compiuto con la pinza termoelettrica, mi ha fatto vedere che circa la metà di tale energia è concentrata verso le $\lambda < 3000 \text{ \AA}$. Questo fatto va tenuto presente, nel dare una corretta interpretazione a quanto da me è stato osservato.

Le ulteriori ricerche di cui qui riferisco, mi hanno fatto accertare, in modo che appare indubbio, la reale esistenza del nuovo fenomeno elettro-ottico o fotoelettrico, già da me sospettato nelle precedenti conclusioni. Tale fenomeno corrisponde ad un accrescimento della resistenza elettrica del metallo, sotto l'azione della luce; esso, data la sua natura, deve naturalmente manifestarsi con estrema prontezza come tutti gli altri della elettro-ottica. Esso, peraltro, si manifesta comunemente, frammisto con la nota variazione termica di resistenza; ma ho potuto discriminare con tre o quattro differenti metodi tali due effetti.

Primo metodo. — Ho sostituito all'azione del fascio di raggi periodicamente interrotto una fiamma manometrica, pulsante vivacemente sotto

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

l'azione di un suono di circa 500 vibrazioni a 1''. La lamina metallica, sostenuta al solito su vetro, viene accostata, sino quasi a lambirla, alla detta fiamma. Al telefono dell'amplificatore, montato come già si disse, non si ascolta così alcun suono; ma se ne ha una traccia quando la fiamma tocca addirittura la lamina, provocandone anzi (se questa è di Ag) la rottura o fusione. Difficilmente, mi sembra, si può mettere d'accordo questo fatto con la esclusiva ipotesi termica nelle già descritte esperienze, specialmente quando si pensi alla piccola quantità di calore ceduta dalle radiazioni, alla lamina metallica libera (cioè senza nerofumo). A parte ciò, non voglio dare a tale metodo di indagine che un carattere indiziario.

Più conclusivi sono i seguenti altri tre metodi; in essi mi sono servito per ora esclusivamente di vetri platinati, che più facilmente resistono alle varie operazioni di carattere meccanico, elettrico e termico.

Secondo metodo. — È quello che riguarda la misura della differenza di fase φ . Il perfezionamento introdotto consiste nell'ottenere mediante una vite micrometrica lo spostamento dell'alidada a cui è affidato il getto di mercurio (v. fig. 1 delle Note precedenti). Con ciò l'approssimazione con cui si misura φ si aggira intorno ai 2° d'arco. Con tale dispositivo, si è misurato φ in tre condizioni distinte della lamina di Pt, e cioè: lasciando la sua superficie libera; ricoprendola di nero fumo; facendo scivolare su di essa una corrente d'acqua. Quest'ultima condizione si è realizzata sovrapponendo alla lamina, alla distanza di 1 o 2 decimi di mm. una lamina di quarzo; nell'intercapedine così risultante, si fa scorrere l'acqua che, sotto la pressione della condotta stradale, può assumere la velocità massima di 16 m./sec.

A queste tre condizioni superficiali della lamina, così sostanzialmente diverse, corrispondono sovraelevazioni termiche differentissime, sotto l'azione della luce. Più propriamente la massima si ha per la lamina annerita; la minima per il caso della circolazione d'acqua a grande velocità. Si comprende perciò come così, l'effetto puramente termico debba presentarsi corrispondentemente al massimo ed al minimo. Il nuovo effetto fotoelettrico, se esiste, si presenterà viceversa al minimo o praticamente mancherà (per l'opacità del nerofumo) nel primo caso; coesisterà con quello termico per la lamina libera; potrà persino manifestarsi praticamente isolato, nel caso della circolazione d'acqua.

Ora, precisamente, la misura di φ nei vari casi permette di verificare tali previsioni. Ho già detto come tale misura si esegua compensando anzitutto l'intensità della corrente pulsante (per la variazione periodica della resistenza) mediante il descritto dispositivo potenziometrico; e poi regolando la posizione angolare del getto di mercurio. Ecco i risultati a cui sono pervenuto:

Lamina libera. — Usando la lampada di mercurio, si trova φ prossimo a 45° per frequenze del raggio luminoso intorno a 300; esso va affievo-

lendosi notevolmente per frequenze superiori a 700. Questa è dunque una prima prova della presenza dei due effetti; di cui, il termico ha predominio alle basse frequenze e va affievolendosi alle alte; lo spostamento ϕ nullo non può infatti corrispondere che ad un effetto *pronto*.

Lamina annerita. — Nettamente si ha, per qualunque frequenza, ϕ prossimo a 45° . Da ciò si deduce l'assenza dell'effetto fotoelettrico, ostacolato evidentemente dal nerofumo. Inoltre, il suono cessa al telefono se lo spessore di questo è eccessivo, cioè superiore alla lunghezza d'onda calorifica.

Lamina nell'acqua. — Qui ho adoperato una lampada a incandescenza da 1000 watt. Si trova ϕ prossimo a zero tanto con acqua ferma che in moto. Si ha perciò da fare solo con l'effetto fotoelettrico; e si comprende perciò che la presenza dell'acqua abbatta tutto o gran parte dell'effetto termico.

Terzo metodo. — Si adopera sempre la lampada ad incandescenza; è soppresso il congegno per la misura di ϕ , per cui, al telefono il suono è

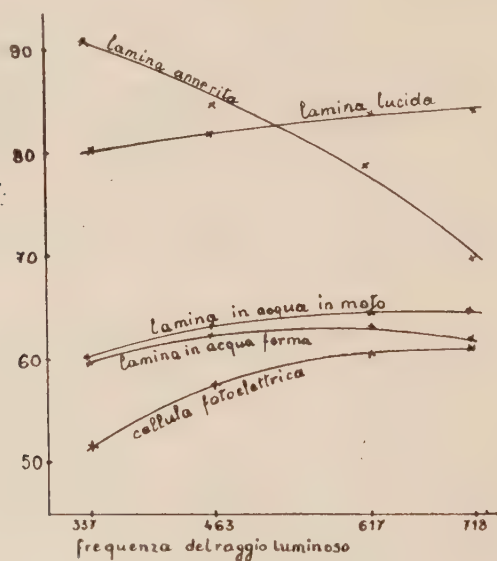


Fig. 1.

molto più puro mancando inevitabili perturbazioni prodotte dal getto di mercurio. Ma al telefono ho sostituito un sensibile amperometro a corrente alternata (10 microampere per divisione). Si leggono così le correnti in uscita dall'amplificatore, che sono dell'ordine di 1 ma. Facendo variare la velocità di rotazione del disco a fori, si costruiscono le curve della fig. 1, che fanno vedere per la lamina di Pt come vari la intensità della corrente amplificata con la frequenza. Oltre quattro di cotali curve, è segnata una quinta curva ottenuta sostituendo alla lamina di Pt una cellula

fotoelettrica al sodio; in tale caso la corrente che fa deviare l'amperometro è dovuta al classico fenomeno f. e. che certamente non è perturbato da alcun fatto termico.

È ora interessante osservare l'andamento delle cinque curve. Il maggior divario si ha tra quella del Pt annerito e quella della cellula fotoelettrica. L'andamento di quest'ultima è ascendente; e ciò non può essere dovuto che alla caratteristica complessiva dell'amplificatore (a tre stadi). Se questa fosse parallela all'asse delle frequenze, altrettanto avverrebbe per la curva tracciata.

La curva della lamina annerita è, per contro, cadente. Ciò fa sicuramente comprendere che l'effetto alternato termico della luce sul Pt va af-

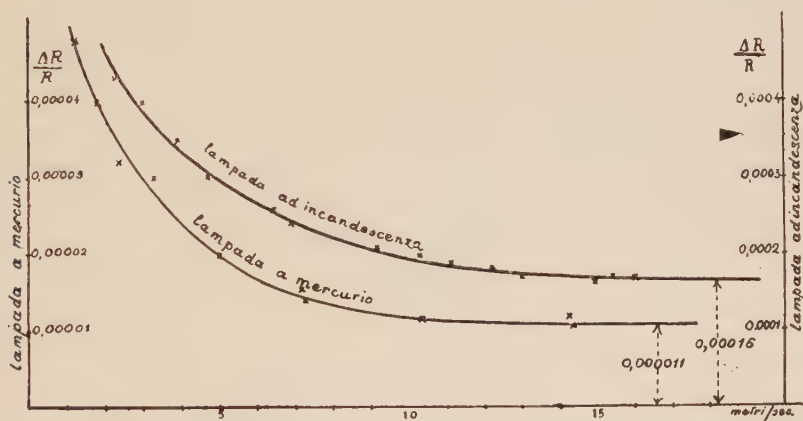


Fig. 2.

fievolendosi con la frequenza. E la pendenza della curva è anzi mitigata dal detto difetto dell'amplificatore.

Le altre curve corrispondenti al Pt in aria od in acqua hanno andamenti intermedi. Ciò si spiega, ammettendo che l'effetto termico della luce è sovrapposto al nuovo effetto fotoelettrico, che, come quello classico, tenderebbe a rendere ascendente la curva. Particolarmente si deve ammettere che l'effetto termico è più marcato per le basse frequenze.

Quarto metodo. — In questo metodo si abbandona del tutto l'uso dell'amplificatore e della luce pulsante; e si procede alla misura diretta della variazione di resistenza provocata dalla luce, cercando di eliminare l'effetto termico con la energica corrente d'acqua. Il dispositivo consiste in un comune ponte di Wheatstone che permette di apprezzare con una deviazione, su scala, di circa un metro, una variazione di $1/500$ della resistenza della lamina (46 ohm). Su questa si fa cadere la luce della lampada a mercurio o di quella ad incandescenza, e si costruiscono così i diagrammi della fig. 2, facendo variare la velocità dell'acqua sulla lamina (si deduce tale

velocità dalla portata di efflusso e dalle dimensioni dell'intercapedine già accennata).

Tali diagrammi sono disegnati in iscale diverse, perchè l'effetto della lampada ad incandescenza è assai diverso di quello della lampada a mercurio. Le due curve sono assintotiche ciascuna ad un asse spostato parallelamente a quello delle velocità; e cioè di $\Delta R/R = 0.000011$ per la lampada a mercurio e di $\Delta R/R = 0.00016$ per quella a incandescenza. Tali valori, che non hanno peraltro importanza assoluta (dipendendo essi dalle particolari intensità luminose usate), sono coincidenti come ordine di grandezza con quelli a cui si perviene mediante il dispositivo per la misura di φ , quando questo tende a zero.

Concludendo, si rileva come i descritti tre ultimi metodi quantitativi, per la separazione dei due effetti, abbiano dato risultati concordi, sia per senso che per ordine di grandezza. Per cui, appare come definitivamente provata la esistenza del nuovo fenomeno fotoelettrico da parte di sottili lamine metalliche sottoposte all'azione della luce; ciò vale per ora, per il platino, col quale metallo si è sperimentato. Mi riservo di riferire su esperienze con altri metalli. E con tutta probabilità, l'effetto qualitativo, sostanzialmente già intravisto nelle mie primitive ricerche, deve verificarsi anche per essi, facendo riserva per l'alluminio e forse per altri non ancora mai sottoposti ad esperienza.

Chimica (Chimica biologica). — *Presenza nelle cellule del tessuto adiposo di una deidrogenasi attiva su gli acidi grassi superiori* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ del Corrisp. G. QUAGLIARIELLO.

In una Nota precedente ⁽³⁾ ho riferito alcune ricerche dalle quali risulta che nella bile è contenuta una deidrogenasi che agisce sugli acidi grassi superiori. Guidato da osservazioni fatte in precedenti ricerche e da considerazioni teoriche che non è qui il caso di esporre, ho ricercato se un enzima della stessa natura esistesse nelle cellule del tessuto adiposo. La ricerca è stata condotta nel seguente modo:

Del tessuto adiposo (sottocutaneo ed omento di cane) viene tagliuzzato con le forbici e pestato in mortaio con sabbia quarzosa. La poltiglia viene estratta per un'ora in agitatore meccanico con circa 10 parti di miscela di fosfati a pH 7,5; satura di toluolo.

L'estratto, centrifugato e liberato dal grasso che si separa in superficie, viene introdotto in un grande apparecchio di Barcroft che si riempie di os-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Biologica della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

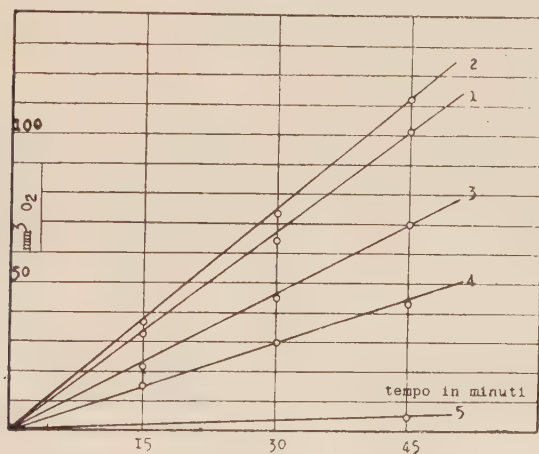
(3) Questi « Rendiconti ».

sigeno. L'apparecchio è mantenuto per una intera notte in continua agitazione in termostato a 37°C .

L'assorbimento di ossigeno, assai forte all'inizio, dopo 14 ore di agitazione viene ridotto in limiti molto modesti.

Con l'estratto in tal modo trattato, vengono preparate, in cinque piccoli apparecchi di Barcroft, le seguenti miscele:

1. Estratto cc 3 ; acqua cc 2.
 2. » » 3 ; soluzione 0,5 % stearato sodico cc 1 ; acqua cc 1.
 3. » » 3 ; acqua cc 2 ; difenilammina mg 3.
 4. » » 3 ; soluzione 0,5 ‰ di fluoruro sodico cc 2.
 5. » » 3 ; soluzione 0,0125 mol. di acido cianidrico cc 2.
- Un 6° apparecchio serve come termobarometro.



Curva 1: Estratto cc 3 ; acqua cc 2.

- » 2: » » 3 ; soluzione 0,5 % stearato sodico cc 1 ; acqua cc 1.
» 3: » » 3 ; acqua cc 2 ; difenilammina mg 3.
» 4: » » 3 ; soluzione 0,05 ‰ di fluoruro sodico cc 2.
» 5: » » 3 ; soluzione 0,0125 mol. di acido cianidrico cc 2.

Gli apparecchi, contenenti aria, vengono introdotti e agitati nel termostato a 37° , e ad equilibrio termico raggiunto, si cominciano a registrare le variazioni di volume.

Il risultato dell'esperienza è graficamente rappresentato nella figura.

L'assorbimento di ossigeno nell'apparecchio n. 1, contenente solo estratto, può essere dovuto sia all'ossidazione dei doppi legami ancora esistenti negli acidi grassi presenti nell'estratto, sia, supposta l'esistenza di una deidrogenasi, a formazione di nuovi doppi legami, o, infine, allo svolgersi simultaneo di tutti e due i processi.

Il fatto che l'aggiunta all'estratto (apparecchio n. 2) di un po' di stearato sodico, di una sostanza cioè capace di essere deidrogenata ma non di-

rettamente ossidata, produce un aumento nell'assorbimento dell'ossigeno, dimostra che nel sistema si svolgono certamente processi deidrogenativi, che l'ossigeno consumato serve, cioè, almeno in parte, come accettore d'idrogeno.

Nell'apparecchio n. 3, per la presenza di un antiossigeno, quale è la difenilammina ⁽¹⁾, i processi di autossidazione dei composti insaturi devono essere quasi completamente soppressi: il consumo di ossigeno si mantiene tuttavia elevato (70 % circa in confronto dell'apparecchio n. 1) confermando così l'esistenza di processi deidrogenativi.

Nell'apparecchio n. 4 dovrebbero essere i processi deidrogenativi ad essere più o meno inibiti, se la deidrogenasi del tessuto adiposo, come la succinodeidrogenasi dei muscoli ⁽²⁾ e quella degli acidi grassi superiori contenuta nel fegato ⁽³⁾, è inibita dai fluoruri. E infatti vediamo che la fissazione di ossigeno si abbassa sino al 45 %.

La somma dell'ossigeno fissata nell'apparecchio n. 3, in cui è inibita la ossidazione dei doppi legami, e di quello fissato nell'apparecchio n. 4, in cui è inibita la deidrogenazione, è di poco superiore (115 mm³) all'ossigeno fissato nell'apparecchio n. 1 (100 mm³) in cui si svolgono tutti e due i processi, evidentemente perchè l'inibizione non è completa.

Nell'apparecchio n. 5, infine, in cui è contenuto cianuro potassico alla concentrazione 0,005 molare, l'assorbimento di ossigeno è praticamente nullo. Questo comportamento si intende agevolmente; a concentrazione tanto elevata, l'acido cianidrico non solo inibisce i processi deidrogenativi (ved. mia Nota precedente), ma anche l'ossidazione dei doppi legami.

In conclusione, mi sembra che le esperienze riferite dimostrino la esistenza nel tessuto adiposo di un enzima deidrogenante gli acidi grassi superiori.

(1) RONA, ASMUS e STEINECK, *Beiträge zur Kenntniss der Autoxydation von Doppelbindungen*, « Bioch. Zeit. », 250, 148 (1932).

(2) OPPENHEIMER, *Die Fermente*, 2^a ed., 1926, vol. 2, p. 1712.

(3) Ricerche inedite.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla serie canonica d'una superficie algebrica.*
Nota⁽¹⁾ di A. COMESSATTI, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. In due recenti Memorie, il Severi ha posto i fondamenti d'una teoria delle serie di gruppi di punti d'una superficie algebrica⁽²⁾, iniziando così un indirizzo, il cui successo non può deludere l'aspettativa con cui i cultori della geometria algebrica ne attendevano la comparsa.

Nella nuova teoria ha un posto segnalato la nozione di *serie canonica*. Questa vien definita dal Severi come la *serie principale d'equivalenza* (effettiva o virtuale) alla quale appartengono tutti i gruppi del tipo

$$(1) \quad J - (A, A) - 2(A, A'),$$

indicandosi con A una curva della superficie F in discorso, variabile in un sistema lineare infinito, con A' una sua aggiunta, con J il gruppo jacobiano (gruppo dei punti doppi) d'un fascio di curve A , ed attribuendosi ad (A, A) , (A, A') il corrente significato di simboli d'intersezione. Si tratta d'una serie invariante (relativa) d'ordine $I + 4$, essendo I l'invariante di Zeuthen-Segre della F .

Trovandomi presente ad una breve comunicazione del Severi sull'argomento, tenuta al recente Congresso internazionale dei matematici in Zurigo, mi sovvenne poco appresso d'essermi imbattuto nello stesso carattere $I + 4$ in una questione d'altra natura, ma però con un significato, che, ravvicinato alle nuove concezioni del Severi, conduceva quasi naturalmente alla considerazione d'una serie invariante. Si tratta di questo:

Introdotta la varietà V immagine delle coppie (ordinate) di punti della F , si consideri in essa la superficie Ω , birazionalmente identica ad F , che ivi rappresenta le coppie di punti coincidenti (la corrispondenza identica). Entro la riemanniana ad otto dimensioni di V la Ω resta rappresentata da un ciclo quadridimensionale, che pertanto, combinato con se stesso, dà luogo ad un indice di Kronecker $[\Omega, \Omega]$ finito (o nullo). Orbene il calcolo mostra che tale indice vale precisamente $I + 4$ ⁽³⁾.

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(2) F. SEVERI, a) *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* [«Comm. Math. Helvetici», vol. 4° (1932), pp. 268–326]; b) *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* [«Mem. Acc. d'Italia», vol. III (1932), matem. n. 5].

(3) Non ci tratteniamo sui dettagli del calcolo; e nell'occasione avvertiamo che rinviamo lo sviluppo di molti dettagli (segnatamente del n. 5) ad uno scritto più ampio,

Poichè il teorema di Lefschetz circa l'eguaglianza fra il numero algebrico (indice di Kronecker) ed il numero aritmetico delle intersezioni, sussiste anche per le V_2 d'una V_4 , ne consegue che $I + 4$ è il *grado virtuale* della Ω in V , cioè l'ordine della relativa *serie caratteristica*, opportunamente definita quale serie principale (nel senso di Severi) sulla Ω , quindi su F . Tale serie caratteristica è pertanto anch'essa una serie invariante d'ordine $I + 4$; e da ciò ad identificarla colla serie canonica è breve il passo.

Mi propongo di assodare rigorosamente tale identità, già affermata, a titolo di previsione, allo stesso Congresso di Zurigo. Ne resta acquisito, per la serie canonica di Severi, un nuovo interessante significato, espresso dal teorema seguente:

Data una superficie algebrica F , sia V la varietà immagine delle coppie ordinate dei suoi punti, Ω la superficie, birazionalmente identica ad F , che rappresenta le particolari coppie costituite da punti coincidenti. La serie caratteristica di questa Ω entro V (trasportata, se si vuole, su F) è la serie canonica di Severi.

2. Non sarà inopportuno, avanti di procedere alla dimostrazione, considerare brevemente la questione analoga, nel caso delle curve. Sia C una curva algebrica (irriducibile) di genere p , in relazione alla quale V ed Ω abbiano significati analoghi ai precedenti. È intanto noto che il *grado virtuale* della curva Ω in V vale $-(2p - 2)^{(1)}$; onde, nell'ordine d'idee prospettato, è da prevedersi che la *serie caratteristica* di Ω dovrà identificarsi colla relativa *serie anticanonica* $|-K|$ (virtuale se $p > 1$).

La conferma si raggiunge facilmente. Prendasi in V un sistema lineare $|G|$ di curve, che contenga parzialmente Ω , e sia $|H|$ il sistema residuo. Denotando col simbolo (Ω, Ω) un gruppo caratteristico, si avrà $(\Omega, \Omega) \equiv \equiv (\Omega, G) - (\Omega, H)$.

Sulla C le curve G, H son rappresentate da certe corrispondenze algebriche, ed $(\Omega, G), (\Omega, H)$ dai gruppi delle relative coincidenze; inoltre il fatto che G varia in un sistema lineare, porta di conseguenza che i due gruppi X, Y formati dagli omologhi d'un fissato punto P di C in una G e nella sua inversa, variano entro serie lineari determinate, così essendo pure degli analoghi gruppi X', Y' relativi ad una H . Infine per essere le H residue dell'identità rispetto alle G , si ha che $X' \equiv X - P, Y' \equiv Y - P$.

Aggiungiamo ora l'ipotesi, del tutto lecita, che $|G|$ sia un sistema lineare di *curve a valenza* γ ; allora anche $|H|$ è un sistema analogo colla valenza $\gamma' = \gamma + 1$, ed il principio di Cayley-Brill (nell'interpretazione funzionale di Severi) porge $(\Omega, G) \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma P, (\Omega, H) \equiv X' + Y' + \gamma' K + 2\gamma' P$. Tenendo conto delle espressioni di X', Y', γ' la se-

(1) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica* [Bologna, Zanichelli, 1926], n. 86. Questo carattere si calcola anche agevolmente per via topologica (cfr. n. 6).

conda equivalenza si trasforma nella $(\Omega, H) \equiv X + Y + (\gamma + 1)K + 2\gamma P$, e sottratta dalla prima porge appunto $(\Omega, \Omega) \equiv -K$, come si era previsto.

3. Tornando al problema principale, occupiamoci anzitutto della *definizione di serie caratteristica* d'una superficie Ω in una V_4 . Non volendo fare alcuna ipotesi circa la possibilità di variare della Ω , tanto più in vista della circostanza, che, appunto nel nostro caso, la Ω è isolata (salvo quando F possieda un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè) ci porremo, com'è naturale, nella scia della nota definizione di Severi relativa alle curve⁽¹⁾.

Preso a considerare in V_4 un sistema algebrico irriducibile $\{G\}$ di superficie, che soddisfi alle condizioni seguenti:

a) La generica G sega Ω in un gruppo (Ω, G) d'un numero finito di punti variabile su Ω in una serie principale d'equivalenza⁽²⁾;

b) Esiste qualche G contenente parzialmente Ω ; sia \bar{G} una fra queste spezzata in $\Omega + \bar{H}$;

c) La superficie \bar{H} appartiene totalmente ad un sistema irriducibile $\{H\}$ la cui superficie generica sega pure Ω in un gruppo (Ω, H) d'un numero finito di punti, variabile in una serie principale;

definiremo quale *serie caratteristica* di Ω in V_4 la serie principale (effettiva o virtuale) differenza delle due serie principali $|(\Omega, G)|$, $|(\Omega, H)|$, e conformemente, introducendo anche ora per il gruppo generico della serie caratteristica il simbolo (Ω, Ω) , scriveremo $(\Omega, \Omega) \equiv (\Omega, G) - (\Omega, H)$.

Naturalmente la definizione ha senso soltanto se gli elementi discrezionali che vi intervengono non hanno influenza sull'ente definito. La prova di ciò non è difficile, e la rinviemo ad un'esposizione più dettagliata.

Aggiungiamo un'osservazione a riguardo della c). Tal condizione si è introdotta per evitare la considerazione di *gruppi eccezionali* come (Ω, \bar{H}) che contengono infiniti punti; dovendosi avvertire che quando la G variabile in $\{G\}$ viene a spezzarsi, la connessione con Ω resta mantenuta lungo una *curva*. Comunque per l'adeguamento alle condizioni a), b), c) rimane una larga arbitrarietà.

Notiamo infine che le condizioni imposte ai gruppi (Ω, G) (Ω, H) sono certo soddisfatte se ciascuno dei sistemi $\{G\}$, $\{H\}$ è contenuto in un *sistema principale d'equivalenza* di superficie della V_4 ⁽³⁾. Questa però è una restrizione del tutto superflua, che nei casi pratici potrebbe imporre delle inutili verifiche.

(1) F. SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui*, ecc. [«Atti Acc. Torino», vol. 39 (1903-04), pp. 490-506].

(2) La nozione di serie principale può venir presa tanto in senso ristretto (*serie razionali*) quanto in quello più lato (*serie unirazionali*) della Memoria (2) b) del SEVERI.

(3) Il SEVERI, generalizzando il tema principale, ha anche introdotto le nozioni di *sistemi d'equivalenza* per le V_m d'una V_n (Memoria (2) b), n. 38).

4. Volendo costruire, in base alla definizione del numero precedente la serie caratteristica sulla nostra Ω del n. 1, convien fare, senz'altro, riferimento alla F , tenendo presente che ogni superficie G della varietà V delle coppie di punti è ivi rappresentata da una corrispondenza algebrica (che continueremo ad indicare allo stesso modo) ed (Ω, G) dal relativo gruppo delle coincidenze.

Il problema offre qualche difficoltà, non soltanto perchè occorre trovare dei sistemi $\{G\} \{H\}$ di corrispondenze per cui sian soddisfatte le condizioni $a)$, $b)$, $c)$; ma anche, e specialmente, perchè occorre che i relativi gruppi di coincidenze sian determinabili funzionalmente, cioè mediante espressioni in termini di opportune, e, in certo senso, tipiche, serie principali della superficie; giacchè lo scopo a cui si mira, è quello di ottenere per il gruppo (Ω, Ω) un'espressione che s'identifichi colla (1) .

Le corrispondenze G da me considerate, sono ciascuna somma di una L fissa, e di una M variabile in un sistema $\{M\}$ definito in modo semplicissimo, e soddisfacente alle condizioni $a)$, $b)$; in modo preciso, per ciò che concerne la $b)$, v'ha in $\{M\}$ una particolare operazione $\bar{M} (= \Omega + N)$ che contiene come parte l'identità Ω . L'aggiunta della corrispondenza fissa L ha lo scopo di render possibile l'adeguamento alla condizione $c)$; giacchè, mentre non si riesce, col far variare la sola N , a far sparire la relativa curva di coincidenza, ciò è possibile per la $N + L$, col farla muovere in un sistema $\{H\}$ opportuno. E, colle notazioni ora introdotte, si avrà

$$(2) \quad (\Omega, \Omega) \equiv (\Omega, M) + (\Omega, L) - (\Omega, H).$$

5. Andiamo a precisare le definizioni delle M, L, H , e quel che riguarda le loro coincidenze, senza però trattenerci sulle deduzioni.

Assunta la F d'ordine n in S_3 , priva di punti multipli, ed indicata con A una sua sezione iperpiana generica, sia π un piano, pure generico, dell'ambiente, ω un'omografia nella stella di S_3 coll'asse π . La corrispondenza M (variabile con ω in $\{M\}$) si definirà assumendo come omologhi (nell'ordine) due punti P e P' di F allorchè gli $S_3(\pi, P)$ (π, P') si corrispondono in ω . I suoi punti uniti cadono nelle intersezioni con F di tre S_3 della stella (π) , quindi

$$(3) \quad (\Omega, M) \equiv 3(A, A).$$

Quando l'omografia ω si riduce all'identità, la M si spezza nell'identità Ω di F e nella corrispondenza simmetrica N (che convien più specificamente indicare con N_π) in cui sono omologhi due punti di F quando stanno in uno stesso S_3 di (π) , cioè quando la loro congiungente si appoggia a π . Essa ha una curva di coincidenza, luogo dei punti di contatto delle tangenti di F appoggiate a π .

Fissato in S_5 un altro piano generico σ , dal quale resta individuata una corrispondenza N_σ analoga ad N_π , porremo $L = N_\pi \cdot N_\sigma$. La corrispondenza L così definita ha un numero finito di coincidenze, il cui gruppo è caratterizzato dall'equivalenza

$$(4) \quad (\Omega, L) \equiv J + D + \Gamma + 2(n-2)(A, A) - (A, A'),$$

dove J ed A' hanno il significato del n. 1, D è il gruppo dei punti d'appoggio su F delle corde uscenti da un punto (*punti doppi impropri* della proiezione in S_4) e Γ il gruppo dei punti di contatto delle tangenti appoggiate ad una retta (*punti cuspidali* della proiezione in S_3), gruppi tutti variabili in serie principali ben determinate.

Per far variare $N_\pi + L$ in modo che il gruppo delle sue coincidenze si riduca a contenere un numero finito di punti, si fissi in S_5 un terzo piano, pure generico, π' , ed un'omografia biassiale τ cogli assi π, π' ; indi, indicati con P_1, P_2, \dots, P_{n-1} gli omologhi d'un punto P di F in N_π , e con $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}$ i loro trasformati mediante τ , si proiettino quest'ultimi da σ sulla F . Si ottengono così $n(n-1)$ punti, che assumeremo come omologhi di P in una corrispondenza H , variabile con τ in un sistema $\{H\}$. Manifestamente, quando τ tende all'identità, H tende ad $N_\pi + L$; inoltre si trova che il gruppo delle sue coincidenze varia nella serie principale precisata dalla

$$(5) \quad (\Omega, H) \equiv D + \Gamma + 2n(AA) + (AA').$$

Ora non resta più che sostituire nel 2° membro della (2) al posto di $(\Omega, M) (\Omega, L) (\Omega, H)$ le espressioni (3) (4) (5) ottenute. Con ciò quel 2° membro si riduce ad (1), e questo prova il nostro teorema.

6. Il nuovo significato acquisito alla serie canonica d'una curva e d'una superficie, conduce spontaneamente ad estenderne la nozione alle *varietà algebriche ad n dimensioni* V_n .

Introdotta la V_{2n} immagine delle coppie ordinate di punti di V_n , e considerata in essa la Ω , birazionalmente identica a V_n , che rappresenta le coppie di punti coincidenti, si definirà quale *serie canonica* (di gruppi di punti) di V_n , la *serie caratteristica* od *anticaratteristica* di Ω in V_{2n} , a seconda che n è pari o dispari, trasportata poi su V_n . L'ordine ν di questa serie può determinarsi topologicamente, valutando, entro la riemanniana di V_{2n} , l'indice di Kronecker $[\Omega, \Omega]$; si trova $[\Omega, \Omega] = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i R_i$, dove R_i sono i numeri di Betti (ordini di connessione) della riemanniana di V_n ($R_0 = R_{2n} = 1$, $R_{n+i} = R_{n-i}$), quindi $\nu = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^{n-i} R_i = R_n - 2R_{n-1} + 2R_{n-2} + \dots + 2(-1)^n R_0$. Introducendo l'invariante di

Zeuthen-Segre I_n di $V_n^{(1)}$ e tenendo conto della relazione che lo lega ai numeri di Betti (2) , si trova in definitiva la semplice espressione

$$(6) \quad v = I_n + 2(-1)^n n,$$

che in particolare per $n = 1, 2$ ($I_1 = 2p$, $I_2 = I$) riporta ai valori noti $2p - 2$, $I + 4$.

Matematica. — *Su di un'equazione trascendente della statica.*
Nota (3) di F. TRICOMI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota pubblicata in questi stessi « Rendiconti » (4) il professore G. KRALL si occupa dell'interessante problema della determinazione dei carichi critici per un'asta sollecitata di punta, uniforme salvo un'« intaccatura », vale a dire tale che il momento d'inerzia della sua sezione trasversa sia costante ed uguale ad un certo J_0 , tranne in un breve tratto in cui si riduce all'altro valore, pure costante, $J < J_0$. L'A., supponendo l'asta libera agli estremi, mostra come i suaccennati carichi critici P_k possano calcolarsi per mezzo della formula

$$(1) \quad P_k = \frac{EJ_0}{L^2} \lambda_k^2,$$

dove L è la lunghezza dell'asta, E il suo modulo d'elasticità e λ_k una delle radici dell'equazione trascendente in λ

$$(2) \quad D(\lambda) = \begin{vmatrix} \sin \lambda \xi_1 & 0 & \sin \lambda j \xi_1 & -\cos \lambda j \xi_1 \\ \cos \lambda \xi_1 & 0 & j \cos \lambda j \xi_1 & j \sin \lambda j \xi_1 \\ 0 & \sin \lambda (1 - \xi_2) & \sin \lambda j \xi_2 & -\cos \lambda j \xi_2 \\ 0 & -\cos \lambda (1 - \xi_2) & j \cos \lambda j \xi_2 & j \sin \lambda j \xi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

essendosi posto

$$\frac{J_0}{J} = j^2, \quad \frac{x_1}{L} = \xi_1, \quad \frac{x_2}{L} = \xi_2,$$

(1) C. SEGRE, *Intorno al un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* [« Atti Accad. Torino », vol. 31 (1896), pp. 485-501].

(2) J. W. ALEXANDER, *Sur les cycles des surfaces algébriques*, ecc. [Questi « Rendiconti », vol. XXIII (2° sem. 1914), pp. 55-62].

(3) Pre sentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(4) *Intorno ai carichi di punta*, ecc. [« Rend. Lincei », (6), 11 (1930¹), pp. 564-567]. In una successiva Nota [*Ibidem*, pp. 745-748] la ricerca fu poi estesa al caso di un'asta di tipo qualunque.

con x_1 e x_2 ascisse (contate lungo l'asse dell'asta in condizione naturale, a partire da uno degli estremi) del principio e della fine dell'intaccatura.

« Rinunciando alla ricerca delle radici (pur permettendoci di segnalarne l'interesse) di siffatta equazione » — aggiunge il Krall — « passiamo ora ad indicare la soluzione offerta dalla teoria delle equazioni integrali » che invero, abilmente maneggiata, gli permette anzitutto di dimostrar subito l'esistenza d'infiniti *autovalori* (radici della [2]) reali e positivi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, e successivamente di ricavare il seguente valore approssimato dell'autovalore minimo λ_1 , ch'è il solo veramente interessante per la tecnica:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \cong \frac{1}{\pi^2} + (j^2 - 1) \left[(1 - \xi_1) \xi_1 \delta + \frac{\delta^2}{2} \left(1 - 2 \xi_1 - \frac{2}{3} \delta \right) \right],$$

con

$$(3) \quad \delta = \xi_2 - \xi_1,$$

donde, nel caso di un'intaccatura in mezzeria ($\xi_1 = \frac{1 - \delta}{2}$), si deduce, a meno di termini dell'ordine di δ^2 , che

$$(4) \quad P_1 = \frac{E J_0 \pi^2}{\left(L + \frac{\pi^2}{8} \frac{J_0 - J}{J} d \right)^2}$$

con

$$d = L \delta = x_2 - x_1,$$

formula « non molto diversa » (perchè $\pi^2/8$ non differisce molto da 1) da una, intuitivamente ricavata dal Föppl:

$$(5) \quad P_1 = \frac{E J_0 \pi^2}{\left(L + \frac{J_0 - J}{J} d \right)^2}$$

e citata dal Krall.

Nella presente Nota, seguendo l'implicito suggerimento di Krall, mi son proposto di discutere direttamente l'equazione trascendente (2), indicando dei metodi per la determinazione approssimata delle sue radici. Pervengo così, fra l'altro, a dimostrare che, a meno di termini dell'ordine di δ^2 , vale la formula

$$(6) \quad P_1 = \frac{E J_0 \pi^2}{\left(L + d \frac{J_0 - J}{J} \sin^2 \pi \xi_1 \right)^2}$$

la quale, nel caso dell'intaccatura in mezzeria, si riduce sostanzialmente alla (5) che quindi è, nell'indicato ordine d'approssimazione, esatta e come tale da preferirsi alla (4).

2. Sviluppando il determinante che costituisce il primo membro della (2) pei minori contenuti nelle prime due colonne, si ha

$$\begin{aligned} D(\lambda) = & -j^2 \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda (1 - \xi_2) \sin j\lambda (\xi_2 - \xi_1) + \\ & + j \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda (1 - \xi_2) \cos j\lambda (\xi_2 - \xi_1) + \\ & + j \cos \lambda \xi_1 \sin \lambda (1 - \xi_2) \cos j\lambda (\xi_2 - \xi_1) + \\ & + \cos \lambda \xi_1 \cos \lambda (1 - \xi_2) \sin j\lambda (\xi_2 - \xi_1) = 0, \end{aligned}$$

da cui, dividendo per $\cos \lambda \xi_1 \cos \lambda (1 - \xi_2) \cos j\lambda (\xi_2 - \xi_1)$, segue

$$[1 - j^2 \operatorname{tg} \lambda \xi_1 \operatorname{tg} \lambda (1 - \xi_2)] \operatorname{tg} j\lambda (\xi_2 - \xi_1) + j [\operatorname{tg} \lambda \xi_1 + \operatorname{tg} \lambda (1 - \xi_2)] = 0$$

ovvero, dividendo per la prima parentesi,

$$\operatorname{tg} j\lambda (\xi_2 - \xi_1) + \frac{j \operatorname{tg} \lambda \xi_1 + j \operatorname{tg} \lambda (1 - \xi_2)}{1 - j^2 \operatorname{tg} \lambda \xi_1 \operatorname{tg} \lambda (1 - \xi_2)} = 0.$$

Osserviamo ora che, se momentaneamente indichiamo con μ_1 e μ_2 due archi tali da aversi rispettivamente

$$j \operatorname{tg} \lambda \xi_1 = \operatorname{tg} \mu_1, \quad j \operatorname{tg} \lambda (1 - \xi_2) = \operatorname{tg} \mu_2,$$

la frazione che figura nella precedente equazione si riduce a $\operatorname{tg} (\mu_1 + \mu_2)$, di guisa che l'equazione stessa potrà interpretarsi dicendo che la differenza fra $j\lambda (\xi_2 - \xi_1)$ e $-(\mu_1 + \mu_2)$ dev'essere un multiplo intero di π ; dunque l'equazione fondamentale potrà scriversi sotto la forma

$$j\lambda (\xi_2 - \xi_1) + \operatorname{arctg} (j \operatorname{tg} \lambda \xi_1) + \operatorname{arctg} [j \operatorname{tg} \lambda (1 - \xi_2)] = k\pi$$

con k numero intero qualsiasi, ovvero, avvalendosi della posizione (3) ed osservando che, data l'arbitrarietà di k , non è restrittivo riferirsi a particolari determinazioni degli archi tangente:

$$(7) \quad j\delta\lambda_k + \overline{\operatorname{arctg}} (j \operatorname{tg} \lambda_k \xi_1) + \overline{\operatorname{arctg}} [j \operatorname{tg} \lambda_k (1 - \xi_2)] = k\pi,$$

dove col simbolo $\overline{\operatorname{arctg}}$ s'intende denotare la determinazione dell'arco tangente ottenuta proseguendo per continuità quella nulla nell'origine, e dove si è scritto λ_k in luogo di λ per ricordare che si tratta della radice (o delle radici) della (2) connesse ad un certo intero k .

3. Mostriamo anzitutto come, fissato che sia k , l'equazione (7) ammetta una ed una sola radice reale e positiva (se $k > 0$) che potremo perciò, senza più ambiguità, denotare con λ_k .

Infatti, indicato per brevità con $F(\lambda_k)$ il primo membro di detta equazione, derivando si ha

$$F'(\lambda_k) = j\delta + \frac{j\xi_1}{1 + (j^2 - 1)\sin^2 \lambda_k \xi_1} + \frac{j(1 - \xi_2)}{1 + (j^2 - 1)\sin^2 \lambda_k (1 - \xi_2)}$$

da cui, essendo $\xi_1 > 0$, $1 - \xi_2 > 0$, $\xi_1 + 1 - \xi_2 = 1 - \delta$, $j > 1$, si trae che

$$F'(\lambda_k) \geq j\delta + \frac{1 - \delta}{j} > 0,$$

il che mostra che la funzione F è una funzione sempre ed indefinitamente crescente del proprio argomento; ma d'altra parte è $F(0) = 0$, dunque esisterà uno ed un solo valore reale (e positivo, se $k > 0$) di λ_k per cui è $F(\lambda_k) = k\pi$.

Mostriamo ora come, almeno in certi casi, quest'unica radice λ_k della (7) sia facilmente calcolabile per approssimazioni successive o, più propriamente, per *iterazione*.

Infatti, posto per semplicità

$$\overline{\text{arctg}}(j \text{tg } x) - x = \varphi(x),$$

cioè detta $\varphi(x)$ la *parte periodica* della funzione $\overline{\text{arctg}}(j \text{tg } x)$, la (7) può scriversi

$$(8) \quad [1 + (j - 1)\delta] \lambda_k + \varphi(\lambda_k \xi_1) + \varphi[\lambda_k (1 - \xi_2)] = k\pi$$

o anche

$$\lambda_k = \Phi_k(\lambda_k),$$

avendo posto

$$(9) \quad \Phi_k(\lambda_k) = \frac{1}{1 + (j - 1)\delta} \{k\pi - \varphi(\lambda_k \xi_1) - \varphi[\lambda_k (1 - \xi_2)]\}.$$

Ne segue che, semprechè (per un certo $\lambda_k^{(0)}$) la successione

$$(10) \quad \lambda_k^{(1)} = \Phi_k(\lambda_k^{(0)}) \quad , \quad \lambda_k^{(2)} = \Phi_k(\lambda_k^{(1)}) \quad , \quad \lambda_k^{(3)} = \Phi_k(\lambda_k^{(2)}), \dots$$

convergerà, il suo limite dovrà necessariamente soddisfare la (8), cioè sarà λ_k .

In particolare, per un noto teorema, la successione (10) sarà sempre convergente ed avrà per limite λ_k se è sempre $|\Phi'_k(x)| < 1$.

Convorrà dunque derivare la (9), con che si ha

$$\Phi'_k(\lambda_k) = \frac{1}{1 + (j - 1)\delta} \left[1 - \delta - \frac{j\xi_1}{1 + (j^2 - 1)\sin^2 \lambda_k \xi_1} - \frac{j(1 - \xi_2)}{1 + (j^2 - 1)\sin^2 \lambda_k (1 - \xi_2)} \right]$$

cioè, indicando con ξ' un opportuno numero compreso fra ξ_1 ed $(1 - \xi_2)$,

$$\Phi'_k(\lambda_k) = \frac{1 - \delta}{1 + (j - 1)\delta} \left[1 - \frac{j}{1 + (j^2 - 1)\sin^2 \lambda_k \xi'} \right]$$

donde segue

$$-\frac{(1 - \delta)(j - 1)}{1 + (j - 1)\delta} \leq \Phi'_k(\lambda_k) \leq \frac{(1 - \delta)(j - 1)}{1 + (j - 1)\delta} \frac{1}{j}$$

e, *a fortiori*,

$$(11) \quad |\Phi'_k(\lambda_k)| \leq \frac{(1 - \delta)(j - 1)}{1 + (j - 1)\delta}.$$

Se ne conclude pertanto che, se la quantità a secondo membro della (11) è minore di 1, come certamente si verifica se è $\delta > \frac{1}{2}$ oppure (caso più interessante) se è

$$\delta < \frac{1}{2} \quad , \quad j < 2 \frac{1 - \delta}{1 - 2\delta},$$

allora la successione (10) tenderà a λ_k comunque sia scelto $\lambda_k^{(0)}$. (Per esempio, potrà prendersi $\lambda_k^{(0)} = k\pi$).

4. Potremo però ottenere dei risultati più espressivi, specie se δ è molto piccolo (ch'è il caso tecnicamente interessante) con l'osservare che, poichè $\varphi(x)$ è una funzione dispari, periodica col periodo π , la (8) può anche scriversi

$$\begin{aligned} [1 + (j - 1)\delta] \lambda_k &= k\pi + \varphi[k\pi - \lambda_k(1 - \xi_2)] - \varphi(\lambda_k \xi_1) = \\ &= k\pi + \varphi[\lambda_k \xi_1 + k\pi - \lambda_k(1 - \delta)] - \varphi(\lambda_k \xi_1) \end{aligned}$$

donde, detto ρ_k un opportuno numero compreso fra $\lambda_k \xi_1$ e $\lambda_k \xi_1 + k\pi - \lambda_k(1 - \delta)$, definito dall'equazione

$$(12) \quad \varphi'(\rho_k) = \frac{\varphi(\lambda_k \xi_1 + b_k) - \varphi(\lambda_k \xi_1)}{b_k} \quad , \quad (b_k = k\pi - \lambda_k(1 - \delta)),$$

si trae

$$[1 + (j - 1)\delta] \lambda_k = k\pi + [k\pi - \lambda_k(1 - \delta)] \varphi'(\rho_k),$$

equazione da cui, sostituendo alla derivata la sua espressione, si deduce facilmente che

$$(13) \quad \boxed{\lambda_k = \frac{k\pi}{1 + \delta(j^2 - 1)\sin^2 \rho_k}}.$$

Mostra già l'interesse della formula trovata la circostanza che da essa si deduce subito che è

$$(14) \quad \frac{k\pi}{1 + \delta(j^2 - 1)} \leq \lambda_k \leq k\pi$$

e quindi, in particolare, che gli autovalori λ_k sono tutti non superiori a quelli $\lambda_k = k\pi$ corrispondenti al caso $\delta = 0$: risultato che Krall deduce dalla teoria delle equazioni integrali. Ora si può però inoltre asserire che *la differenza fra $k\pi$ e λ_k è dell'ordine di δ* , il che fornisce una prima, sia pur grossolana, approssimazione degli autovalori λ_k .

Per poter procedere notevolmente oltre basta però ulteriormente osservare:

1) Che, soddisfacendo l' h_k che figura nella (12) alla disuguaglianza, facile a controllare,

$$(15) \quad k\pi\delta \leq h_k \leq \frac{j^2}{1 + \delta(j^2 - 1)} k\pi\delta,$$

esso è dell'ordine di grandezza di δ .

2) Che, purchè la derivata seconda della funzione non sia nulla, il numero θ che compare nella formula lagrangiana del valor medio differisce da $1/2$ per termini dell'ordine dell'incremento h .

Invero, tenendo presenti queste due osservazioni e avvalendoci della comoda notazione $O(\delta)$, $O(\delta^2)$... per indicare termini dell'ordine di δ , δ^2 , ..., dalla (12) potremo dedurre che

$$\rho_k = \lambda_k \xi_1 + \frac{1}{2} h_k + O(\delta^2)$$

cioè che

$$(16) \quad \rho_k = k\pi \xi_1 + \left(\frac{1}{2} - \xi_1\right)(k\pi - \lambda_k) + \frac{1}{2} k\pi\delta + O(\delta^2)$$

o, più semplicemente, che

$$(17) \quad \rho_k = k\pi \xi_1 + O(\delta).$$

Dalla (17), sostituendo nella (13) si ottiene senz'altro

$$(18) \quad \boxed{\lambda_k = \frac{k\pi}{1 + \delta(j^2 - 1) \sin^2 k\pi \xi_1} + O(\delta^2)}$$

formula da cui, facendo $k = 1$ e tenendo conto della (1), segue subito la (6).

Se invece si vuol maggior precisione (errore dell'ordine di δ^3) si dovrà far uso della (16) tenendo conto che, in virtù dell'ultima formula, è

$$k\pi - \lambda_k = \delta(j^2 - 1) \sin^2 k\pi \xi_1 + O(\delta^2);$$

troveremo così che è

$$\rho_k = k\pi\xi_1 + \left[\left(\frac{1}{2} - \xi_1 \right) (j^2 - 1) \sin^2 k\pi\xi_1 + \frac{1}{2} k\pi \right] \delta + O(\delta^2),$$

da cui segue

$$(19) \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{1 + \delta(j^2 - 1) \sin^2 \left\{ k\pi\xi_1 + \left[\left(\frac{1}{2} - \xi_1 \right) (j^2 - 1) \sin^2 k\pi\xi_1 + \frac{1}{2} k\pi \right] \delta \right\}} + O(\delta^3).$$

Notiamo infine che, dalla circostanza che ρ_k è compreso fra $\lambda_k \xi_1$ e $\lambda_k \xi_1 + h_k$ e dalle (14) e (15), si deduce subito che è

$$(20) \quad \frac{\xi_1}{1 + \delta(j^2 - 1)} k\pi < \rho_k < \left(\xi_1 + \frac{j^2 \delta}{1 + \delta(j^2 - 1)} \right) k\pi,$$

disuguaglianze da cui, supposto che fra il primo ed il terzo membro non sia compreso nessun multiplo di $\pi/2$ (massimi e minimi della funzione $\sin^2 x$) è facile trarre due valori, uno certamente approssimato per difetto e l'altro certamente approssimato per eccesso, di λ_k la cui differenza è dell'ordine di δ^2 . Se invece fra le due dette quantità cade p. es. un multiplo dispari di $\pi/2$, allora il valore approssimato per difetto si otterrà ponendo $\sin^2 \rho_k = 1$.

Matematica. — *L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes.* — III. *Systèmes contenant quatre dérivées du second ordre.* Nota ⁽¹⁾ di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — Quand les systèmes contiennent *quatre dérivées du second ordre*, de toutes les 15 combinaisons de 6 dérivées $r, s, \dots t'$, dont on ne prend que quatre, il faut étudier les 12 suivantes :

$$\begin{aligned} [1] : s, r', s', t' ; [2] : r, r', s', t' \text{ et } [3] : t, r', s', t' ; \\ [4] : s, t, s', t' \text{ et } [5] : r, s, r', s' ; [6] : s, t, r', s' \text{ et } [7] : r, s, s', t' ; \\ [8] : r, t, s', t' \text{ et } [9] : s, t, r', t' ; [10] : r, t, r', s' \text{ et } [11] : r, s, r', t' ; \\ [12] : r, t, r', t'. \end{aligned}$$

Il est aisé d'obtenir les équations auxiliaires pour les combinaisons

$$[13] : s', r, s, t ; [14] : r', r, s, t ; [15] : t', r, s, t$$

des équations pour [1], [2], [3] par les changements des variables r, s, t et des déterminants $\rho, \sigma, \dots \eta_3$ par la méthode, indiquée dans la Note II.

Pour les équations

$$(1) \quad F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, r', s', t') = 0, \quad (k = 1, 2)$$

qui correspondent à la 1^{re} combinaison [1], nous aurons le système de 2 équations linéaires à une fonction inconnue Φ :

$$(2) \quad \begin{cases} (\rho' - \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - (\sigma_2 + \lambda_i \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \\ \lambda_i \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} - \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\lambda_i \xi'_1 - \eta'_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \lambda_i \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \end{cases}$$

où λ_i est une des racines de l'équation quadratique

$$\sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda + \sigma_3 = 0.$$

Il faut trouver les intégrales particulières $\Phi_1 = C_1, \Phi_2 = C_2, \dots$, qui ne contiennent pas les variables r et t . Chaque paire d'intégrales $\Phi_g = C_g, \Phi_h = C_h$ doit être compatible avec chacune des équations proposée $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1932.

La 2^{me} équation du système (2) peut être remplacée par une des 4 équations

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + (\sigma_2 - \lambda_i \sigma_1) \frac{d\Phi}{dy} + (\xi'_1 + \eta'_1 + \lambda_i \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= (\xi_2 + \lambda_i \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}, \\ (\lambda_i \sigma_2 + \sigma_3) \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\lambda_i \eta'_1 + \lambda_i \xi'_2 + \xi'_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_i \eta_2 + \xi_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \\ \lambda_i (\rho' - \lambda_i \sigma') \left[\sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} - \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right] &= \sigma_3 \left[\lambda_i \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - (\eta'_2 + \lambda_i \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right] \\ (\lambda_i \sigma' - \rho') \left[\sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right] &= \sigma_3 \left[(\xi'_1 + \lambda_i \xi'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} + (\lambda_i \tau' - \sigma') \frac{\partial \Phi}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Pour les équations

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, r', s', t') = 0 \quad (k = 1, 2)$$

il faut trouver les intégrales particulières, qui ne contiennent pas s et t du système

$$\begin{cases} (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\lambda_i \rho_2 - \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \\ \lambda_i \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \rho_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\lambda_i \xi'_1 + \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \end{cases}$$

lié avec une des racines de l'équation

$$\rho_1 \lambda^2 - \rho_2 \lambda + \rho_3 = 0.$$

Pour la combinaison analogue [3] le système auxiliaire et l'équation quadratique s'écriront :

$$\begin{cases} (\sigma' + \lambda_i \rho') \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\tau_1 - \lambda_i \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \\ \tau_1 \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\xi'_1 + \lambda_i \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \\ \tau_3 \lambda^2 - \tau_2 \lambda + \tau_1 = 0. \end{cases}$$

§ 2. — Pour les équations

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, s', t') = 0 \quad (k = 1, 2)$$

il faut trouver les intégrales, qui ne contiennent pas r et r' du système

$$\begin{cases} -\lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\rho' + \lambda_i \sigma_3) \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\tau_2 - \lambda_i \rho) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0 \\ \sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + (\tau_2 - \lambda_i \rho) \frac{d\Phi}{dy} - (\xi_2 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\eta_3 - \xi'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial s} - (\eta_2 + \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}, \end{cases}$$

où λ_i est une des racines de l'équation

$$\rho \lambda^2 + (\sigma_3 - \tau_2) \lambda + \rho' = 0.$$

Pour la combinaison analogue [5] le système auxiliaire et l'équation algébrique seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\tau' - \lambda_i \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - (\rho_2 + \lambda_i \tau) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0 \\ \sigma_2 \frac{d\Phi}{dy} + (\rho_2 + \lambda_i \tau) \frac{d\Phi}{dx} - (\eta_2 + \xi_1) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\lambda_i \xi_1 - \eta_2') \frac{\partial \Phi}{\partial s} - (\xi_2' + \lambda_i \xi_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'}; \\ \tau \lambda^2 + (\rho_2 - \sigma_1) \lambda + \tau' = 0. \end{array} \right.$$

Quand nous avons le système d'équations

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, r', s') = 0, \quad (k = 1, 2)$$

on peut chercher les intégrales, qui ne contiennent pas r et t , du système

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau_1 - \lambda_i \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\lambda_i \sigma_2 - \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \rho \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0 \\ \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \lambda_i \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}, \end{array} \right.$$

lié avec une de racines de l'équation

$$\tau_2 \lambda^2 - (\tau_1 + \sigma_2) \lambda + \sigma_1 = 0,$$

ou du système

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tau_1 + \lambda_i' \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\rho_1 - \lambda_i' \sigma_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i' \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0 \\ \lambda_i' \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + (\rho + \lambda_i' \tau_1) \frac{d\Phi}{dy} - (\xi_2 + \lambda_i' \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = -(\eta_3 + \lambda_i' \xi_1') \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\eta_2 - \lambda_i' \eta_1') \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \end{array} \right.$$

lié avec une des racines de l'équation

$$\tau' \lambda'^2 + (\tau_1 - \sigma_2) \lambda' + \rho = 0.$$

Pour la combinaison analogue [7], par ex., les dernières équations se remplaceront par les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_2 - \lambda_i' \rho') \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\tau + \lambda_i' \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \lambda_i' \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0 \\ \rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + (\rho_3 + \lambda_i' \rho') \frac{d\Phi}{dy} + (\xi_2' + \eta_1') \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\xi_1 - \lambda_i' \eta_1') \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\eta_1 + \lambda_i' \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'}; \\ \rho' \lambda'^2 + (\rho_3 - \sigma_2) \lambda' + \tau = 0. \end{array} \right.$$

§ 3. — Si nous avons le système

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, s', t') = 0, \quad (k = 1, 2)$$

il faut chercher les intégrales particulières, qui ne contiennent pas r' du système de 3 équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \lambda_i \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \lambda_i \rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \lambda_i \xi_2' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0, \end{array} \right.$$

où λ_i est une des racines de l'équation cubique

$$\rho_2 \lambda^2 (\rho_2 \lambda - \tau_2) + \tau_3 (\rho_3 \lambda - \tau_3) = 0.$$

Pour le cas de la combinaison analogue [9] les dernières équations seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\lambda_i \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ \lambda_i \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} - \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} + \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0; \\ \sigma_1 \lambda^2 (\sigma_1 \lambda + \sigma_3) + \tau_3 (\tau_1 \lambda + \tau_3) = 0. \end{array} \right.$$

Pour le système

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r', s') = 0 \quad (k = 1, 2)$$

nous viendrons à trouver des intégrales particulières, qui ne contiennent pas t' , du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \lambda_i \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \lambda_i \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \end{array} \right.$$

où pour λ nous avons l'équation cubique

$$\rho_1 \lambda^2 (\rho_1 \lambda - \tau_1) - \tau_2 (\rho_2 \lambda - \tau_2) = 0.$$

Pour la combinaison analogue [11] les équations s'écriront:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\lambda_i \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ -\lambda_i \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0; \\ \rho_1 \lambda^2 (\rho_1 \lambda + \rho_3) + \sigma_3 (\sigma_1 \lambda + \sigma_3) = 0. \end{array} \right.$$

§ 4. - Pour la dernière combinaison des dérivées du second ordre, quand nous avons le système

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r', t') = 0, \quad (k = 1, 2)$$

les conditions de compatibilité des équations $F_1 = 0, F_2 = 0, \Phi = \text{const.}$ s'écriront sous la forme suivante:

$$\frac{\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s}}{(r t r')} = \frac{(t r' t')}{\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}} = \frac{[t' t y]}{[r r' x]} = \frac{(t r t')}{\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s}} = \frac{\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}}{(r t' r')},$$

ce qui donne, pour déterminer les équations $\Phi_i = C_i, \dots$ le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \lambda_i \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \rho_1 \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\rho_1 \tau_1 \lambda_i^2 + \tau_3^2) \frac{\partial \Phi}{\partial s} \\ \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \lambda_i \left(\rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right) + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0, \end{array} \right.$$

où λ_i est une des racines de l'équation biquadratique:

$$\rho_1 \lambda^2 (\rho_1^2 \lambda^2 + \tau_3 \rho_3) + \tau_3 (\rho_1 \tau_1 \lambda^2 + \tau_3^2) = 0.$$

Matematica. — *Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale.* Nota di G. ASCOLI, pres. dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Opération linéaires. Matrices limitées.* Nota di R. L. GOMES, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Un teorema generale sulle successioni di funzioni convergenti verso una funzione olomorfa.* Nota di S. MINETTI, pres. dal Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali.* Nota di M. PASTORI, pres. dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla distribuzione delle tensioni interne in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare. Ripartizione uniforme della tensione tangenziale.* Nota V di R. ZOJA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. C. GUIDI.

Come unico caso nel quale sia giustificato ammettere una ripartizione uniforme dello sforzo di taglio sulla sezione trasversale di un solido prismatico C. Guidi dà quello dei gambi dei chiodi ribaditi a caldo nelle chiodature di forza ⁽²⁾.

In ogni altro caso poichè la sollecitazione al taglio semplice non può aversi che per sezioni isolate del solido, e non può neppure estendersi ad un tronco di solido anche di limitatissima lunghezza, senza essere accompagnata da un momento flettente sia pure piccolissimo ⁽²⁾, la distribuzione delle tensioni tangenziali viene alterata ed è necessaria una apposita trattazione per trovarne la legge di variazione. Sono ben note, nel caso dei solidi prismatici, la trattazione rigorosa e quella approssimata del problema della flessione e taglio, le quali conducono a distribuzioni della τ_{yz} nettamente differenti da quella uniforme.

Ma se consideriamo un solido non prismatico è possibile ottenere, per determinate forme di esso e condizioni di sollecitazione, una *distribuzione uniforme* della tensione tangenziale su una sua sezione trasversale.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1932.

(2) C. GUIDI, *Scienza delle costruzioni*, parte II.

Mi propongo di dimostrare questo in un caso che, per la sua grande semplicità, per la possibilità di facili verifiche sperimentali, e per la sua diretta estensione a problemi pratici, merita di essere segnalato.

Il solido è ancora la mensola di spessore costante, a profilo rettilineo, sollecitata al vertice da una coppia \mathfrak{M}_l e da una forza \mathfrak{T}_l (problema piano), del quale mi sono occupato con altri intendimenti nella Nota precedente⁽¹⁾.

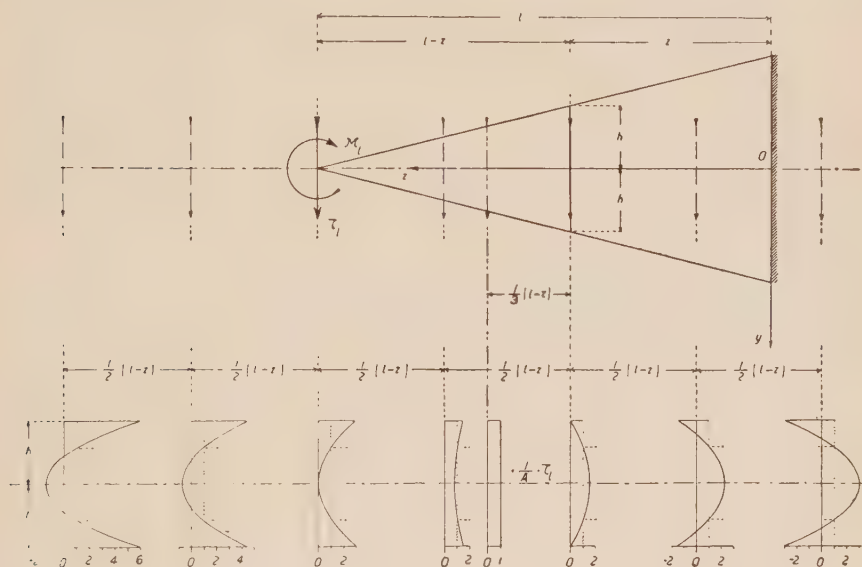


Fig. 1.

Per giungere rapidamente al risultato enunciato basta ricordare l'espressione che con la soluzione equilibrata schematica (3) si ha nel caso attuale per la tensione tangenziale τ_{yz} :

$$(1) \quad \tau_{yz} = 3 \frac{I}{A} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \frac{\mathfrak{M}_l}{l-z} + \left(\frac{y}{h} \right)^2 \mathfrak{T}_l \right\}$$

ed osservare che quando per la sezione di quota z si abbia

$$(2) \quad \mathfrak{M}_l = \frac{2}{3} (l-z) \mathfrak{T}_l$$

la (1) si riduce a

$$(3) \quad \tau_{yz} = \frac{\mathfrak{T}_l}{A},$$

espressione indipendente da y .

(1) R. ZOJA, *Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare*, Nota IV, (R. Acc. Naz. Lincei, seduta 6 novembre 1932).

Nella fig. 1 si sono attribuiti al rapporto tra coppia e forza anche diversi altri valori e sulle verticali delle risultanti, che a tali valori rispettivamente corrispondono, si sono portate le fondamentali coi relativi diagrammi che danno le corrispondenti leggi di variazione di $\tau_{y\chi}$ sulla sezione generica di quota χ ⁽¹⁾. Le tensioni tangenziali sono tutte dello stesso segno quando la risultante è compresa tra il vertice e la sezione, ed in particolare quando essa giace nella sezione si ha la stessa legge di variazione che per la trave prismatica a sezione rettangolare sollecitata a flessione e taglio.

Come si è dimostrato, la ripartizione uniforme della tensione tangenziale si ha quando la risultante dista dalla sezione di $\frac{1}{3}(l-\chi)$ dalla parte del vertice; tale posizione della risultante separa due regioni per le quali la concavità della parabola è rispettivamente rivolta da una parte e da quella opposta.

Notiamo che a risultati così semplici ed immediati ben difficilmente si sarebbe potuto giungere senza ricorrere alla soluzione equilibrata schematica discussa nella IV Nota. Dopo quanto è stato detto in tale Nota è appena necessario aggiungere qui che la soluzione esatta differisce dalla (1), ma che le conclusioni alle quali si è pervenuti non sono per questo sostanzialmente da modificare, se l'inclinazione del profilo del solido è sufficientemente piccola: così ad esempio quando tale inclinazione sia eguale ad $\frac{1}{10}$, il va-

lore massimo della $\tau_{y\chi}$ per $\mathfrak{M}_l = \frac{2}{3}(l-\chi) \frac{\tau_l}{A}$ supera il valor medio $\frac{\tau_l}{A}$ dato dalla (3) — in corrispondenza di $y = \pm b$ — di appena l'1.1 %.

Con una osservazione analoga a quella avanzata al termine della IV Nota relativamente all'influenza della presenza del carico sulla superficie laterale del solido, possiamo estendere immediatamente la (3) al caso della mensola che sopporta un *carico ripartito linearmente sull'orizzontale d'intensità nulla al vertice*: poichè per tale condizione di carico la (2) è verificata per ogni valore di χ , possiamo concludere che *la ripartizione uniforme dello sforzo di taglio ha luogo per tutte le sezioni del solido*⁽²⁾.

Questo notevole risultato è in accordo con la teoria delle dighe, ed anzi ne costituisce un caso particolare. Ed infatti C. Guidi nella trattazione

(1) Se immaginiamo di far ruotare di 90° tutti i diagrammi attorno alle loro fondamentali, o ciò che è lo stesso se portiamo i valori di $\tau_{y\chi}$ nella direzione del terzo asse x , si viene ad individuare una superficie rigata a direttrici paraboliche, la quale può essere interpretata come superficie d'influenza della tensione $\tau_{y\chi}$, in quanto le sue generatrici, sezioni coi piani $y = \text{cost.}$, sono le linee d'influenza della $\tau_{y\chi}$ ai diversi livelli y della sezione trasversale generica di quota χ .

(2) In questo caso anzi si può facilmente dimostrare che la ripartizione uniforme non è solamente approssimata, ma assolutamente rigorosa. Su questa e su altre interessanti particolarità del problema mi riservo di ritornare ulteriormente.

del muro a sezione triangolare dimostra che per esso vale per le tensioni tangenziali — agenti in una sezione orizzontale, in generale *obliqua* all'asse — la *legge lineare* ⁽¹⁾; ma per il solido considerato la condizione di sollecitazione è, rispetto a quella di una diga, soltanto parziale, poichè non vi è che una componente del carico idrostatico; in tali condizioni, come caso particolare della legge lineare, si ha la *ripartizione uniforme* delle tensioni tangenziali *sulle sezioni trasversali*.

Meccanica. — *Parametri variabili e previsioni asintotiche in qualche problema di meccanica celeste.* Nota di G. KRALL, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico.* — I. *Premesse e caso particolare.* Nota di F. ZAGAR, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico.* — II. *Caso generale.* Nota di F. ZAGAR, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) C. GUIDI, *Statica delle dighe per laghi artificiali*, 3^a edizione, 1928, n. 9 a p. 18, n. 15 a p. 34.

Geofisica. — *Misure magnetiche a Mogadiscio.* Nota di M. BOSSOLASCO, presentata⁽¹⁾ dal Socio L. PALAZZO.

La Stazione Geofisica di Mogadiscio, creata per iniziativa del Consiglio Nazionale delle Ricerche in occasione del Secondo Anno Polare Internazionale, ha, fra le altre attribuzioni, il compito di seguire in modo continuo l'andamento degli elementi del magnetismo terrestre, il che viene realizzato mediante variometri e registratori del tipo ideato dal prof. D. La Cour, che sono appunto stati costruiti e distribuiti in un numero relativamente notevole di esemplari in varie regioni della terra per le ricerche da compiersi durante il Secondo Anno Polare Internazionale.

A due mesi soltanto dall'inizio dell'attività di questa Stazione è prematuro cercare di discutere i diagrammi delle registrazioni magnetiche sinora raccolti; non altrettanto può dirsi invece per le misure assolute eseguite in questo primo periodo per fissare e controllare di continuo i valori di riferimento delle predette registrazioni, poichè il confronto fra i valori medii attuali degli elementi magnetici a Mogadiscio e quelli dedotti dalle precedenti osservazioni compiute nella stessa località già consente di dedurre l'andamento delle variazioni secolari che si sono avute negli ultimi anni in queste regioni.

Com'è naturale, in quanto segue mi riferirò particolarmente alla Memoria del prof. L. Palazzo sulle *Misure magnetiche in Oltregiuba e Somalia nel 1926*⁽²⁾, nella quale non soltanto sono discusse le numerose osservazioni eseguite dall'A. in quell'anno — osservazioni che portarono alla conoscenza della distribuzione degli elementi magnetici in una regione del continente africano fino allora inesplorata ad eccezione di qualche località costiera — ma vi si trova in pari tempo l'esame dettagliato delle variazioni secolari secondo i risultati delle poche misure precedenti, tra le quali sono da ricordare quelle dello stesso prof. Palazzo nel viaggio che egli fece in Somalia verso la fine del 1909.

Secondo quanto ho riferito in una apposita « Notizia »⁽³⁾, dove sono esposti altri dettagli sull'impianto e sul funzionamento della Stazione Geofisica di Mogadiscio, le coordinate geografiche della medesima sono le seguenti:

$$\varphi = 2^{\circ} 02' 03'' \text{ N.} \quad ; \quad \lambda = 45^{\circ} 21' 20'' = 3^{\text{h}} 01^{\text{m}} 25^{\text{s}},3 \text{ E. Greenw.}$$

(1) Nella seduta del 6 novembre 1932.

(2) Nelle « Memorie del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica, Roma », serie III, vol. II, 1929.

(3) Cfr. *La Stazione Geofisica di Mogadiscio*, nel « Bollettino del Comitato Naz. It. per la Geodesia e la Geofisica », dicembre 1932.

Con riferimento alla posizione dove il prof. Palazzo eseguì a Mogadiscio le sue determinazioni nel marzo 1926, dirò che la Stazione, nella cui immediata vicinanza compio le misure assolute, è situata a N. E. ed a circa 1200 m. dalla suddetta posizione; tenendo presente la natura uniforme del suolo, nonchè la distribuzione regionale degli elementi magnetici secondo quanto indica la carta magnetica costruita dal prof. Palazzo per l'epoca 1926,0, si arguisce subito come le misure fatte nelle due località riescano senz'altro paragonabili senza bisogno di riduzione alcuna per quanto concerne la differente posizione.

Dopo queste premesse accenno sommariamente alle caratteristiche degli strumenti disponibili presso questa Stazione per l'esecuzione delle misure magnetiche assolute, strumenti appartenenti tutti all'Istituto Idrografico della R. Marina in Genova.

Per la determinazione della declinazione e della componente orizzontale serve il magnetometro n. 90, del tipo di Kew e di costruzione Elliot Brothers, Londra, strumento impiegato nella Spedizione De Filippi all'Himalaia negli anni 1913-14 e rimasto poi in Russia sino al 1925 a causa della guerra, allorchè venne recuperato in perfette condizioni insieme agli altri apparecchi della spedizione. Dopo l'utilizzazione fattane in alcune campagne compiute negli ultimi anni dall'I. I. G. il magnetometro in oggetto venne rimesso a nuovo nell'Officina dello stesso Istituto verso la fine dello scorso anno. A seguito di ciò si dovettero determinare nuovamente tutte le costanti dello strumento, il che feci io stesso presso l'Istituto Idrografico sotto la guida del prof. M. Tenani durante la mia permanenza a Genova dal dicembre '31 al febbraio '32. Onde evitare gli effetti che potevano provenire dagli inevitabili errori che si incontrano nella delicata operazione della determinazione del momento d'inerzia dei magneti, lo stesso magnetometro venne da me confrontato presso l'Osservatorio Magnetico di Rude Skov (Copenaghen) nel marzo del corrente anno: siffatte misure di confronto, eseguite anche per la declinazione, hanno portato alla conclusione principale che per il magnete 90 A del magnetometro in questione è tuttora valido il valore del momento d'inerzia K determinato nel 1913 all'Osservatorio di Kew e cioè si ha: $\log \pi^2 K = 3.48660$ a 0°C . Rinviano alle pubblicazioni nelle quali si trova riprodotta la copia del certificato del magnetometro 90 per ciò che riguarda le costanti geometriche di tale strumento ⁽¹⁾, mi limiterò a riportare il nuovo valore della correzione di temperatura:

$$0.0003125 t + 0.00000505 t^2,$$

(1) G. ABETTI e A. ALESSIO, *Misure di magnetismo terrestre eseguite in Asia Centrale*. Relazione e calcoli del prof. M. TENANI, vol. II, serie I delle «Pubblicazioni sulla Spedizione De Filippi», Bologna. Nonchè: M. TENANI, *Strumenti e metodi da campo per le misure di magnetismo terrestre*, Genova, 1927.

nonchè l'attuale coefficiente d'induzione $\mu = 6.92$ ($\log \mu = 0.84011$) per il magnete 90 A, le altre costanti fisiche del medesimo essendo discusse in appresso. Non accenno alle caratteristiche del magnete « deviato » nè a quelle del secondo magnete collimatore 90 D, poichè quest'ultimo, possedendo un momento magnetico relativamente basso, non viene di solito impiegato nelle misure.

La registrazione del tempo nelle misure di durata delle oscillazioni del magnete avviene a mezzo di un cronografo da campo Mioni, sulla zona essendo registrati i secondi, ad eccezione del 60.mo di ogni minuto, battuti dal cronometro da marina Nardin n. 2357, cronometro che viene confrontato ogni settimana coi segnali orari di Bordeaux che si ricevono presso la locale Stazione Radio.

L'inclinazione è misurata con l'inclinometro Dover n. 134 munito di una sola coppia di aghi n. 63 e n. 134; questo strumento, che non ha potuto essere rimesso a punto con la stessa accuratezza che si adottò nell'I. I. G. per il magnetometro, non consente, anche per effetto della propria natura, il raggiungimento di una esattezza notevole, tanto più che dopo ripetute misure, come sarà riferito nel seguito, si è dovuto scartare l'ago n. 134 per imperfezione dei perni, dato che l'osservazione ai microscopi delle relative estremità metteva in evidenza il comportamento non isocrono delle semioscillazioni a destra rispetto quelle a sinistra. Ad ogni modo, le ripetute misure compiute col solo ago n. 63 danno affidamento in una sufficiente approssimazione, pur rimanendo giustificata la convenienza di aumentarla con almeno un'altra coppia di aghi.

Per le determinazioni d'azimut dispongo di un tacheometro Troughton & Simms, coi cerchi graduati del diametro di 6 pollici ed a lettura diretta di 30''.

Sino ad oggi e cioè alla fine di settembre, sono state eseguite misure magnetiche assolute nei giorni: 31 luglio; 8, 9, 14, 15 e 21 agosto; 11 e 25 settembre; come apparirà nel seguito dove sono esposti i risultati di siffatte determinazioni, qualcuna di queste non è completa nel senso che non è stato possibile eseguire nello stesso giorno tutte e tre le misure di D, H ed I.

Come ho già avuto occasione di render noto nella « Notizia » dianzi citata, le misure assolute vengono eseguite su di un pilastrino fatto appositamente costruire nel giardino cintato adiacente alla Stazione Geofisica: il che è anche stato fatto tenendo presente la convenienza che potrà aversi nel conservare il pilastrino stesso almeno quale « stazione di ripetizione » per misure magnetiche assolute da compiersi a Mogadiscio dopo la fine dell'Anno Polare, convenienza dovuta alla favorevole ubicazione della Stazione Geofisica anche rispetto alla distanza dalle nuove possibili costruzioni.

Come già aveva riconosciuto il prof. Palazzo è secondo quanto ha ora confermato l'esame delle registrazioni raccolte, in queste regioni le ore più

propizie per l'esecuzione di misure magnetiche durante il giorno sono quelle del tardo pomeriggio, che ho pertanto adottato ed adotto tuttora procedendo nell'ordine seguente per le singole determinazioni: 1) inclinazione, 2) declinazione, 3) componente orizzontale. Per tutte le misure impiego gli appositi moduli dell'Istituto Idrografico della R. Marina ai quali mi attengo nelle successive esperienze ad esclusione di quelle di oscillazione che eseguo sia prima che dopo le deviazioni, procedendo in questo modo: osservo venti passaggi successivi del magnete sia verso destra che verso sinistra, lasciando poi che il magnete continui ad oscillare sino alla cinquantesima oscillazione dall'inizio, per riprendere da questa l'osservazione di tutti i passaggi sino al settantesimo ⁽¹⁾.

Cade ora a proposito notare come per il magnete 90 A non ho riscontrato nessun cambiamento della sua orizzontalità durante le esperienze di oscillazione in confronto alle precedenti misure eseguite a Genova ed a Rude Skov, cambiamento che avrebbe potuto influire sulla durata delle oscillazioni: questa constatazione proviene dalle letture fatte durante tutte le esperienze sulla scala verticale del magnete, letture che sono rimaste comprese fra la 13^a e la 16^a divisione, mentre il valore di una divisione è di circa 1'.8 e la graduazione corrispondente alla posizione orizzontale risulta la 15^a.

(1) A titolo d'esempio riporto il risultato dello spoglio della zona cronografica eseguito per la seconda esperienza di oscillazione — cioè dopo le deviazioni — relativa alle misure del 21 agosto:

Durate di 50 oscillazioni (da 18^h 01^m a 18^h 05^m T. L. M.)

di ordine pari	di ordine dispari
2 ^m 45 ^s .02	2 ^m 45 ^s .04
44 .95	44 .96
44 .92	44 .93
44 .92	44 .88
44 .88	45 .05
44 .88	44 .93
45 .00	44 .80
44 .82	44 .91
44 .94	44 .87
45 .08	45 .00

Durata di una oscillazione

3^s.29882

3^s.29874

T, medio = 3^s.29878,

con: $t = 25^{\circ}.3$.

Da questo esempio, non scelto fra i migliori, appare giustificata l'effettiva consistenza della cifra dei decimillesimi di secondo per i valori di T determinati con sole cinquanta oscillazioni.

Senza accennare, per brevità, ad altri accorgimenti adottati nelle misure, ecco ora come si prospettano i risultati delle medesime.

Azimut delle mire. — Per le determinazioni della declinazione ho scelto non una sola mira, ma due, situate in direzioni quasi opposte, allo scopo di avere la possibilità di un controllo, nonchè per assicurare in ogni caso la collimazione ad almeno una di esse se l'altra divenisse invisibile, sebbene le due mire siano state scelte in guisa da rendere minima tale probabilità.

La prima mira è lo spigolo a SW dell'edificio della R. Capitaneria situato ad oriente della Stazione Geofisica ed a una distanza di circa 500 metri da questa. Per seconda mira venne scelto lo spigolo NE del fabbricato della vecchia Dogana, fabbricato che è situato a SW della Stazione Geofisica distando dalla medesima di oltre 700 m. in linea d'aria. L'angolo che formano le due visuali che vanno dal centro del pilastro alle mire predette, è stato ripetutamente misurato ottenendosi il valor medio: $146^{\circ} 35' 58''$.

Onde avere un controllo sicuro, le determinazioni d'azimut sono state compiute indipendentemente per le due mire, collimando in ogni caso al sole secondo il noto procedimento d'osservazione dei due lembi del sole prima e dopo l'inversione del cannocchiale ⁽¹⁾.

La misura d'azimut relativa alla mira della R. Capitaneria venne fatta il 12 agosto, dalle $16^h 36^m$ alle $16^h 49^m$ di T. M. L. (45° meridiano), avendosi allora $k = -13^s$ per la correzione del cronometro Nardin. La media dei risultati portò al valore: $92^{\circ} 07' 54''$ per l'azimut della mira, contato da nord.

La determinazione dell'azimut della seconda mira ebbe luogo il 9 settembre, dalle $16^h 21^m$ alle $16^h 36^m$ di T. M. L., con $k = -27^s$, ottenendosi il valor medio: $238^{\circ} 43' 27''$. La differenza fra questo valore e l'azimut della prima mira fornisce l'angolo compreso fra le visuali dirette alle due mire: $146^{\circ} 35' 33''$, in sufficiente accordo col valore direttamente misurato.

Declinazione. — Il filo di seta della sospensione del magnete collimatore è ancora oggi quello da me posto a Rude Skov per le misure di confronto colà compiute. Siccome col magnete 90 A il relativo effetto per 90° di torsione è risultato nelle varie misure di circa 1',4, nessuna correzione per effetto della torsione residua ho dovuto introdurre sinora nell'elaborazione delle letture. Nello specchio sottostante riporto i risultati ottenuti per l'elemento magnetico in discorso, avvertendo che le relative misure sono tutte state eseguite col magnete 90 A; inoltre, che nessun valore si riferisce ad un intervallo di tempo nel quale l'esame della corrispondente registrazione metta in evidenza una forte variazione della declinazione.

(1) Cfr. p. es.: D. L. HAZARD, *Directions for magnetic measurements*, Washington, 1930, p. 53 e sg.

31-7-32	-	T. M. L.:	17 ^h 23 ^m	-	<u>D = 0° 53' 51" W.</u>
9-8-32	-	»	: 16 ^h 53 ^m	-	<u>D = 0° 53' 28" W.</u>
14-8-32	-	»	: 17 ^h 51 ^m	-	<u>D = 0° 52' 44" W.</u>
15-8-32	-	»	: 16 ^h 53 ^m	-	<u>D = 0° 54' 05" W.</u>
21-8-32	-	»	: 16 ^h 32 ^m	-	<u>D = 0° 56' 28" W.</u>
11-9-32	-	»	: 16 ^h 13 ^m	-	<u>D = 0° 54' 26" W.</u>
25-9-32	-	»	: 16 ^h 34 ^m	-	<u>D = 0° 53' 21" W.</u>

Componente orizzontale. - Avverto subito che per questo elemento i valori che qui comunico non sono da riguardarsi come definitivi, perchè essi saranno migliorati allorchè, disponendo di un numero notevole di misure di deviazione, si potrà dedurre un valore medio sufficientemente preciso per la costante di distribuzione P del magnete 90 A.

Delle prime due determinazioni di H eseguite a Mogadiscio comunico i soli risultati finali, poichè ritengo di dover attribuire ad esse un peso minore di quanto spetta invece alle due misure successive, per la ragione che queste ultime sono relative ad esperienze di deviazione compiute alle tre distanze di 22,5, 30 e 40 cm., mentre le prime due non si appoggiano sulle deviazioni a 22,5 cm.

$$31-7-32 \quad - \quad \text{T. M. L.} : 18^h 10^m \quad - \quad \underline{H = 33118\gamma} \quad - \quad \underline{m = 858.65};$$

$$15-8-32 \quad - \quad \text{»} : 17^h 46^m \quad - \quad \underline{H = 33109\gamma} \quad - \quad \underline{m = 859.01}.$$

Questi risultati per H e per il momento magnetico *m* del magnete 90 A provengono quindi dai diversi valori della costante di distribuzione ricavati con i relativi esperimenti di deviazione a 30 ed a 40 cm.

Ciò premesso, ecco ora come si prospettano i risultati delle misure compiute il 21 agosto e l'11 settembre.

Oscillazioni:

$$21-8-32 \quad 16^h 48^m - 16^h 52^m \quad t = 26^{\circ}.9 \quad T' = 3^s.29965 \quad ; \quad \log mH = 2.45395 ;$$

$$\text{»} \quad 18^h 01^m - 18^h 05^m \quad t = 25^{\circ}.3 \quad T'' = 3^s.29878 \quad ; \quad \log mH = 2.45378 ;$$

$$11-9-32 \quad 16^h 27^m - 16^h 31^m \quad t = 27^{\circ}.6 \quad T' = 3^s.29904 \quad ; \quad \log mH = 2.45435 ;$$

$$\text{»} \quad 17^h 48^m - 17^h 52^m \quad t = 25^{\circ}.8 \quad T'' = 3^s.29699 \quad ; \quad \log mH = 2.45431 .$$

In entrambe le misure l'effetto di 90° di torsione era di 1'.44 di cui si tenne conto nel calcolo di $\log mH$.

Deviazioni:

$$21-8-32 \quad 17^h 03^m - 17^h 46^m ; \quad u_{22.5} = 27^\circ 04' 41'' ; \quad u_{30} = 11^\circ 01' 04'' ;$$

$$u_{40} = 4^\circ 37' 07'' ; \quad \log \frac{m_1}{H_1} = 3.41954 ;$$

$$11-9-32 \quad 16^h 41^m - 17^h 33^m ; \quad u_{22.5} = 27^\circ 03' 41'' ; \quad u_{30} = 11^\circ 00' 07'' ;$$

$$u_{40} = 4^\circ 36' 26'' ; \quad \log \frac{m_1}{H_1} = 3.41960 .$$

Il $\log \frac{m_1}{H_1}$ ora scritto corrisponde al valore del $\log \frac{m}{H}$ a meno del fattore $\left(1 - \frac{P}{r_1^2}\right)$, per $r_1 = 22.5$ cm. Con l'analogo logaritmo dedotto dall'esperienza di deviazione a 30 cm. si sono ottenuti rispettivamente i due valori seguenti per la costante di distribuzione: $P = 5.99$, $P = 6.96$, valori la cui media si accorda bene con l'importo medio della medesima costante ottenuto a mezzo delle numerose misure compiute dalla Spedizione De Filippi all'Himalaia con gli stessi magneti deviatore e deviato, il che è lecito osservare, dato che le costanti di distribuzione P e Q dipendono essenzialmente dalle dimensioni dei due magneti impiegati. Circa la costante Q , anche per la distanza di 22.5 cm. ho ritenuto di poterla trascurare nei computi, avvalendomi della considerazione che per tutte le misure compiute dalla Spedizione De Filippi si è proceduto in tal guisa, utilizzando, come dissi, gli stessi magneti. Ad ogni modo, è mia intenzione assicurarmi direttamente di tale possibilità, utilizzando in seguito tutte le misure di deviazione a 22.5, 30 e 40 cm. col dedurre da queste sia P quanto Q .

Correggendo i valori di $\log \frac{m_1}{H_1}$ sopra riferiti coi corrispondenti valori di P , pure dianzi indicati, si è ottenuto:

$$\log \frac{m}{H} = 3.41444 ; \quad \log \frac{m}{H} = 3.41367 ,$$

per le due determinazioni in discorso, logaritmi che combinati con quelli del prodotto mH desunti dalle esperienze di oscillazione hanno portato ai risultati finali seguenti:

$$21-8-32 \quad \text{Ora media: } 17^h 27^m \text{ T. M. L.} - \underline{H = 33091.2 \gamma} ; \quad \underline{m = 859.31} ;$$

$$11-9-32 \quad \text{» » : } 17^h 12^m \text{ » } - \underline{H = 33138.2 \gamma} ; \quad \underline{m = 858.99} .^{\circ}$$

Tenendo conto che, ad es., il magnete 90 A possedeva nel marzo scorso, secondo le misure di confronto eseguite a quell'epoca presso l'Osservatorio di Rude Skov, un momento magnetico medio di 859.5 unità c. g. s., i risul-

tati di cui sopra attestano che il magnete medesimo, dopo il trattamento al quale è stato sottoposto nella rimessa a punto del magnetometro, ha bensì un momento attuale da riguardarsi come relativamente molto al di sotto del valore che possedeva nel 1914 (1030 unità circa), ma che tale momento ha ora raggiunto un livello di sufficiente stabilità.

Non ho fatto cenno alle misure di H del 25 settembre, poichè tale giorno è stato discretamente perturbato, specie appunto per questo elemento, riscontrandosi nella registrazione relativa variazioni di circa 40γ durante l'intervallo delle esperienze. Ho ritenuto, invece, plausibili i valori di D e di I ricavati nello stesso giorno, a causa sia della minor variazione subita da D secondo il relativo diagramma, sia per la precisione relativamente ridotta che può conseguirsi coll'inclinometro.

Inclinazione. — Per le ragioni già addotte, raccolgo i risultati delle misure di questo elemento eseguite col solo ago N. 63 ⁽¹⁾:

8-8-32	Ora media:	16 ^h 36 ^m	T. M. L.	$I = 16^{\circ} 31'.0 S;$
9-8-32	»	9 ^h 09 ^m	»	$I = 16^{\circ} 36'.5 S;$
14-8-32	»	16 ^h 19 ^m	»	$I = 16^{\circ} 32'.4 S;$
21-8-32	»	15 ^h 29 ^m	»	$I = 16^{\circ} 31'.7 S;$
11-9-32	»	15 ^h 00 ^m	»	$I = 16^{\circ} 36'.2 S;$
25-9-32	»	15 ^h 16 ^m	»	$I = 16^{\circ} 38'.0 S.$

Conclusioni. — È interessante confrontare ora i risultati di cui sopra per gli elementi magnetici a Mogadiscio coi valori degli stessi elementi ricavati dal prof. Palazzo nelle sue precedenti misure, misure che costituiscono, secondo quanto è a mia conoscenza, le prime determinazioni complete eseguite in questa località e delle quali riesce pertanto opportuno riportare i risultati relativi, che si trovano illustrati e discussi nella Memoria già citata dello stesso prof. Palazzo:

1910.0:	$D = 2^{\circ} 32' W$;	$H = 33470 \gamma$;	$I = 18^{\circ} 47' S.$
1926.0:	$D = 1^{\circ} 05' W$;	$H = 33180 \gamma$;	$I = 16^{\circ} 55' S.$

L'esame di questi dati ed il confronto coi valori degli elementi magnetici determinati nell'anno in corso, all'epoca 1932.6-1932.7, dimostra chiaramente come negli ultimi sei anni le variazioni magnetiche secolari a Mogadiscio hanno continuato nello stesso senso di prima, ma con un ritmo notevolmente più lento.

(1) Onde dimostrare l'opportunità di non far uso dell'ago N. 134 in conseguenza dell'irregolare suo comportamento, rendo noti i valori di I con esso ottenuti nei giorni 8, 9 e 14 agosto: $16^{\circ} 53'.6$; $16^{\circ} 54'.1$ e $16^{\circ} 47'.5$.

Tuttavia, io non ritengo opportuno precisare numericamente l'effettiva variazione secolare avutasi negli ultimi anni, poichè le piccole diminuzioni riscontrate dal 1926 possono essere mascherate in misura sensibile dall'influenza degli andamenti diurno ed annuale, oltre che dalle alterazioni proprie dell'attività del magnetismo terrestre ⁽¹⁾. Coi dati che si raccoglieranno durante tutto l'Anno Polare sulle variazioni diurne e su quella annuale si potrà pertanto pervenire anche ad una più esatta conoscenza delle variazioni secolari, circa le quali appare però abbastanza ben fondata la conclusione di cui sopra, al cui riguardo termino osservando come per la componente orizzontale le misure fatte e le registrazioni raccolte in questi due ultimi mesi sembrano lasciar supporre che questo elemento già abbia raggiunto il suo minimo valore e si trovi ora in periodo di accrescimento, in modo analogo a quanto si è verificato a Massaua, pure per la componente orizzontale negli anni fra il 1920 ed il 1926, secondo le misure e le deduzioni del prof. Palazzo ⁽²⁾.

Chimica (Chimica agraria). — *Su alcune relazioni tra composizione chimica del terreno e composizione chimica del suo contenuto colloidale* ⁽³⁾. Nota di O. BOTTINI, presentata ⁽⁴⁾ dal Socio N. PARAVANO.

La Chimica Colloidale ha fatto certamente il suo più grande passo quando è riuscita a dimostrare che i colloidi non esistono come un gruppo di sostanze con proprietà e caratteristiche particolari, ma come stato della materia in condizioni particolari e determinate.

Per tale assunto, che ha segnato il fondamento della nuova disciplina, il fondamento cioè della scienza dello stato colloidale, la caratterizzazione sostanziale di materia colloidale ha ceduto il posto alla caratterizzazione fisica di stato colloidale della materia. Non si esclude però nella struttura e nella costituzione di certe sostanze una predeterminazione all'assunzione dello stato

(1) Cfr. J. BARTELS, *Permanentes Feld und Säkularvariation*, nell'«Handbuch der Experimentalphysik» di Wien u. Harms, vol. 25, I, p. 612. Inoltre: H. W. FISK, *Secular Variation of Magnetic Intensity and its Accelerations in Pacific Countries*, nei «Proceedings Fourth Pacific Science Congress, Java, 1929»; e dello stesso A.: *Regional Distribution of Magnetic Secular-Variation over the Earth's Surface*, nei «Reports of the Amer. Geophysical Union», 1930, p. 215.

(2) L. PALAZZO, *Variazioni magnetiche secolari a Massaua col contributo di recenti misure*, negli «Atti Pontif. Accad. Nuovi Lincei», vol. LXXX, 1927, p. 165.

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Portici.

(4) Nella seduta del 20 novembre 1932.

colloidale. Si parla infatti oggi di eucolloidi⁽¹⁾ o di sostanze colloidali. È questo tuttavia il caso di un numero non molto rilevante di sostanze.

Lo stato colloidale viene considerato come uno stato disperso della materia: tra gli stati dispersi si distingue per la grandezza delle sue particelle: si dicono precisamente colloidali le dispersioni nelle quali il diametro di tali particelle si trova compreso tra $\mu\mu$. 1 e 100.

Trasportati questi nuovi principî nel campo della pedologia, il terreno viene considerato come un sistema disperso, nel quale è presente tutta la scala dei gradi di dispersione: dalle dispersioni ioniche, alle molecolari, alle colloidali, alle sospensioni e oltre ancora, fino ai ciottoli ed alle pietre. I suoi colloid, geli o soli, non vengono più riguardati come sostanze particolari, dotati di proprietà particolari, dalle quali vengono contrassegnati e per le quali vengono distinti, bensì come stato e caratterizzati solo dal loro grado di dispersione. Mentre però anche per essi il limite inferiore di grandezza del diametro delle particelle disperse viene mantenuto in $\mu\mu$. 1, il limite superiore è stato innalzato a 250⁽²⁾, spesso a 300⁽³⁾, talvolta a 1000 $\mu\mu$. (1 μ .)⁽⁴⁾.

Dai costituenti allo stato colloidale, che nella gamma delle dispersioni stanno tra la parte meno attiva, le sospensioni grossolane, e la parte attivissima, dispersioni molecolari e ioniche della soluzione circolante, in stretti rapporti genetici colla prima, in intime e sostanziali relazioni di coesistenza e di interdipendenza, oggi abbastanza ben definite, con la seconda, dipendono in gran parte le proprietà di un terreno. Tali costituenti rivestono perciò una speciale importanza ed hanno suscitato in questi ultimi tempi un grande interesse ed un grande fervore di studi e di ricerche.

Insieme ed accanto allo studio delle proprietà l'indagine è stata rivolta alla natura e alla costituzione dei composti che si ritrovano allo stato colloidale del terreno.

Una netta distinzione è stata stabilita fra costituenti minerali e costituenti organici, con tentativi diretti alla loro identificazione. Per difficoltà di tecnica e per la sua complessa e complicata natura poco ha lasciato finora intravedere la parte organica. Meno oscure appaiono le cose sulla composizione e nella costituzione della parte minerale. L'indagine della geologia sperimentale sulla dinamica di formazione⁽⁵⁾, l'applicazione diretta dei mezzi della chimica⁽⁶⁾, della microscopia⁽⁷⁾ e della röntgenografia⁽⁷⁾ hanno già por-

(1) W. OSTWALD, *Die Welt der vernachlässigten Dimensionen* (Th. Steinkopff, Dresden, 1927), p. 140.

(2) K. K. GEDROIZ, « Kolloidchemische Beihefte », 29, 161 (1929).

(3) W. O. ROBINSON and R. S. HOLMES, « U. S. Dept. of Agr. Bull. », 1311 (1924).

(4) P. L. GILE, H. E. MIDDLETON, W. O. ROBISON, W. H. FRY, M. S. ANDERSON, « U. S. Dept. of Agr. Bull. », 1193 (1924).

(5) E. BLANCK, « Handbuch der Bodenlehre », II, p. 193 e seg. (J. Springer, Berlin, 1929).

(6) W. O. ROBINSON and R. S. HOLMES, loco citato, V. NOVÁK und L. SMOLIK, « Koll. Zeitschr. », 32, 338 (1923); « Act. de la IV Conf. Int. de Pedologie », II, 128 (1926).

(7) S. B. HENDRICKS and W. H. FRY, « Soil Science », 29, 457 (1930).

tato a soddisfacenti risultati sull'origine e sulla natura di questa che è la parte predominante. Onde è lecito ritenere allo stato attuale delle cose che i costituenti minerali della frazione colloidale rappresentino le particelle ultime della alterazione fisica da una parte, e i prodotti solidi terminali dell'alterazione chimica dall'altra: e cioè particelle di silicati indecomposti, alluminio-silicati con carattere zeolitico ricomposti per sintesi dai prodotti ultimi della decomposizione, silice, sesquiossidi di alluminio e di ferro, ecc.; sostanze cristalline, sostanze amorfe, esistenti le une accanto alle altre; le une impastate con le altre, le seconde sulle prime in quanto esse rappresenterebbero lo strato decomposto delle particelle ancora indecomposte all'interno.

Tali metodi di indagine, specialmente quelli che si prefiggono l'identificazione dei singoli costituenti nelle dispersioni colloidali, siano essi chimici o fisici, lavorano però ancora in fase puramente sperimentale: a tale ricerca manca ancora un metodo controllato e sicuro che soddisfi per i suoi risultati pratici.

Non si è poi ancora addivenuti ad un accordo sulla scelta di un procedimento da seguire per la separazione di questa frazione colloidale. O meglio non è sul metodo di separazione che non si è d'accordo: difatti quello usato comunemente è il metodo per sedimentazione, o sotto la sola forza di gravità, come quello usato fra gli altri da Given⁽¹⁾, da Novák e Smolik⁽²⁾ e da Gedroiz⁽³⁾, o sotto l'impulso di una forza centrifuga, come è stato fatto da Robinson e Holmes⁽⁴⁾ e da Ungerer⁽⁵⁾. Solo qualche tentativo è stato fatto da Reifenberg⁽⁶⁾ per separare e frazionare il materiale colloidale mediante l'elettroforesi. Le opinioni sono invece discordi sul metodo di trattamento preliminare del terreno da cui deve venir estratto il colloide: ed in linea generale si può dire che le diverse proposte rispecchiano quelle fatte per il trattamento preliminare del terreno per l'analisi meccanica.

Non essendo possibile ancora trar partito dall'uso e dall'applicazione dei metodi che tentano la identificazione dei diversi composti colloidali, conviene tuttavia approfittare nel momento di quello che la tecnica ed il metodo sono capaci di offrire, pronti ad usufruire di quanto una indagine rigorosa ed accurata non mancherà di perseguire. Si è perciò tentato di stabilire quale valore possa avere la determinazione della composizione elementare eseguita sul complesso delle porzioni considerate per le loro dimensioni come colloidali e quale significato possa assumere tale composizione considerata a sè e messa in relazione con la composizione elementare del terreno, dal quale tali porzioni vengono separate.

(1) G. GIVEN, « Handbuch der Bodenlehre », VII, 97 (J. Springer, Berlin, 1931).

(2) V. NOVÁK und L. SMOLIK, loco citato.

(3) K. K. GEDROIZ, « Giorn. di Agricolt. Sperimentale » (russo), 22, 37 (1924).

(4) W. O. ROBINSON and R. S. HOLMES, loco citato.

(5) E. UNGERER, « Zeitschr. f. Pflanzenernähr., Düng. und. Bodenk. », 19, 111 (1931).

(6) A. REIFENBERG, « Zeitschr. f. Pflanzenernähr., Düng. und. Bodenk. », 21, 138 (1931).

PARTE SPERIMENTALE.

I terreni dai quali sono stati estratti i colloidi sono terreni privi di calcare, tutti e tre appartenenti a depositi alluvionali.

Un primo è del Campo Sperimentale Aniene, sito nei pressi del Monte Sacro, sulla destra del fiume Aniene, della R. Stazione Chimico-Agraria Sperimentale di Roma: è un terreno del quaternario recente dovuto ai depositi dell'Aniene.

Un secondo è dell'Azienda di Montecorvino Rovella, in provincia di Salerno, del Laboratorio delle Coltivazioni del R. Istituto Superiore Agrario di Portici: deriva da alluvioni fluviali recenti.

Un terzo è del Campo di Concimazioni in contrada Torretta in, Cerignola, provincia di Foggia, del Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Portici, ed è un terreno alluvionale posto su fondo lagunare o palustre del quaternario antico.

Tali terreni dopo essere stati lasciati essicare all'aria, sono stati passati al vaglio con fori di mm. 0.25 di diametro. Sulla parte passata attraverso lo staccio è stata fatta l'analisi chimica. I dati delle analisi si trovano riportati nella tabella I.

TABELLA I.
Composizione chimica dei terreni.

	Terreno di Montecorvino	Terreno di Roma	Terreno di Cerignola
Perdita a fuoco	7.480	12.329	2.890
SiO ₂	57.940	50.636	67.162
Al ₂ O ₃	19.974	22.320	14.032
Fe ₂ O ₃	4.749	8.573	5.341
CaO	2.632	2.708	2.711
MgO	1.723	0.799	3.545
K ₂ O	2.841	1.107	3.401
Na ₂ O	1.765	0.916	1.530

Grammi 250 della parte fina di ciascun terreno sono stati ripetutamente lavati allo scopo di allontanare le sostanze solubili, quindi portati in grosse capsule di porcellana, dispersi in acqua distillata, alla quale era stata aggiunta qualche goccia di ammoniac; lievemente, ripetutamente triturtati con pestelli di porcellana rivestiti di gomma. Dopo 24 ore le sospensioni sono state

decantate in grosse bacinelle di vetro della capacità di 30 litri circa: i residui di nuovo ripresi nelle capsule con acqua, di nuovo agitati e trituriati e dopo 24 ore le sospensioni di nuovo decantate nelle rispettive bacinelle. Così di seguito, fino a che i liquidi sovrastanti ai residui non si mostravano limpidi. A questo punto nelle bacinelle si venivano ad avere degli strati di sospensione alti all'incirca 20 cm. I liquidi di ciascuna bacinella, agitati prima ripetutamente, sono stati quindi lasciati in riposo in una camera oscura, interna, nella quale la temperatura si mantiene generalmente pressochè costante. Per separare la frazione con particelle di diametro inferiore a μ . 0.2, nel presente caso considerata come colloidale, si è calcolato il tempo di deposizione della formula che dà Stokes per il movimento di particelle sferiche pesanti in seno all'acqua.

$$V = \frac{2}{9} g r^2 \frac{d-d_0}{\eta}$$

Nel caso presente, per uno strato dell'altezza di cm. 10, il tempo di deposizione per le particelle con diametro superiore a μ . 0.2 è stato calcolato di 33 giorni. Perciò dopo 33 giorni, sifonando i liquidi dello strato dei primi 10 cm., si è venuta a separare la dispersione con particelle di diametro inferiore a μ . 0.2.

Come si è veduto, i terreni dai quali sono stati separati i colloidi non sono stati sottoposti ad alcun trattamento preliminare, se si eccettui il lavaggio, che è stato fatto per allontanare le sostanze solubili che avrebbero potuto ostacolare la dispersione o generare la coagulazione del materiale disperso, e l'aggiunta di qualche goccia di ammoniacca fatta allo scopo di creare un ambiente leggermente alcalino che favorisse la dispersione.

La separazione della sostanza colloidale è stata quindi fatta sul terreno così come si trova in natura, se non vengano considerate le piccole modificazioni, praticamente inevitabili, che può aver indotto nella fase dispersa il mezzo disperdente, l'acqua. Si è tenuto a questi punti di fondamentale importanza: disturbare il meno possibile l'equilibrio dei costituenti del terreno, avere tra le mani un materiale il più possibile inalterato ed omogeneo. Qualunque trattamento preliminare avrebbe invece influito molto più profondamente che non il semplice spappolamento in acqua sulla struttura delle più sottili particelle, e quindi sulla loro velocità di deposizione e sulla composizione del materiale. Solo per riferire qualche caso particolare; si sa che sul grado di dispersione e quindi sulla velocità di deposizione influisce molto la natura dei cationi di scambio⁽¹⁾; e si sa anche che la natura di tali cationi determina la diversa resistenza del complesso colloidale all'attacco degli agenti della decomposizione⁽²⁾, e che precisamente tali complessi vengono

(1) O. BOTTINI, « Atti IV Congr. di Chimica Pura ed Applicata », 1932.

(2) K. K. GEDROIZ, « Kolloidchemische Beihefte », 29, 200 (1929).

più o meno profondamente decomposti a seconda dei cationi che li saturano. Orbene, quando si va a saturare il terreno da cui debbono venire estratti i colloidi, con ioni sodio, come consiglia Gedroiz⁽¹⁾, si commette una imprudenza fondamentale. Si vanno a livellare nel terreno le porzioni differemente saturate e che per questo sono rimaste più o meno esposte agli agenti d'attacco ed hanno offerto maggiore o minore resistenza agli agenti della decomposizione: si vanno cioè a confondere particelle, che, simili per essersi originate molto probabilmente dalla medesima roccia madre, per azione di agenti molto probabilmente sempre gli stessi, hanno incominciato a differenziarsi quando si son venute a trovare in condizioni chimico-dispersoidali differenti.

Dalle dispersioni, separate come si è detto, circa 15 litri ognuna, è stata succhiata l'acqua con candele Chamberland. È stato seguito questo procedimento già usato da Robinson e Holmes⁽²⁾ e non quello seguito da Novák e Smolik, i quali facevano evaporare il liquido per intero, perchè si è preferito, data l'indole del lavoro, perdere qualche cosa della parte colloidale, precisamente quella che passa attraverso i fori della candela, piuttosto che correre il pericolo di dover esaminare un prodotto che avesse in sé sostanze eventualmente discioltesi per l'azione dell'acqua sui gr. 250 di terreno durante i 33 giorni. In ciascuna delle tre dispersioni il liquido è stato per tal maniera ridotto a pochi cc.; è stato raccolto il materiale attaccato a ciascuna candela: ciascuna frazione colloidale col liquido rispettivo è stata portata a secco in capsula. I residui sono stati essiccati a 110°. Di essi è stata determinata la composizione elementare. I dati si trovano riportati nella tabella II.

TABELLA II.

Composizione chimica del materiale colloidale.

	Materiali colloidali estratti dai terreni di		
	Montecorvino	Roma	Cerignola
Perdita a fuoco	14.400	13.880	11.120
SiO ₂	43.540	44.520	49.820
Al ₂ O ₃	28.948	27.490	25.140
Fe ₂ O ₃	8.560	9.160	8.460
CaO	0.796	2.663	0.925
MgO	0.767	0.912	1.535
K ₂ O	1.536	0.713	1.312
Na ₂ O	0.450	0.450	0.259

(1) K. K. GEDROIZ, « Kolloidchemische Beihefte », 29, 200 (1929).

(2) W. O. ROBINSON and R. S. HOLMES, loco citato.

Come è stato detto, il terreno rappresenta una miscela di prodotti della disgregazione e della decomposizione, un miscuglio di particelle che variano per grandezza, forma, natura e composizione chimica; la parte colloidale è anch'essa una miscela di composti diversi per grandezza, forma, natura e composizione. Quest'ultima però contiene del primo la parte più fine, quindi una maggiore percentuale di sostanza decomposta.

Il confronto fra le composizioni elementari di questi due materiali, terreno e sua parte più sottile, è lontano dall'essere il confronto tra minerale indecomposto ed ultimo resto della sua decomposizione. Esso può però assumerne tutto il significato, come lo si è fatto assumere al confronto tra composizione della roccia e composizione del terreno che da essa deriva, perchè in tal caso le due frazioni, terreno e colloide, differiscono non tanto per composizione mineralogica quanto per il diverso contenuto in materiale decomposto. Tale confronto, l'unico del resto possibile quando, come nel presente caso, non si possa stabilire alcun riferimento con la roccia madre, può dare, eccetto in alcuni casi particolari⁽¹⁾, delle indicazioni chiare e precise sul decorso del processo della decomposizione.

Dal confronto dei dati ottenuti si vede infatti chiaramente come in tali terreni la decomposizione chimica sia avviata verso la lisciviazione delle basi e della silice e come porti all'accumulo di sesquiossidi di ferro e di alluminio.

Una tale decomposizione, secondo Harrassowitz⁽²⁾ e secondo Lang⁽³⁾ è da riportarsi al tipo di decomposizione lateritica dei climi caldo-umidi. Più precisamente, in considerazione di quanto affermano gli stessi Autori, che cioè nel gruppo delle lateriti sono da distinguersi i seguenti tipi, lateriti, terre rosse e terre gialle, e di quanto sostiene Lang⁽⁴⁾, che le terre gialle sono caratterizzate da alti contenuti in silice, 60-80 %, che le terre rosse hanno quantità di silice che si muovono tra 25-60 % e che le lateriti hanno soltanto piccole quantità di silice, i terreni considerati mostrano caratteristiche che li farebbero rientrare nel tipo della terra rossa.

Ciò starebbe a conferma di quanto per scopi e con metodi differenti mise in evidenza la Scuola di Ulpiani⁽⁵⁾.

Del resto anche le condizioni climatiche delle regioni in cui sono stati prelevati i terreni considerati ben si accordano colle condizioni proprie di

(1) C. ULPANI, «Le Staz. Agr. Sper. Ital.», 45, 645 (1912).

(2) «H. HARROSSOWITZ in BLANCK, «Handbuch der Bodenlehre», III, 182. (J. Springer, Berlin, 1930).

(3) R. LANG, «Fortschr. d. Min.», p. 211 (1922).

(4) R. LANG, «Act. IV Conf. Int. de Pedologie», II, 661 (1926); in BLANCK, «Handbuch der Bodenlehre», III, 186.

(5) L. BERNARDINI e MAZZONE, «Staz. Sper. Agr. It.», 46, 146 (1913); A. DE DOMINICIS, «Staz. Sper. Agr. It.», 47, 282 (1914); A. DE DOMINICIS, «Ann. R. Scuola Sup. d'Agr. di Portici», vol. 15 (1920).

formazione della terra rossa. Secondo Lang ⁽¹⁾ si ha formazione di terra rossa con temperature medie annue che vanno dai 15° ai 20° e con fattori di pioggia (Regenfactoren) che vanno da 40 a 60 ⁽¹⁾. Nelle regioni considerate la temperatura media annua è pressochè la medesima: le stazioni meteorologiche di Roma ⁽²⁾, Salerno ⁽²⁾ e Foggia ⁽³⁾ danno infatti rispettivamente le temperature medie annuali di 15°, 4; di 16°, 6 e di 15°, 7. I dati medi di precipitazione forniti dalle tre stazioni sono rispettivamente 796; 965 e 601 mm., talchè i fattori di pioggia rispettivi sono 51, 58, 39.

A questo punto non può sfuggire anche ad una osservazione superficiale il fatto che coll'aumentare della quantità di precipitazione e, in questo caso in cui la temperatura è pressochè uguale per le tre regioni, coll'aumentare del fattore di pioggia, coll'aumentare cioè della lisciviazione, va diminuendo il valore del rapporto silice/sesquiossidi, come appare chiaramente dalla tabella III nella quale si trovano riportati i valori di tale rapporto per i tre colloidi analizzati.

TABELLA III.

Valori del rapporto silice sesquiossidi nei colloidi analizzati, calcolati sul materiale che ha subito la perdita a fuoco.

	Nei colloidi estratti dai terreni di		
	Montecorvino	Roma	Cerignola
Mol. di SiO ₂	0.843	0.857	0.929
Mol. di Al ₂ O ₃	0.330	0.312	0.276
Mol. di Fe ₂ O ₃	0.062	0.066	0.059
Valori del rapporto	2.150	2.267	2.773
Silice Sesquiossidi.			

Ma ancora un altro fatto è possibile desumere dal confronto delle composizioni elementari del colloide e del terreno.

Il valore delle differenze che si possono calcolare tra i dati della composizione elementare del terreno e quelli della composizione elementare del colloide possono dare una nozione sulla profondità di degradazione del terreno. Un terreno si mostrerà tanto più degradato quanto più la sua composizione elementare si avvicina a quella del colloide, tanto meno degradato quanto più se ne allontana.

(1) R. LANG, « Int. Mitt. f. Bodenkunde », 5, 312 (1915).

(2) G. ROSTER, *Climatologia dell'Italia* (U. T. E. T., Torino, 1909).

(3) E. DE CILLIS, *Quattro anni di sperimentazione nel Campo di aridocultura di Cerignola*. (Portici, 1931).

In tal caso l'analisi chimica verrebbe ad assumersi un ufficio dell'analisi meccanica; però anche in tale ufficio l'analisi chimica può dimostrarsi più sicura della meccanica, perchè si fonda, per decidere della degradazione, sulla intensità del processo di decomposizione, mentre l'analisi meccanica coinvolge nel metodo decomposizione e disgregazione.

E questo suo nuovo ufficio è veramente di grande importanza. Se si considera infatti che nel terreno il processo di decomposizione, di degradazione è tanto più attivo quanto maggiore è la quantità di materiale indecomposto, che la decomposizione porta ad una variazione profonda delle proprietà di un terreno e che è appunto nel processo di decomposizione che si rendono liberi quegli elementi che la pianta utilizza per i suoi fini, si comprenderà facilmente quale possa essere il valore della conoscenza del grado di degradazione di un terreno.

PERSONALE ACCADEMICO

L'Accademico Segretario PARRAVANO dà comunicazione all'Assemblea di una lettera con la quale [la Signora Valeria Ponzi, figlia del Senatore GIUSEPPE PONZI, già Socio e Presidente dell'Accademia, annuncia il dono di un ingente numero di manoscritti, carte e studi del padre.

L'Assemblea delibera di ringraziare vivamente la donatrice.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in omaggio segnalando il volume degli scritti di Raffaele Piria raccolti da D. Marotta; « Lo sviluppo dell'Industria Italiana nel 1° decennio dell'era fascista » pubblicato a cura della Confederazione generale fascista dell'industria; « I progressi dell'industria chimica italiana nel 1° decennio di regime fascista »; l'« Atlante internazionale delle nubi e degli stati del cielo ».

Il Corrisp. CROCCO presenta il trattato di « Aerodinamica » di E. Pistolesi e ne parla.

PRESENTAZIONE DI NOTE

Presentano Note per i « Rendiconti » i Soci ENRIQUES, GUIDI, LEVIVITA, MAJORANA.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio MAJORANA fa una comunicazione su una serie di esperienze da lui compiute relativamente ad un nuovo fenomeno fotoelettrico nelle lamine metalliche.

All'interessante relazione del Socio MAJORANA segue una elevata discussione alla quale prendono parte i Soci CORBINO, FERMI, BORDONI e CROCCO.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 dicembre 1932

- ALESSIO A. — Studio della serie di osservazioni radiogoniometriche eseguite sul piroscafo « Francesco Crispi » della Società « Citra » nel viaggio Genova-Dares Salam-Suez, nel novembre-dicembre 1931-x. (Estr. dalla « Rassegna delle poste, dei telegrafi e dei telefoni », nn. 7 e 8, 1932). Roma, 1932. 4°, pp. 1-16.
- ALFANI GUIDO. — Venticinque anni di valori pentadici. Parte I: Barometro e termometro. (Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano dei Padri Scolopi, Firenze, n. 144). Firenze, 1932. 4°, pentade 1-73.
- Associazione Italiana di Chimica. — I progressi dell'industria chimica italiana nel I Decennio di Regime Fascista. Raccolta di monografie curata da Domenico Marotta. Roma, Tipografia Editr. Italia, 1932. 4°, pp. 1-x, 1-550.
- CESÀRO G. — Sur la Guarinite. Formules à attribuer à ce minéral, à la *Hiortdablite* et à la *Wöhlérinite*. Relation entre les compositions chimiques de ces trois minéraux, ainsi qu'entre leurs formes cristallines et entre l'orientation des plans de leurs axes optiques. (Extrait des « Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique », Classe des Sciences, t. XII). Bruxelles, 1932. 8°, pp. 1-29.
- CESÀRO G. — I. Sur une propriété du décagone régulier; II. Sur une équation à coefficients entiers dont π est très approximativement la racine; III. Segments déterminés sur les médianes d'un triangle sphérique par leur point d'intersection; IV. Relation entre le périmètre, $2p$, et les rayons, r et R , des cercles inscrit et circonscrit, dans un triangle rectiligne isoscèle. (Extrait des « Mémoires de la Société royale des sciences de Liège ». T. XVII). Bruxelles, 1932. 8°, pp. 1-30.
- CISOTTI UMBERTO. — Sulle funzioni analitiche di ordine n regolari in un cerchio. (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Volume LXIV, fasc. XVI-XVIII). Pavia, 1931. 8°, pp. 1-7.
- CLERICI ENRICO. — Configurazioni medusoidi nell'argilla. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica Italiana ». Vol. L, pp. 233-236). Roma, 1931. 8°.
- CLERICI ENRICO. — La geologia e la paleontologia in Roma e nel Lazio. (Estr. dal volume « Le scienze fisiche e biologiche in Roma e nel Lazio »). Roma, 1932. 8°, pp. 1-33.
- CLERICI ENRICO. — Le escursioni a Ragusa, Siracusa, Catania e Taormina. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica Italiana ». Vol. L, pp. civ-cxii). Roma, 1931. 8°.
- CLERICI ENRICO. — Le sabbie del torrente Siele. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica Italiana ». Vol. L, pagine 244-245). Roma, 1931. 8°.
- Comitato Meteorologico Internazionale. — Atlante internazionale delle nubi e degli stati del cielo. (Estr. dell'opera completa per uso degli osservatori). Roma, 1932, 4°, pp. 1-44, tavv. 1-41.
- Confederazione Generale Fascista dell'Industria Italiana. — Lo sviluppo dell'industria italiana nel I Decennio dell'Era Fascista. 1922-1932. Milano, 1932. Oblungo, tavv. I-LXXXXVII.
- Consorzio di bonifica e trasformazione fondiaria del Tavoliere centrale. Foggia. — Piano di massima di bonifica e trasfor-

- mazione fondiaria del Comprensorio. Progetto esecutivo del centro rurale di Incoronata in agro di Foggia. Bari, Soc. Editr. Tipografica, 1932, 4°, pp. 1-XIX, 1-53, 1-37, tavv. 1-4.
- CONTI LUCIANO. — Trasporto solido nei corsi d'acqua. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici ». Anni 1930, fasc. 4°; 1931, fasc. 11°; 1932 fasc. 7°). Roma, 1932, 8°, pp. 1-117.
- D'AMBROSIO RAFFAELE. — Fusorario D'Ambrosio con istruzioni per l'uso e cenni sui fusi orari generali e sull'ora legale. Firenze, 1931-32, 8°, pp. 1-20.
- DE ASTIS GIUSEPPE. — Ricerche ebuliometriche e legge della scala alcoolica. (Comunicazione fatta al Congresso Internazionale della vite e del vino). Arezzo, 1932, 8°, pp. 1-32.
- NILSSON GERHARD. — Dass Doppelmolekül. Stockholm, 1932, 8°, pp. 1-6.
- PIRIA RAFFAELE. — Lavori scientifici e scritti vari raccolti da D. Marotta. (Associazione italiana di chimica). Roma, Tipografia Editr. Italia, 1932, 8°, pp. 1-VIII, 1-638.
- PISTOLESI ENRICO. — Aerodinamica (Biblioteca dell'Ingegnere 1). Torino, Unione Tipografico-Editr. Torinese, 1932, 8°, pp. 1-XVI, 1-573.
- SILVESTRI FILIPPO. — A new and extraordinary genus of the diplopod family Polydesmidae, from British Guiana (From « American Museum Novitates » N. 564). New York, 1932, 8°, pp. 1-12.
- SILVESTRI FILIPPO. — *Campodeidae* (Thysanura) de España. (Publicado en « Eos, Revista Española de Entomología ». Tomo VIII, pp. 115-164). Madrid, 1932, 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Description of a new genus and two new species of South American Diplopoda of the family Polydesmidae. (From « American Museum Novitates » N. 565). New York, 1932, 8°, pp. 1-4.
- WOODRING W. P. — A Miocene Mollusk of the genus *Haliotis* from the Temblor Range, California. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 81). Washington, 1932, 8°, pp. 1-4.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 dicembre 1932 (Anno XI)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica (Fisica matematica). — *Sulle deformazioni delle piastre elastiche. Nota II* ⁽¹⁾ del Socio E. ALMANZI.

1. Introduciamo le tensioni unitarie, agenti sugli elementi di superficie normali agli assi coordinati, τ_{xx} , τ_{yy} , $\tau_{\chi\chi}$, $\tau_{y\chi} = \tau_{\chi y}$, $\tau_{\chi x} = \tau_{x\chi}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; le quali, essendosi supposte nulle le forze di massa, dovranno verificare le tre equazioni:

$$(1) \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{x\chi}}{\partial \chi} = 0, \text{ ecc.}$$

Per un corpo isotropo, come supponiamo che sia la piastra, esse devono anche verificare le sei equazioni del Beltrami:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial \chi^2} = - \frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial \chi^2} = - \frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \text{ ecc.,} \end{cases}$$

ove $T = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{\chi\chi}$, e λ denota il *coefficiente di contrazione*. Quando le tensioni τ_{xx} , τ_{xy} , ... soddisfano questi due sistemi di equazioni, esse corrispondono ad una deformazione possibile del corpo.

(1) Presentata nella seduta del 18 dicembre 1932.

In un punto P della sua superficie, se $\tau_x d\omega$, $\tau_y d\omega$, $\tau_z d\omega$ sono le componenti della tensione che agisce sull'elemento $d\omega$ attiguo a P, e α , β , γ i coseni della normale rivolta verso l'esterno, si ha:

$$\tau_x = \tau_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma, \text{ ecc.}$$

Sul bordo della piastra, ove $\gamma = 0$, sarà:

$$\tau_x = \tau_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta, \quad \tau_y = \tau_{yx} \alpha + \tau_{yy} \beta, \quad \tau_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta.$$

Sulle basi, ove $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \pm 1$, e che si suppongono libere, dovrà essere:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{zz} = 0.$$

2. Supponiamo assegnate, per ogni segmento t del bordo, le cinque sollecitazioni f_x, f_y, f_z, m_x, m_y , che soddisfino le sei condizioni d'equilibrio (formule (6) della Nota I):

$$\begin{aligned} \int_s f_x ds &= 0, & \int_s f_y ds &= 0, & \int_s (xf_y - yf_x) ds &= 0, \\ \int_s f_z ds &= 0, & \int_s (m_x - xf_z) ds &= 0, & \int_s (m_y - yf_z) ds &= 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che se si suppongono nulle le tre sollecitazioni f_z, m_x, m_y , conservando ad f_x ed f_y i loro valori, queste sei condizioni sono ancora verificate (le ultime tre si riducono a identità). Parimente esse sono verificate se annulliamo f_x ed f_y , conservando inalterate f_z, m_x ed m_y . Volendo dunque costruire delle deformazioni corrispondenti a date sollecitazioni, noi potremo esaminare separatamente i due casi, che siano differenti da zero soltanto la f_x e la f_y , ovvero la f_z , la m_x , e la m_y .

È facile costruire una deformazione corrispondente a dati valori di f_x ed f_y , e a valori nulli delle altre tre sollecitazioni.

Introduciamo per ciò una funzione *biarmonica* U delle variabili x ed y , ossia una funzione di x ed y che verifichi l'equazione

$$(3) \quad \Delta \Delta U = 0,$$

ove

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

e poniamo:

$$(4) \quad \Phi = U - \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)} \Delta U \cdot \chi^2;$$

$$\tau_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{zz} = 0.$$

Si verifica facilmente che le tre equazioni (1) e le sei equazioni (2) sono soddisfatte. Tralascio la verifica, limitandomi ad osservare che, essendo $\tau_{\chi\chi} = 0$, sarà:

$$T = \tau_{xx} + \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Delta \Phi = \Delta U \quad (1).$$

3. Avendosi, in tutta la piastra, $\tau_{\chi x} = \tau_{\chi y} = \tau_{\chi z} = 0$, le basi risulteranno libere.

Cerchiamo ora le espressioni delle sollecitazioni.

Si ha sul bordo:

$$\tau_x = \tau_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \beta,$$

$$\tau_y = \tau_{xy} \alpha + \tau_{yy} \beta = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \beta,$$

$$\tau_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = 0.$$

Onde avremo:

$$f_x = \int_{-a}^{+a} \tau_x d\chi = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^{+a} \Phi d\chi \cdot \alpha - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-a}^{+a} \Phi d\chi \cdot \beta,$$

$$f_y = \int_{-a}^{+a} \tau_y d\chi = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-a}^{+a} \Phi d\chi \cdot \alpha + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a}^{+a} \Phi d\chi \cdot \beta.$$

Introduciamo la funzione di x ed y

$$(5) \quad W = \int_{-a}^{+a} \Phi d\chi.$$

Sarà

$$f_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \alpha - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \beta, \quad f_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \alpha + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \beta,$$

ovvero:

$$(6) \quad f_x = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad f_y = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Dalla formula (5), sostituendo a Φ la sua espressione (4), si ha:

$$W = \int_{-a}^{+a} \left\{ U - \frac{\lambda}{2(1+\lambda)} \Delta U \cdot \chi^2 \right\} d\chi;$$

(1) Su questa deformazione, e su l'altra esaminata nel § 5, v. anche le due Note di G. SUPINO: *Sul problema di Clebsch*, «Rend. Acc. Lincei», serie 6^a, vol. XV (1932), p. 366; *Sopra la deformazione delle lastre*, ib., p. 448.

ed eseguendo le integrazioni:

$$(7) \quad W = U \cdot 2a - \frac{\lambda}{3(1+\lambda)} \Delta U \cdot a^3.$$

Essendo $\tau_z = 0$, la f_z sarà nulla. Inoltre:

$$m_x = \int_{-a}^{+a} \tau_x z dz = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^{+a} \Phi z dz \cdot \alpha - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-a}^{+a} \Phi z dz \cdot \beta.$$

Ma la funzione Φ è pari in z , quindi $\int_{-a}^{+a} \Phi z dz = 0$, e perciò $m_x = 0$.

Analogamente sarà $m_y = 0$.

Notiamo che dalla formula (7) si deduce $\Delta W = 2a \Delta U$, $\Delta \Delta W = 0$. La W è dunque, come la U , una funzione biarmonica. Sostituendo nella (7) a ΔU $\frac{\Delta W}{2a}$, e risolvendo rispetto ad U , si ottiene:

$$(8) \quad U = \frac{1}{2a} \left\{ W + \frac{\lambda}{6(1+\lambda)} \Delta W \cdot a^2 \right\}.$$

Se W è una funzione *lineare* di x ed y , tali saranno, per le formule (8) e (4), anche la U e la Φ . Le tensioni τ_{xx} , τ_{xy} , ... sono allora nulle, ed è quindi nulla la deformazione. Ne segue che aggiungendo a W una funzione lineare, la deformazione non varia.

4. Supponendo assegnate f_x ed f_y , proponiamoci di determinare nell'area σ , quindi in tutta la piastra, la W , funzione biarmonica di x ed y . Della funzione lineare che può aggiungersi a W disporremo in modo che nel punto $s = 0$ del contorno sia $W = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$. Avremo allora dalle formule (6):

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \int_0^s f_y ds, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \int_0^s f_x ds.$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s} &= \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{ds} = - \frac{dx}{ds} \int_0^s f_y ds + \frac{dy}{ds} \int_0^s f_x ds = \\ &= \frac{d}{ds} \left\{ y \int_0^s f_x ds - x \int_0^s f_y ds \right\} + x f_y - y f_x; \end{aligned}$$

e integrando:

$$W = y \int_0^s f_x ds - x \int_0^s f_y ds + \int_0^s (x f_y - y f_x) ds.$$

Inoltre si ha sul contorno:

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x} \alpha + \frac{\partial W}{\partial y} \beta = \int_0^s f_x ds \cdot \beta - \int_0^s f_y ds \cdot \alpha.$$

Chiamando F_x, F_y, M_z le forze e il momento che agiscono sul settore del bordo compreso fra i due segmenti t corrispondenti ai valori 0 ed s dell'arco, le due ultime formule potremo anche scriverle

$$W = yF_x - xF_y + M_z, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = F_x \beta - F_y \alpha.$$

Queste condizioni determinano la funzione biarmonica W ; quindi la U , la Φ , e infine le tensioni $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \dots$

Chiameremo (A) la classe di deformazioni che abbiamo considerato.

5. Deformazioni a cui corrispondono valori nulli di f_x ed f_y , ma non di f_z, m_x, m_y , si possono costruire mediante una funzione biarmonica $V(x, y)$, ponendo:

$$(9) \quad \Psi = -\frac{1-\lambda}{1+\lambda} V \cdot \chi + \frac{2-\lambda}{6(1+\lambda)} \Delta V \cdot \chi^3,$$

$$(10) \quad \chi = -\frac{1}{2(1+\lambda)} \Delta V (\chi^2 - a^2),$$

$$(11) \quad \begin{cases} \tau_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial \chi} & , & \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \chi}{\partial \chi} & , & \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \\ \tau_{zx} = \frac{\partial \chi}{\partial x} & , & \tau_{zy} = \frac{\partial \chi}{\partial y} & , & \tau_{zz} = 0. \end{cases}$$

Tralascio anche qui di dimostrare che le equazioni (1) e (2) sono soddisfatte, limitandomi ad osservare che

$$T = \Delta V \cdot \chi.$$

Sul bordo agiranno le tensioni

$$(12) \quad \begin{cases} \tau_x = \tau_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \alpha - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \beta - \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \alpha, \\ \tau_y = \tau_{xy} \alpha + \tau_{yy} \beta = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \alpha + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \beta - \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \beta, \\ \tau_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = \frac{\partial \chi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \chi}{\partial y} \beta. \end{cases}$$

Sulle basi, ove $z = \pm a$, sarà $\chi = 0$, quindi ancora $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0$, e perciò $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Ma è pure $\tau_{xz} = 0$. Le basi sono dunque libere.

Le due sollecitazioni $f_x = \int_{-a}^{+a} \tau_x d\zeta$, $f_y = \int_{-a}^{+a} \tau_y d\zeta$, essendo Ψ e $\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}$ funzioni dispari in ζ , saranno nulle. Per esprimere le altre tre

$$(13) \quad f_z = \int_{-a}^{+a} \tau_z d\zeta, \quad m_x = \int_{-a}^{+a} \tau_x \zeta d\zeta, \quad m_y = \int_{-a}^{+a} \tau_y \zeta d\zeta,$$

introduciamo la funzione

$$(14) \quad W = \int_{-a}^{+a} \Psi \zeta d\zeta.$$

Avremo dalla formula (9):

$$(15) \quad W = -\frac{2(1-\lambda)}{3(1+\lambda)} V \cdot a^3 + \frac{2-\lambda}{15(1+\lambda)} \Delta V \cdot a^5.$$

La funzione W sarà biarmonica come la V .

Si ha poi dalla (10):

$$\int_{-a}^{+a} \chi d\zeta = \frac{2}{3(1+\lambda)} \Delta V \cdot a^3, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} = -\frac{1}{1+\lambda} \Delta V \cdot \zeta, \\ \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \zeta d\zeta = -\frac{2}{3(1+\lambda)} \Delta V \cdot a^3.$$

Ma per la (15) $\Delta W = -\frac{2(1-\lambda)}{3(1+\lambda)} \Delta V \cdot a^3$, da cui

$$(16) \quad \Delta V = -\frac{3(1+\lambda)}{2(1-\lambda)} \frac{\Delta W}{a^3}.$$

Dunque:

$$(17) \quad \int_{-a}^{+a} \chi d\zeta = -\frac{1}{1-\lambda} \Delta W, \quad \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \zeta d\zeta = \frac{1}{1-\lambda} \Delta W.$$

Ora dalle formule (13) e (12) si ha:

$$f_z = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^{+a} \chi d\zeta \cdot \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^{+a} \chi d\zeta \cdot \beta = \frac{\partial}{\partial n} \int_{-a}^{+a} \chi d\zeta, \\ m_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^{+a} \Psi \zeta d\zeta \cdot \alpha - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-a}^{+a} \Psi \zeta d\zeta \cdot \beta - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \zeta d\zeta \cdot \alpha = \\ = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-a}^{+a} \Psi \zeta d\zeta - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \zeta d\zeta \cdot \alpha,$$

$$\begin{aligned}
 m_y &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-a}^{+a} \Psi_{\tilde{\chi}} d\tilde{\chi} \cdot \alpha + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-a}^{+a} \Psi_{\tilde{\chi}} d\tilde{\chi} \cdot \beta - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\chi}} \tilde{\chi} d\tilde{\chi} \cdot \beta = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^{+a} \Psi_{\tilde{\chi}} d\tilde{\chi} - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\chi}} \tilde{\chi} d\tilde{\chi} \cdot \beta;
 \end{aligned}$$

quindi, tenendo conto della (14) e delle (17):

$$(18) \left\{ \begin{aligned} f_{\tilde{\chi}} &= -\frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial \Delta W}{\partial n}, \\ m_x &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{1-\lambda} \Delta W \cdot \alpha, \quad m_y = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{1-\lambda} \Delta W \cdot \beta, \end{aligned} \right.$$

formule che ci danno le sollecitazioni $f_{\tilde{\chi}}, m_x, m_y$ espresse mediante l'unica funzione biarmonica $W(x, y)$.

Per mezzo della W potremo esprimere la V , sostituendo nella (15) a ΔV la sua espressione data dalla (16), e risolvendo l'equazione rispetto a V . Si ottiene:

$$V = -\frac{3(1+\lambda)}{2(1-\lambda)} \left\{ \frac{W}{a^3} + \frac{2-\lambda}{10(1+\lambda)} \frac{\Delta W}{a} \right\}.$$

Fissata la W , quest'ultima equazione ci dà la V , le formule (9) e (10) ci danno le funzioni Ψ e χ , e le (11) le tensioni. Come per le deformazioni (A), se la funzione W è lineare la deformazione è nulla.

Chiameremo (B) questa seconda classe di deformazioni.

È da osservare che, dipendendo una funzione biarmonica $W(x, y)$ da due funzioni di s (per es. i valori di W e di $\frac{\partial W}{\partial n}$ sul contorno), non esisterà, in generale, una deformazione (B) alla quale corrispondano valori assegnati delle tre sollecitazioni $f_{\tilde{\chi}}, m_x, m_y$. E per conseguenza non esisterà, in generale, una deformazione risultante di una (A) e di una (B), a cui corrispondano valori assegnati delle cinque sollecitazioni $f_x, f_y, f_{\tilde{\chi}}, m_x, m_y$. È perciò necessario introdurre una terza classe di deformazioni.

Fisica (Fisica matematica). — *Sulle deformazioni delle piastre elastiche.*
Nota III del Socio E. ALMANZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale.* Nota ⁽¹⁾ di G. ASCOLI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sin dal 1894 è stato dimostrato da A. Pringsheim ⁽²⁾ il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè sussista lo sviluppo:

$$(1) \quad f(a + b) = f(a) + bf'(a) + \dots + \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

per $0 \leq b < R$ è che la $f(x)$ sia indefinitamente derivabile in a (a destra) e per ogni x tra a e $a + R$ e che per ogni r tale che $0 < r < R$ l'espressione

$$R_n = \frac{(1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} b^n f^{(n)}(a + \theta b)$$

considerata come funzione di θ e di b , tenda a zero per $n \rightarrow \infty$, uniformemente nel campo $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq b \leq r$.

L'espressione R_n , per un conveniente valore di θ , non è altro che il termine complementare dello sviluppo abbreviato di Taylor, nella forma di Cauchy; ciò rende evidente la sufficienza della condizione (anche ristretta alla sola convergenza uniforme rispetto a θ); mentre non è affatto evidente la sua necessità. La dimostrazione del Pringsheim, assai laboriosa, fu semplificata da E. Pascal ⁽³⁾, poi sostituita dal Pringsheim stesso ⁽⁴⁾ con altra diretta e assai breve. Notevole per la sua eleganza è poi il procedimento di G. Fubini ⁽⁵⁾, che riesce a stabilire insieme, in modo molto rapido, il criterio di Pringsheim e un altro criterio di sviluppabilità, dovuto a S. Bernstein.

Nota il Pringsheim che il risultato da lui ottenuto conferisce una particolare importanza al resto di Cauchy in confronto, per es., del più sem-

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(2) A. PRINGSHEIM, *Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Variablen* («Math. Ann.», 44, 1894, pp. 57-82).

(3) E. PASCAL, *Un capitolo di Calcolo differenziale* («Riv. di Matematica», 1895, p. 37) e *Esercizi e note critiche di Calcolo infinitesimale*, pp. 196-207.

(4) A. PRINGSHEIM, *Ueber den Taylorschen Lehrsatz für Funktionen einer reellen Variablen* («Sitzungsber. d. K. Akad. München», 1912, pp. 137-54).

(5) G. FUBINI, *I teoremi di Bernstein e Pringsheim per lo sviluppo in serie di Taylor* («Atti R. Accad. Sc. di Torino», 51, 1915-16, 896-898).

plice resto di Lagrange; esistono infatti funzioni sviluppabili in serie di Taylor per le quali questo resto non converge a zero uniformemente rispetto a θ per $n \rightarrow \infty$, per ogni $h < R$. Singolare però il fatto che la convergenza sussiste necessariamente per $h < R/2$ e anche uniformemente rispetto a θ e h , per $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq h \leq r < R/2$.

Volendo approfondire le ragioni di questo diverso comportamento ho pensato che esso potesse risultare dallo studio del così detto resto di Schlömilch e Roche:

$$R_n^{(p)} = \frac{(1 - \theta)^{n-p}}{p(n-1)!} h^n f^{(n)}(a + \theta h)$$

in quanto esso si riduce per $p = 1$ al resto di Cauchy e per $p = n$ a quello di Lagrange.

Supposto p positivo e variabile con n con legge determinata, ho potuto infatti dimostrare il teorema seguente che estende e completa quello di Pringsheim:

A) Il teorema di Pringsheim continua a sussistere se al posto dell'espressione R_n si pone l'altra $R_n^{(p)}$, allora e allora soltanto che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$$

È chiaro che $p = 1$ (e più in generale $p = \text{cost.}$) soddisfa a questa condizione; non vi soddisfa $p = n$. L'osservazione del Pringsheim relativa al resto di Lagrange si estende poi nel modo seguente:

B) Sia per n abbastanza grande $p \leq n$ e si ponga

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{p}{n} \quad , \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sqrt[n]{p}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + t(1-t)^{\frac{1}{L}-1}} \quad \text{per} \quad 0 < t < 1 \quad , \quad \varphi(0) = 1 \quad , \quad \varphi(1) = \frac{1}{2} .$$

Si indichi poi con γ il minore dei numeri α e $\varphi(L)$. Allora per ogni funzione $f(x)$ per cui valga lo sviluppo (1) per $0 \leq h < R$ l'espressione $R_n^{(p)}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, uniformemente rispetto a θ per $0 \leq h < R\gamma$, uniformemente rispetto a θ e h per $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq h \leq r < R\gamma$. Non si può in questo enunciato sostituire a γ un numero maggiore.

Il teorema A) non è che un caso particolare del teorema B), corrispondente all'ipotesi $\gamma = 1$. Le dimostrazioni sono in corso di stampa negli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ».

Colgo l'occasione per comunicare una semplificazione che si può portare alle citate dimostrazioni di Fubini dei teoremi di Bernstein e Pringsheim, e che le rende ancora più agili, senza alterarne il concetto essenziale.

a) (Bernstein) Se per $a \leq x < a + R$ la $f(x)$ e tutte le sue derivate sono positive o nulle lo sviluppo di Taylor (1) è valido per $0 \leq h < R$.

Sia $0 \leq h < R$, $0 \leq \theta \leq 1$. Poichè $a + h = (a + \theta h) + (1 - \theta)h$, dal teorema di Taylor-Lagrange si ha:

$$f''(a + h) = f''(a + \theta h) + (1 - \theta)h f'''(a + \theta h) + \dots + \\ + \frac{(1 - \theta)^{n-2}}{(n-2)!} h^{n-2} f^{(n)}(a + \theta h) + \frac{(1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} h^{n-1} f^{(n+1)}(\xi)$$

dove $a + \theta h \leq \xi \leq a + h$. Poichè i termini del secondo membro sono tutti ≥ 0 , si ha

$$\frac{(1 - \theta)^{n-2}}{(n-2)!} h^{n-2} f^{(n)}(a + \theta h) \leq f''(a + h)$$

e quindi:

$$R_n = \frac{(1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} h^n f^{(n)}(a + \theta h) \leq \\ \leq \frac{h^2 (1 - \theta)}{n-1} f''(a + h) \leq \frac{h^2}{n-1} f''(a + h).$$

Ora il primo membro è il resto di Cauchy nello sviluppo di $f(a + h)$ riferito al punto a ; è chiaro che esso tende a zero per $n \rightarrow \infty$, uniformemente per $0 \leq \theta \leq 1$, e quindi lo sviluppo è valido.

La convergenza è anche uniforme rispetto a θ e h , per $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq h \leq r < R$; infatti poichè f'' è crescente (poichè f''' è positiva), si ha in questo campo

$$R_n \leq \frac{r^2}{n-1} f''(a + r).$$

b) Si osserva dopo ciò, con Fubini, che se per una funzione $f(x)$ vale lo sviluppo (1), $f(x)$ è la differenza di due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ che soddisfano alle condizioni del teorema di Bernstein, bastando per questo associare nello sviluppo i termini con coefficiente positivo e quelli con coefficiente negativo. Applicando allora alla $\varphi(x)$ e alla $\psi(x)$ la maggiorazione (1), e sottraendo, risulta per $f(x)$

$$R_n \leq \frac{r^2}{n-1} (\varphi''(a + r) + \psi''(a + r))$$

e di qui il teorema di Pringsheim.

Matematica. — *Sulle deformazioni non infinitesime.* Nota di D. BONVICINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un'osservazione sull'applicazione del criterio energetico allo studio della stabilità dell'equilibrio elastico ⁽²⁾ ho affermato che, poichè la deformazione pura si deduce dallo spostamento mediante operazioni non tutte lineari, è necessario considerare la variazione seconda di essa in relazione ad una data variazione dello spostamento medesimo. Di tale questione intendendo occuparmi in questa breve nota.

Si indichi con P il punto generico nello stato attuale, con P_0 il punto medesimo nello stato iniziale, cioè indeformato; con s lo spostamento attuale riferito a quest'ultimo stato:

$$s = P - P_0.$$

Per deformazione s'intenderà l'omografia

$$\alpha = \frac{ds}{dP_0}.$$

Posto poi

$$1 + \alpha = \gamma \alpha_0,$$

dove con γ sia indicata una dilatazione, con α_0 un'isomeria vettoriale, si designerà come deformazione pura la dilatazione $\gamma - 1$. È noto che una tale decomposizione è possibile per qualsiasi omografia, e che la γ risulta definita dalla relazione

$$(1) \quad \gamma^2 = (1 + \alpha)(1 + K\alpha)^{(3)}.$$

(Nel caso degli spostamenti infinitesimi la deformazione pura deve ridursi alla $D\alpha$: si ha infatti

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &= (1 + D\alpha)(1 + V\alpha \wedge) + \text{termini d'ord. sup.} = \\ &= (1 + D\alpha)\alpha_0 + \text{termini d'ord. sup.} \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1932.

(2) «Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», vol. LXVI, 1931, p. 186.

(3) Potrebbe anche porsi $1 + \alpha = \alpha_0 \gamma'$, con $\gamma'^2 = (1 + K\alpha)(1 + \alpha)$, e definirsi come deformazione pura la dilatazione $\gamma' - 1$. Ma poichè questa non è che la trasformata della $\gamma - 1$ mediante l'isomeria α_0 , la differenza tra le due definizioni non è sostanziale, almeno per il caso dei corpi isotropi.

Per un incremento δs dello spostamento, posto

$$\varepsilon = \frac{d\delta s}{dP},$$

si ha

$$\delta(1 + \alpha) = \delta\alpha = \frac{d\delta s}{dP_0} = \varepsilon(1 + \alpha);$$

onde

$$\delta(1 + K\alpha) = K\delta\alpha = (1 + K\alpha)K\varepsilon;$$

e quindi si ha dalla (1) per la variazione di γ^2 , a meno di termini d'ordine superiore al primo rispetto a δs , l'espressione

$$\delta\gamma^2 = \varepsilon(1 + \alpha)(1 + K\alpha) + (1 + \alpha)(1 + K\alpha)K\varepsilon = \varepsilon\gamma^2 + \gamma^2 K\varepsilon;$$

ossia

$$(2) \quad \delta\gamma^2 = 2D(\varepsilon\gamma^2).$$

L'espressione vettoriale che di qui si potrebbe ricavare per $\delta\gamma$, variazione prima della deformazione pura, non è tanto semplice ⁽¹⁾.

Ma la variazione di γ può restar determinata nel modo più conveniente per l'ulteriore sviluppo di questa ricerca, immaginandola decomposta in una variazione dei coefficienti principali di essa, ed una rotazione delle direzioni principali: basta allora evidentemente trovare queste medesime quantità relative alla variazione di γ^2 . Le direzioni principali comuni alle dilatazioni γ^2 e γ saranno definite da tre vettori unitari ortogonali i, j, k ($i \wedge j = k$); e si chiameranno l_1^2, l_2^2, l_3^2 i corrispondenti coefficienti principali di γ^2 , ossia l_1, l_2, l_3 quelli di γ . Se si indica con δ^* la variazione che si avrebbe se mutassero solo questi coefficienti, restando ferme le direzioni suddette, con ω il vettore che definisce la rotazione di queste, e con Rotor (ω) l'isomeria vettoriale corrispondente alla rotazione ω , si ha evidentemente

$$(3) \quad \gamma^2 + \delta\gamma^2 = \text{Rotor}(\omega)(\gamma^2 + \delta^*\gamma^2)\text{Rotor}(-\omega);$$

o anche, tralasciando sempre gl'infinitesimi d'ordine superiore al primo,

$$(3') \quad \gamma^2 + \delta\gamma^2 = (1 + \omega \wedge)(\gamma^2 + \delta^*\gamma^2)(1 - \omega \wedge);$$

onde per la (2)

$$\delta^*\gamma^2 + \omega \wedge \gamma^2 - \gamma^2(\omega \wedge) = 2D(\varepsilon\gamma^2);$$

ossia

$$\delta^*\gamma^2 = 2D(\varepsilon\gamma^2 - \omega \wedge \gamma^2).$$

(1) Dalla (2) si ha $\delta\gamma \cdot \gamma + \gamma \delta\gamma = 2D(\varepsilon\gamma^2)$; ossia $\delta\gamma \cdot \gamma = \varepsilon\gamma^2 + u \wedge$; da cui $\delta\gamma = \varepsilon\gamma + u \wedge \gamma^{-1}$; e dovendo questa essere una dilatazione, $2V(u \wedge \gamma^{-1}) = -2V(\varepsilon\gamma)$; ossia $C\gamma^{-1}u = -2V(\varepsilon\gamma)$; da cui $u = -2(C\gamma^{-1})^{-1}V(\varepsilon\gamma)$; onde infine $\delta\gamma = \varepsilon\gamma - 2\{(C\gamma^{-1})^{-1}V(\varepsilon\gamma)\} \wedge \gamma^{-1}$.

Quindi

$$\delta^* \gamma^2 \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 2 \varepsilon \gamma^2 \mathbf{i} \times \mathbf{i}, \dots;$$

$$\omega \wedge \gamma^2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + \omega \wedge \gamma^2 \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \varepsilon \gamma^2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + \varepsilon \gamma^2 \mathbf{j} \times \mathbf{i}, \dots$$

Posto

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{i} = e_{11} \mathbf{i} + e_{12} \mathbf{j} + e_{13} \mathbf{k} \\ \varepsilon \mathbf{j} = e_{21} \mathbf{i} + e_{22} \mathbf{j} + e_{23} \mathbf{k} \\ \varepsilon \mathbf{k} = e_{31} \mathbf{i} + e_{32} \mathbf{j} + e_{33} \mathbf{k}, \end{cases}$$

risulta dalla prima di queste relazioni, per la definizione di δ^* ,

$$\delta l_1^2 = 2 l_1^2 e_{11}, \dots;$$

onde

$$(4) \quad \begin{cases} \delta l_1 = l_1 e_{11} \\ \delta l_2 = l_2 e_{22} \\ \delta l_3 = l_3 e_{33}; \end{cases}$$

e dalla seconda

$$(5) \quad (l_1^2 - l_2^2) \omega \times \mathbf{k} = l_1^2 e_{12} + l_2^2 e_{21}, \dots;$$

ossia

$$\omega = \frac{l_2^2 e_{23} + l_3^2 e_{32}}{l_2^2 - l_3^2} \mathbf{i} + \frac{l_3^2 e_{31} + l_1^2 e_{13}}{l_3^2 - l_1^2} \mathbf{j} + \frac{l_1^2 e_{12} + l_2^2 e_{21}}{l_1^2 - l_2^2} \mathbf{k}.$$

Si tratta ora di determinare la variazione delle quantità trovate per un incremento dello spostamento $\bar{\delta} \mathbf{s}$. Siccome nel caso dei corpi isotropi, al quale si ha in vista di applicare i risultati, non ha importanza il mutamento delle direzioni principali, limiterò la ricerca alle variazioni $\bar{\delta} \delta l_1, \bar{\delta} \delta l_2, \bar{\delta} \delta l_3$, a meno s'intende d'infinitesimi d'ordine superiore al primo rispetto a $\bar{\delta} \mathbf{s}$. Si ha dalla (4)

$$\delta \delta l_1 = l_1 \delta e_{11} + e_{11} \delta l_1;$$

dove

$$\bar{\delta} e_{11} = \bar{\delta} (\varepsilon \mathbf{i} \times \mathbf{i}) = \varepsilon \mathbf{i} \times \bar{\delta} \mathbf{i} + \varepsilon \bar{\delta} \mathbf{i} \times \mathbf{i} + (\bar{\delta} \varepsilon) \mathbf{i} \times \mathbf{i}.$$

Ma

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \varepsilon &= \frac{d \delta \mathbf{s}}{d(P + \bar{\delta} \mathbf{s})} - \frac{d \delta \mathbf{s}}{dP} + \text{term. d'ord. sup.} = \\ &= - \frac{d \delta \mathbf{s}}{dP} \frac{d \bar{\delta} \mathbf{s}}{dP} = - \varepsilon \bar{\varepsilon}; \end{aligned}$$

e

$$\delta \mathbf{i} = \omega \wedge \mathbf{i};$$

avendo $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\omega}$ lo stesso significato dei corrispondenti simboli non soprassegnati, ma con riguardo all'incremento δs . Onde

$$\begin{aligned}\delta e_{11} &= \varepsilon \mathbf{i} \times \omega \wedge \mathbf{i} + \varepsilon (\omega \wedge \mathbf{i}) \times \mathbf{i} - \varepsilon \bar{\varepsilon} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \\ &= (e_{21} + e_{12}) \frac{l_1^2 \bar{e}_{12} + l_2^2 \bar{e}_{21}}{l_1^2 - l_2^2} + (e_{31} + e_{13}) \frac{l_1^2 \bar{e}_{13} + l_3^2 \bar{e}_{31}}{l_1^2 - l_3^2} - (e_{11} \bar{e}_{11} + e_{21} \bar{e}_{12} + e_{31} \bar{e}_{13}) = \\ &= -e_{11} \bar{e}_{11} + \frac{1}{l_1^2 - l_2^2} \{ l_1^2 e_{12} \bar{e}_{12} + l_2^2 (e_{21} \bar{e}_{12} + e_{12} \bar{e}_{21} + e_{21} \bar{e}_{21}) \} + \\ &\quad + \frac{1}{l_1^2 - l_3^2} \{ l_1^2 e_{13} \bar{e}_{13} + l_3^2 (e_{31} \bar{e}_{13} + e_{13} \bar{e}_{31} + e_{31} \bar{e}_{31}) \} \\ &\quad (\bar{e}_{11} = \varepsilon \mathbf{i} \times \mathbf{i}, \quad \bar{e}_{12} = \varepsilon \mathbf{i} \times \mathbf{j}, \dots).\end{aligned}$$

E infine

$$\begin{aligned}(6) \quad \bar{\delta} \delta l_1 &= \frac{l_1}{l_1^2 - l_2^2} \{ (l_1^2 e_{12} + l_2^2 e_{21}) \bar{e}_{12} + l_2^2 (e_{12} + e_{21}) \bar{e}_{21} \} + \\ &\quad + \frac{l_1}{l_1^2 - l_3^2} \{ (l_1^2 e_{13} + l_3^2 e_{31}) \bar{e}_{13} + l_3^2 (e_{13} + e_{31}) \bar{e}_{31} \}.\end{aligned}$$

(Risulta quindi, semprechè quest'espressione non perda significato, $\bar{\delta} \delta l_1 = \delta \bar{\delta} l_1$). Le analoghe espressioni per la variazione seconda di l_2 ed l_3 si hanno da questa con permutazione circolare degli indici.

Richiede considerazione a parte il caso che due dei coefficienti l_1, l_2, l_3 siano eguali tra loro. Se $l_1 = l_2$, ogni coppia ortogonale di vettori unitari del piano normale a \mathbf{k} potrebbe essere assunta per \mathbf{i} e \mathbf{j} ; ma dopo la variazione, per una data ε , risulterà generalmente invece determinata una coppia di direzioni principali, la quale tenderà ad una determinata coppia del piano suddetto: riguardando quest'ultima come coppia principale originaria, si potrà dunque ancora considerare la rotazione infinitesima ω , soddisfacente alla (3'), e per conseguenza alla (5); la quale dà allora la condizione che vale a definire la coppia di direzioni suddetta,

$$e_{12} + e_{21} = 0.$$

Tali direzioni sono dunque quelle principali dell'omografia $\varepsilon - H(K \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k})$, considerata come omografia del piano normale a \mathbf{k} ; e i corrispondenti valori di e_{11}, e_{22} delle formule (4) sono pertanto in questo caso il massimo e il minimo tra i valori che tali componenti di ε possono assumere per tutte le direzioni di esso piano. La (5) medesima non serve più invece a determinare la componente della rotazione $\omega \times \mathbf{k}$: è necessario a tal fine tener conto degli infinitesimi di second'ordine, che furono tralasciati nella (2) e nella (3'). Invece della (2) si ha allora, come si riconosce subito,

$$\delta \gamma^2 = 2 D(\varepsilon \gamma^2) + \varepsilon \gamma^2 K \varepsilon;$$

e invece della (3') si ha dalla (3), ricordando una nota espressione dell'isomeria Rotor (ω),⁽¹⁾

$$\gamma^2 + \delta \gamma^2 = \{ 1 + \omega \wedge - \frac{1}{2} \omega^2 + \\ + \frac{1}{2} H(\omega, \omega) \} (\gamma^2 + \delta^* \gamma^2) \{ 1 - \omega \wedge - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} H(\omega, \omega) \}.$$

Onde, indicando con $\delta_2^* \gamma^2$ la parte di second'ordine della variazione $\delta^* \gamma^2$ ($\delta_2^* \gamma^2 \mathbf{i} = \frac{1}{2} \delta_2^* l_1^2 \mathbf{i}, \dots$), e con ω_2 la parte di second'ordine di ω (quantità che dovranno eliminarsi),

$$- \frac{1}{2} \gamma^2 H(\omega, \omega) + \frac{1}{2} H(\omega, \omega) \gamma^2 - \omega^2 \gamma^2 - \omega \wedge \gamma^2 (\omega \wedge) + \\ \omega_2 \wedge \gamma^2 - \gamma^2 (\omega_2 \wedge) + \delta_2^* \gamma^2 + \omega \wedge \delta^* \gamma^2 - \delta^* \gamma^2 (\omega \wedge) - \varepsilon \gamma^2 K \varepsilon = 0.$$

Applicando la dilatazione del primo membro al vettore \mathbf{i} e moltiplicando scalarmente per \mathbf{j} , si ottiene

$$\frac{1}{2} (l_1^2 + l_2^2) \omega \times \mathbf{i} \cdot \omega \times \mathbf{j} - l_3^2 \omega \times \mathbf{i} \cdot \omega \times \mathbf{j} + (l_1^2 - l_2^2) \omega_2 \times \mathbf{k} + \\ + (\delta l_1^2 - \delta l_2^2) \omega \times \mathbf{k} - (l_1^2 e_{11} e_{12} + l_2^2 e_{21} e_{22} + l_3^2 e_{31} e_{32}) = 0;$$

da cui, posto $l_1 = l_2$, e ricordando le espressioni di $\omega \times \mathbf{i}$, $\omega \times \mathbf{j}$,

$$(7) \quad \omega \times \mathbf{k} = \frac{1}{2} e_{12} + \frac{(l_1^2 e_{13} + l_3^2 e_{31})(l_1^2 e_{23} + l_3^2 e_{32}) + (l_1^2 - l_3^2) l_3^2 e_{31} e_{32}}{2(l_1^2 - l_3^2) l_3^2 (e_{11} - e_{22})}.$$

(Si osservi che scambiando tra loro le direzioni di \mathbf{i} e di \mathbf{j} - le quali in realtà non sono determinate singolarmente, ma solo come coppia - quest'espressione si conserva immutata in valore e segno; poichè i sensi dei due vettori suddetti vanno scelti in modo che si abbia sempre, come si è posto nel ricavare l'espressione medesima, $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$).

I simboli di variazione seconda $\delta \delta l_1, \delta \delta l_2$ in questo caso perdono significato, non essendo più $\delta l_1, \delta l_2$ funzioni continue della dilatazione γ ; giacchè al variare di γ variano bruscamente le direzioni, alle quali vanno riferite le componenti e_{11}, e_{22} delle formule (4): prima della variazione δ esse sono infatti, come si è ora dimostrato, le direzioni principali dell'omografia $\varepsilon - H(K \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k})$; mentre dopo la δ sono invece le direzioni principali della dilatazione $\gamma + \delta \gamma$, infinitamente vicine a quelle dell'omografia

(1) Per questa, come per tutte le formule dell'analisi vettoriale che occorrono nella presente Nota, vedasi C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni Lineari* (N. Zanichelli, Bologna).

$\varepsilon = H(K \varepsilon K, k)$. Risulta quindi anche che tale discontinuità si annulla per $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$; e conservano pertanto significato le espressioni $\delta^2 l_1, \delta^2 l_2$: si ottengono senza difficoltà, per la stessa via seguita nel ricercare la variazione seconda nel caso generale, le formule

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 l_1 = l_1 e_{12}^2 + \frac{l_1}{l_1^2 - l_3^2} \{ l_1^2 e_{13}^2 + l_3^2 e_{31} (e_{31} + 2 e_{13}) \} \\ \delta^2 l_2 = l_1 e_{12}^2 + \frac{l_1}{l_1^2 - l_3^2} \{ l_1^2 e_{23}^2 + l_3^2 e_{32} (e_{32} + 2 e_{23}) \}. \end{array} \right.$$

Matematica. — *L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes.* — IV. *Systèmes contenant trois dérivées du second ordre.* Nota ⁽¹⁾ di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — Il faut étudier 10 combinaisons des *trois dérivées du second ordre* de toutes les 20 combinaisons possibles à priori. En effet des équations auxiliaires avec la fonction inconnue Φ , écrites pour les combinaisons

[1]: r, s, t ; [2]: r, s, r' ; [3]: s, t, t' ; [4]: r, s, s' ; [5]: s, t, s'
[6]: r, s, t' ; [7]: s, t, r' ; [8]: r, t, r' ; [9]: r, t, t' ; [10]: r, t, s' ,

il est aisé d'obtenir les équations correspondantes pour

[1']: r', s', t' ; [2']: r', s', r ; [3']: s', t', t ; [4']: r', s', s ; [5']: s', t', s
[6']: r', s', t ; [7']: s', t', r ; [8']: r', t', s ; [9']: r', t', t ; [10']: r', t', s .

Pour l'intégration des équations

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t) = 0, \quad (k = 1, 2)$$

après la résolution de ces équations par rapport aux dérivées r, t et l'adjonction de la 3^{me} équation compatible, nous pouvons écrire:

$$r = f_1(x, y, z, z', p, q, p', q', \varphi)$$

$$s = \varphi(x, y, z, z', p, q, p', q')$$

$$t = f_2(x, y, z, z', p, q, p', q', \varphi)$$

et les conditions de compatibilité peuvent être déduites des relations

$$dp = f_1 dx + \varphi dy ; dq = \varphi dx + f_2 dy,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1932.

qui conduisent aux deux équations linéaires aux dérivées partielles par rapport à la fonction inconnue φ :

$$\frac{df_1}{dy} = \frac{d\varphi}{dx} ; \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{df_2}{dx}.$$

Dès que nous aurons trouvé 3 intégrales particulières $\varphi_1 = c_1, \dots, \varphi_3 = c_3$, qui ne contiennent pas les variables r', s', t' et sont compatibles avec les équations $r = f_1, t = f_2$, l'élimination des dérivées r, s, t conduit au système de 2 équations du 1^{er} ordre avec 2 fonctions inconnues χ, χ' .

§ 2. — Pour l'intégration du système

$$F_k(x, y, \chi, \chi', p, q, p', q', r, s, r') = 0 \quad (k = 1, 2)$$

nous aurons à trouver les intégrales $\Phi_1 = C_1, \dots$, qui ne contiennent pas les variables t, t', s' d'une seule équation linéaire

$$(\xi_1 + \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

c. à. d. les intégrales du système d'équations différentielles ordinaires:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\rho_1} = \frac{dy}{\sigma_1} = \frac{d\chi}{\rho_1 p + \sigma_1 q} = \frac{d\chi'}{\rho_1 p' + \sigma_1 q'} = \frac{dp}{\rho_1 r + \sigma_1 s} = \frac{dq}{\rho_1 s + \sigma_1 t} = \\ = \frac{dr}{\xi'_1} = \frac{ds}{\eta'_1} = \frac{-dr'}{\xi_1 + \eta_2} = \frac{dp'}{\rho_1 r' + \sigma_1 s'} = \frac{dq'}{\rho_1 s' + \sigma_1 t'}. \end{aligned}$$

Pour la combinaison analogique [3] l'équation linéaire est la suivante:

$$(\xi_3 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \sigma_3 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t};$$

le système d'équations différentielles ordinaires s'écrira:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sigma_3} = \frac{dy}{\tau_3} = \frac{d\chi}{\sigma_3 p + \tau_3 q} = \frac{d\chi'}{\sigma_3 p' + \tau_3 q'} = \frac{dp}{\sigma_3 r + \tau_3 s} = \frac{dq}{\sigma_3 s + \tau_3 t} = \\ = \frac{ds}{\xi'_3} = \frac{dt}{\eta'_3} = \frac{-dt'}{\xi_3 + \eta_3} = \frac{dp'}{\sigma_3 r' + \tau_3 s'} = \frac{dq'}{\sigma_3 s' + \tau_3 t'}. \end{aligned}$$

Quand il s'agit de l'intégration du système

$$F_k(x, y, \chi, \chi', p, q, p', q', r, s, s') = 0, \quad (k = 1, 2)$$

l'équation linéaire est

$$(\xi_1 + \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

et il faut chercher les intégrales $\Phi_i = C_i, \dots$, ne contenant pas t, r', t' du système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\rho_2} = \frac{dy}{\sigma_2} = \frac{dz}{\rho_2 p + \sigma_2 q} = \frac{dz'}{\rho_2 p' + \sigma_2 q'} = \frac{dp}{\rho_2 r + \sigma_2 s} = \frac{dq}{\rho_2 s + \sigma_2 t} = \\ = \frac{dr}{\xi_2'} = \frac{ds}{\eta_2'} = \frac{-ds'}{\xi_1 + \eta_2} = \frac{dp'}{\rho_2 r' + \sigma_2 s'} = \frac{dq'}{\rho_2 s' + \sigma_2 t'}. \end{aligned}$$

La combinaison analogue [5] conduit à l'équation linéaire suivante:

$$(\xi_2 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_2' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Pour le système

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t') = 0 \quad (k = 1, 2)$$

il faut chercher les intégrales, qui ne contiennent pas t, r', s' , de l'équation

$$(\xi_1 + \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \rho_3 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

À la combinaison analogue [7] correspond une équation de la forme:

$$(\xi_2 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta_1' \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

§ 3. - L'adjonction au système suivant

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r') = 0 \quad (k = 1, 2)$$

de la 3^{me} équation compatible

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const.}$$

Conduit aux 3 premières conditions de compatibilité de la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$

$$(1) \quad (r t r')^2 + \rho_1 \tau_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 = 0.$$

Comme 4^{me} condition de compatibilité on peut adjoindre une des six équations suivantes:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 [x r r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [y t r'] = 0 \\ \rho_1 [y t r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [x r' r] = 0 \\ \rho_1 \eta_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \sigma [x r r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [y t r] = 0 \\ \rho_1 \eta'_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \rho_1 [x r r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [y r' r] = 0 \\ \tau_1 \xi_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \sigma [y t r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [x r t] = 0 \\ \tau_1 \xi'_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \tau_1 [y t r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [x r' t] = 0. \end{array} \right.$$

Quand nous prenons, par ex., la première équation, la relation (1) s'écrit

$$\pm \sqrt{-\rho_1 \tau_1} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = (r t r')$$

et nous avons :

$$\tau_1 [x r r'] \pm \sqrt{-\rho_1 \tau_1} [y t r'] = 0.$$

Il faut chercher les intégrales, qui ne contiennent pas s', t' du système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\rho_1 \tau_1} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0 \\ \tau_1 \left(\rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right) \pm \sqrt{-\rho_1 \tau_1} \left(\tau_1 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Pour la combinaison analogue [9] le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\rho_3 \tau_3} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0 \\ \tau_3 \left(\rho_3 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right) \pm \sqrt{-\rho_3 \tau_3} \left(\tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Étant donné le système d'équations

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, s') = 0, \quad (k = 1, 2)$$

l'adjonction de la 3^{me} équation

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const.}$$

conduit aux 3 conditions de compatibilité suivantes :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$

$$\rho_2 \tau_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + (rts')^2 = 0.$$

La 4^{me} condition de compatibilité est une équation quelconque des 6 suivantes :

$$\tau_2 [xr s'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (rts') [yts'] = 0$$

$$\rho_2 [yts'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (rts') [xs' r] = 0$$

$$\rho_2 \tau_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \sigma [xs' r] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (rts') [yrt] = 0$$

$$\rho_2 \eta_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \rho_2 [xs' r] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (rts') [ys' r] = 0$$

$$\tau_2 \xi_2' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \tau_2 [yts'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (rts') [xs' t] = 0,$$

$$\tau_2 \xi_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \sigma [yts'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (rts') [xrt] = 0,$$

et nous pouvons trouver les intégrales particulières, ne contenant pas r', t' , par ex., d'un système de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\rho_2 \tau_2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0 \\ \tau_2 \left(\rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_2' \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \pm \sqrt{-\rho_2 \tau_2} \left(\tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Matematica. — *Sulla risoluzione numerica di un sistema di equazioni.* Nota di G. MAMMANA presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Si conoscono procedimenti vari, e anche rapidi — come si suol dire — atti alla risoluzione numerica di una equazione:

$$(1) \quad f(x) = 0$$

nella ipotesi, generale, della sola continuità per la $f(x)$.

Non altrettanto possiamo dire relativamente alla risoluzione numerica di un sistema determinato di più equazioni ed incognite. Al riguardo, anzi, si può affermare che non abbiamo, per quanto io sappia, criteri sicuri che permettano di risolvere numericamente un sistema.

L'argomento, d'altra parte, è assai importante, dal punto di vista delle applicazioni soprattutto, perchè ci si possa disinteressare, e il nascente Istituto di Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche preoccupato di ciò, ha opportunamente segnalato ai cultori di matematiche la lacuna, affinchè si cercasse di colmarla.

Un procedimento da prendere eventualmente in considerazione per la risoluzione numerica di particolari sistemi, potrebbe essere quello che proviene dalla estensione ai sistemi stessi del così detto procedimento di Newton per la risoluzione di particolari equazioni.

Assegnato, cioè, un sistema, ad esempio di due funzioni:

$$(2) \quad Z = f_1(x, y) \equiv f_1(P) \quad ; \quad (3) \quad Z = f_2(x, y) \equiv f_2(P),$$

continue e a derivate continue in un dominio R , e fissato ad arbitrio un punto P_0 di R , si consideri il punto P_1 intersezione eventuale, col piano xy , della retta comune ai piani tangenti alle due superficie S ed S' (aventi rispettivamente le (2) e (3) per equazioni) nei rispettivi punti Q_0 e Q_0' corrispondenti a P_0 .

Assunto questo punto P_1 , nell'ipotesi che appartenga ad R , come prima approssimazione di uno zero dell'assegnato sistema, operare su esso come si è operato su P_0 ; si verrà così alla determinazione eventuale di un secondo punto P_2 , da dirsi, sempre nel supposto che esso sia contenuto in R , seconda approssimazione, e procedere quindi analogamente — ove sia possibile — e indefinitamente.

Così operando si verrebbe ad ottenere una successione di punti P_i , avente — si potrebbe pensare — come punti limiti zeri del sistema.

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1932.

Ma, come subito si nota, l'applicabilità di un procedimento del genere richiederebbe anzitutto una particolarizzazione delle funzioni (2) e (3), tale da avere assicurata: 1° la esistenza della successione dei punti P_i (cosa questa certamente non immediata, e assai probabilmente non semplice) 2° la dimostrazione che i punti limiti della menzionata successione sono zeri del sistema.

In ogni caso, anche se si riuscisse a fare tutto ciò, si verrebbe a risolvere un problema particolarissimo.

È opportuno, pertanto, cercare di raggiungere per altra via la soluzione del problema in generale.

Prima di accennare ai risultati ai quali son pervenuto relativamente alla risoluzione numerica di un sistema, ritengo utile fare alcune osservazioni circa i noti metodi impiegati per risolvere, con successive approssimazioni, una equazione ad una incognita come la (1).

Queste osservazioni servono a mettere in evidenza: alcuni inconvenienti cui si va incontro quando si procede alla effettiva risoluzione di una equazione, e la maniera di ovviare ai medesimi inconvenienti.

Consideriamo una equazione come la (1) il cui primo membro sia una funzione continua in un intervallo (a, b) e ivi, ove occorra, a derivata continua, e x_0 sia un punto di (a, b) comunque fissato. Si prenda in esame una successione di numeri: x_i (per $i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$) i cui elementi si ottengano, per ricorrenza, dalla relazione seguente:

$$(4) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\Lambda_i},$$

nella quale Λ_i è un numero, dipendente da x_i , scelto in modo che la successione delle Λ_i riesca limitata e tale da realizzare le seguenti due condizioni:

- α) il numero x_{i+1} sia sempre contenuto, come x_i , in (a, b) ,
- β) la successione delle x_i sia convergente.

Il limite di x_i è allora, ovviamente, uno zero della $f(x)$.

Il metodo di Newton, quello delle secanti, ecc., conducono a successioni del tipo (4). Nel metodo di Newton Λ_i non è altro che il valore della derivata di $f(x)$ nel punto x_i , e in quello delle secanti Λ_i rappresenta il valore del rapporto incrementale della $f(x)$ relativo a x_i e a un determinato punto che precede x_i .

Dalla (4), specializzando le Λ_i si possono ottenere quanti procedimenti di approssimazione si vogliano. Ogni elemento della (4) dà un valore approssimato di una radice della (1).

Tutti questi metodi però, presentano, come ho dianzi accennato, un inconveniente tutt'altro che trascurabile dal punto di vista pratico, e cioè: le successive approssimazioni x_i sono di regola affette da errore, errore

dovuto al fatto che non è possibile in generale (e soprattutto quando la $f(x)$ non è razionale) avere per $f(x_i)$ e Λ_i che valori approssimati.

Si rende quindi necessario per ogni elemento della (4) il calcolo di un limite superiore dell'errore di approssimazione, ciò che complica evidentemente e rende assai poco rapido il calcolo delle radici della (1).

Dal punto di vista pratico, pertanto, sarebbe preferibile sostituire ai cosiddetti metodi *rapidi* di Newton o delle secanti, un procedimento nel quale le successive approssimazioni potessero aversi con tutta esattezza.

Ciò, nel caso di equazioni come la (1) potrebbe ottenersi nel seguente modo: *assumere come prima approssimazione di una radice di $f(x) = 0$, contenuta in (a, b) , il punto medio x_1 di (a, b) stesso, come seconda approssimazione il punto medio x_2 di quello dei due intervalli: (a, x_1) e (x_1, b) contenenti zeri della $f(x)$, e così via.*

Il limite di una successione di questo tipo è ovviamente uno zero della $f(x)$.

Questa successione potrà eventualmente avere una convergenza meno rapida di quelle provenienti dall'applicazione dei metodi di Newton o delle secanti, ma presenta il vantaggio notevole che i suoi elementi possono aversi con esattezza.

Disgraziatamente però, non è possibile estendere questo metodo al caso dei sistemi di equazioni, non disponendo allo stato attuale di procedimenti semplici e di facile applicazione (e neanche di difficile applicazione) che consentano — come accade per le equazioni — di stabilire se un dato dominio, rettangolare ad esempio, contiene o no zeri di un assegnato sistema.

L'inconveniente di cui sopra, potremmo, almeno in parte, mitigarlo se si riuscisse, ad esempio, a costruire una successione del tipo (4) nella quale la successione delle Λ_i fosse costante.

Orbene: si può dimostrare agevolmente che la cosa è sempre possibile, è possibile cioè assegnare un numero H positivo tale che se Λ è un qualsivoglia numero positivo e inferiore ad H , la successione:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\Lambda} \quad (\text{per } i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

risulta composta di numeri contenuti in (a, b) , e convergente.

L'importanza di questo teorema è notevole soprattutto perchè, come vedremo, esso è suscettibile di estensione al caso dei sistemi.

Al riguardo premetteremo il seguente lemma che per ora ci accontenteremo soltanto di enunciare.

LEMMA. — Posto che la funzione $f(x, y) \equiv f(P)$ continua con le sue derivate parziali in un dominio R , sia ivi sempre maggiore o eguale a zero, è sempre possibile assegnare un numero positivo H , tale che, se Λ è un qualunque numero positivo inferiore ad H , e $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto qualsivoglia

di R , nel dominio circolare di centro P_0 e raggio $\rho_0 = \Lambda f(P_0)$ non cadono zeri della $f(P)$.

Il numero H è il minimo della funzione: $\frac{1}{\sqrt{f_x^2(P) + f_y^2(P)}}$, funzione, quest'ultima, mai nulla in R a causa della supposta continuità delle derivate parziali di $f(P)$ in R stesso.

Questo lemma ⁽¹⁾ ci dà mezzo di istituire procedimenti vari atti alla rivoluzione numerica di un sistema di equazioni.

Consideriamo ad esempio il sistema ottenuto eguagliando a zero le funzioni (2) e (3), e poniamo:

$$(5) \quad Z = f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y) \equiv F(x, y) \equiv F(P).$$

Gli zeri eventuali di $F(P)$ sono quelli e soltanto quelli del considerato sistema, di più per la $F(P)$ stessa si realizzano tutte le condizioni per l'applicazione ad essa del precedente lemma.

Sia P_0 un punto di R , ad esempio l'estremo inferiore di R , e Λ un numero di cui all'enunciato lemma. Designamo con C_0 il cerchio di centro P_0 e raggio $\rho_0 = F(P_0) \Lambda$, e con α_0 l'arco di questo cerchio contenuto in R .

Gli zeri di $F(P)$ sono esterni al quadrante limitato da α_0 e dai lati di R concorrenti in P_0 . Su α_0 fissiamo con assegnata ma arbitraria legge un punto P_1 (per esempio P_1 sia il punto di α_0 in cui la Z del piano tangente alla superficie, rappresentata dalla (5), nel punto $Q_0 \equiv (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$, risulta minima) e diciamo C_1 il cerchio di centro P_1 e raggio: $\rho_1 = \Lambda f(P_1)$ ed α_1 l'arco di questo cerchio contenuto in R ed esterno a C_0 . Su α_1 , o sull'insieme costituito da α_1 e dalla parte di α_0 non interna a C_1 , fissiamo con la legge prima assegnata un nuovo punto P_2 e così via indefinitamente.

Si dimostra che i punti limiti di una successione qualsivoglia di punti P_i come quella sopra accennata sono zeri della funzione $F(P)$.

In pratica sfruttando opportunamente il lemma precedente potremo rendere più rapido l'isolamento di uno zero della $F(P)$, ma di ciò diremo nella memoria che seguirà questa nota preventiva.

(1) Valido anche nell'ipotesi di una funzione a un numero qualsiasi di variabili.

Matematica. — *Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali.* Nota di MARIA PASTORI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In un lavoro in corso di pubblicazione ⁽²⁾, il prof. Finzi, per dar forma intrinseca alle equazioni della meccanica dei sistemi continui, perfettamente o imperfettamente flessibili, istituisce un calcolo differenziale assoluto di *insiemi tensoriali*. Essi sono insiemi di tensori di una V_n riemanniana, essendo ciascun insieme individuato da un ordinario tensore di una V_{n+c} (in cui la V_n è immersa), funzione dei punti della V_n medesima, oppure ottenuti da tali insiemi con operazioni aritmetiche o di derivazione. Gli è così possibile far della meccanica intrinseca della V_n anche quando questa non sia perfettamente flessibile, ed esiga quindi, nella trattazione ordinaria, l'introduzione di elementi estranei ad essa, tensori dello spazio ambiente.

In questa Nota ritrovo dapprima, con l'ordinario metodo di Ricci e Levi-Civita, alcuni risultati che il prof. Finzi stabilisce servendosi delle omografie vettoriali, ed osservo poi che anche sistemi assoluti di Pascal-Vitali della V_{n+c} possono generare insiemi tensoriali della V_n , purchè non si prendano tutte le componenti di tali sistemi, ma solo alcune di esse, scelte in modo opportuno.

Considero in particolare l'insieme tensoriale di V_n generato dai simboli di Christoffel di V_{n+1} , i quali, come è noto, sono elementi di un sistema del calcolo assoluto generalizzato con un indice di classe 1 e l'altro di classe 2.

Questo insieme tensoriale, per una opportuna scelta delle coordinate di V_{n+1} , non ha che un elemento diverso da zero, un tensore doppio di V_n che ha per componenti i coefficienti della sua seconda forma fondamentale. Ciò dà ragione di una coincidenza formale osservata dal prof. Finzi tra le ordinarie formole di derivazione covariante e quelle da lui direttamente stabilite per la derivazione di insiemi tensoriali.

Per ragioni di spazio, rimando ad una Nota successiva quest'ultima constatazione, insieme con qualche altra osservazione sugli insiemi derivati.

I. — INSIEMI TENSORIALI GENERATI DA TENSORI ORDINARI.

Consideriamo in una V_{n+1} un vettore \boldsymbol{v} , funzione dei punti della V_n , immersa nella V_{n+1} . Indicando con x^0, x^1, \dots, x^n le coordinate della V_{n+1} , scegliamole in modo che la V_n sia una delle ipersuperficie coordinate $x^0 = \text{cost.}$, per es. $x^0 = 0$.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1932.

(2) B. FINZI, *Equazioni intrinseche della meccanica dei sistemi continui perfettamente od imperfettamente flessibili*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo XI, p. 215.

Ricordiamo le formole di trasformazione delle componenti covarianti di \boldsymbol{v} per una generica sostituzione di coordinate in V_{n+1} :

$$(1) \quad \bar{v}_q = v_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^q} \quad (1)$$

e consideriamo, in particolare, la seguente sostituzione di coordinate:

$$(2) \quad \begin{cases} x^0 = \bar{x}^0 \\ x^r = x^r(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \end{cases} \quad (2)$$

essendo le x^r funzioni generiche (si intende regolari e invertibili) delle \bar{x}^r . Da (2) si ricava:

$$(2') \quad \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^q} = \delta_q^0, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^0} = \delta_0^\alpha \quad (3)$$

e, per esse, da (1):

$$(1') \quad \begin{cases} \bar{v}_r = v_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \\ \bar{v}_0 = v_0. \end{cases}$$

Poichè la (2) subordina sulla V_n una generica sostituzione di coordinate, possiamo dire che al vettore \boldsymbol{v} di V_{n+1} corrisponde in V_n il vettore \boldsymbol{u} di componenti covarianti $u_r = v_r$, e lo scalare (invariante) $\lambda = v_0$. Essi costituiscono l'insieme tensoriale (u_r, λ) (4).

Sia ora \mathbf{T} un tensore doppio di V_{n+1} , funzione dei punti di V_n . La legge di trasformazione delle sue componenti covarianti per una generica sostituzione di coordinate in V_{n+1} è:

$$(3) \quad \bar{T}_{q,\sigma} = T_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\sigma} \quad (5).$$

Per la sostituzione (2) essa dà luogo, in virtù delle (2'), alle formole seguenti:

(1) Seguendo le notazioni usate dal prof. Finzi nel citato lavoro, indichiamo con una lettera greca un indice che assume i valori $0, 1, 2, \dots, n$, con una lettera latina un indice che assume solo i valori $1, 2, \dots, n$.

(2) Esempi di sostituzioni di questa natura sono, nello spazio ordinario, il passaggio da coordinate cartesiane a cilindriche, e, nel cronotopo einsteiniano, una generica sostituzione di coordinate spaziali, associata all'ipotesi di invarianza del tempo.

$$(3) \quad \delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = \beta \\ 0 & \text{per } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

(4) B. FINZI, loc. cit., § 1.

(5) In armonia con le notazioni del calcolo assoluto generalizzato che dobbiamo introdurre nel § seguente, separiamo con delle virgole gli indici delle componenti di un tensore, perchè scriveremo di seguito, senza la virgola, solo le cifre di uno stesso stato.

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_{r,s} = T_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} \\ \bar{T}_{r,0} = T_{i,0} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \\ \bar{T}_{0,s} = T_{0,k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} \\ \bar{T}_{0,0} = T_{0,0} \end{array} \right.$$

Il tensore doppio \mathbf{T} di V_{n+1} è quindi rappresentato in V_n dal tensore doppio di componenti covarianti $u_{r,s} = T_{r,s}$, dai due vettori di componenti covarianti $\lambda'_r = T_{r,0}$ e $\lambda''_s = T_{0,s}$ (coincidenti nel caso che \mathbf{T} sia simmetrico), e dallo scalare $\lambda = T_{0,0}$ ⁽¹⁾. Essi costituiscono l'insieme tensoriale

$$(u_{r,s}, \lambda'_r, \lambda''_s, \lambda)^{(2)}.$$

È manifesto come le considerazioni precedenti si possano estendere ad un tensore m^{plo} di V_{n+1} funzione dei punti di V_n .

Gli insiemi tensoriali fin qui considerati sono insiemi di classe 1. Si possono pure considerare, come fa il prof. Finzi, insiemi di classe c , rappresentanti in V_n tensori di V_{n+c} , funzioni dei punti della V_n medesima. La sostituzione di coordinate, analoga alla (2) che va considerata in questo caso sarà generica per la V_n e particolare per la V_{n+c} , lasciando in essa inalterate c linee coordinate.

2. — INSIEMI TENSORIALI GENERATI DA SISTEMI ASSOLUTI DI PASCAL-VITALI.

Consideriamo in V_{n+1} un sistema del calcolo assoluto generalizzato, i cui elementi siano funzioni dei punti di V_n . Sia, ad es. T_R , con un solo indice (di covarianza) di classe (intera) ν ⁽³⁾. Per una generica sostituzione di coordinate in V_{n+1} la legge di trasformazione delle T_R è:

$$(4) \quad \bar{T}_R = T_A \frac{Dx^A}{D\bar{x}^R}$$

(1) Per una dimostrazione sostanzialmente identica alla precedente vedi T. LEVI-CIVITA, *Fondamento di meccanica relativistica*. (Bologna, Zanichelli, 1928, p. 76). Cfr. pure, dello stesso Autore: *ds² einsteiniani in campi newtoniani. Formule ausiliarie*. (Questi « Rendiconti », vol. XXVII, serie 5^a, 2^o sem. 1918, pp. 183-191).

(2) B. FINZI, loc. cit., § 1.

(3) Per conservare agli indici rappresentati da lettere greche il significato loro attribuito nel § precedente, abbiamo dovuto modificare, in modo evidente, le comuni notazioni (Cfr. G. VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano*, Bologna, Zanichelli, 1929, parte IV, vedi pure, dello stesso Autore: *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. LXI, 1923, pp. 1-46). Va poi notato che, per il modo come abbiamo indicato le coordinate di V_{n+1} , una qualunque cifra di uno stato può essere anche

dove i simboli $\frac{Dx^A}{D\bar{x}^R}$ rappresentano funzioni delle coordinate \bar{x} , definite in modo ricorrente dalle formole seguenti:

$$(5) \quad \frac{Dx^A}{D\bar{x}^R} = \begin{cases} \frac{Dx^{A'}}{D\bar{x}^{R'}} \frac{\partial x^{a_p}}{\partial \bar{x}^{e_p}} & \text{quando A ed R hanno lo stesso} \\ & \text{numero di cifre ed è: } (p \leq \nu). \\ & A = A' \alpha_p, \quad R = R' \rho_p \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{e_p}} \frac{Dx^A}{D\bar{x}^{R'}} & \text{quando A ha meno cifre di R} \\ & \text{ed è } R = R' \rho_p \end{cases}$$

Se R ha una sola cifra, la (4) diviene la ordinaria legge di trasformazione delle componenti di un vettore, e i simboli $\frac{Dx^A}{D\bar{x}^R}$ rappresentano ordinarie derivate parziali. Se R ha due cifre ($R = \rho_1 \rho_2$), la (4) diviene, tenuto conto delle (5):

$$(1') \quad \bar{T}_{e_1 e_2} = T_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{e_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial \bar{x}^{e_2}} + T_{\alpha_1} \frac{\partial^2 x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{e_1} \partial \bar{x}^{e_2}}.$$

Fra questi elementi, corrispondenti al caso di R avente due cifre, scegliamo tutti quelli in cui la prima di esse è 0, poniamo cioè $\rho_1 = 0$, e consideriamo per essi la sostituzione (2). Si ha, in virtù delle (2'):

$$(4'') \quad \begin{cases} \bar{T}_{0 r_2} = T_{0 i_2} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{r_2}} \\ \bar{T}_{00} = T_{00}. \end{cases}$$

In V_n essi danno quindi luogo all'insieme tensoriale (u_{r_2}, λ) ove si è posto:

$$u_{r_2} = T_{0 r_2}, \quad \lambda = T_{00}.$$

Analogamente si vede che, nel caso di R avente tre cifre, se si scelgono tutti quegli elementi di T_R in cui le prime due cifre sono nulle, essi danno luogo in V_n all'insieme tensoriale (u_{r_3}, λ) , dove si è posto:

$$u_{r_3} = T_{00 r_3}, \quad \lambda = T_{000}^{(1)}.$$

lo zero, a differenza di quel che avviene coi simboli ordinari, ove lo zero, o si esclude (Vitali, primo loc. cit.), o può solo presentarsi come cifra intermedia (2° loc. cit.). Non dovendo noi considerare esplicitamente quest'ultimo caso, le notazioni usate non possono produrre equivoco.

(1) Si ha infatti per la (4): $\bar{T}_{00 r_3} = T_A \frac{Dx^A}{Dx^{00 r_3}}$; ma per le (5), tutte le volte che

A ha meno di 3 cifre, il corrispondente simbolo $\frac{Dx^A}{Dx^{00 r_3}}$ è nullo: esso è formato infatti da termini contenenti derivate almeno seconde delle x , rispetto alle \bar{x} , e di queste ultime una almeno è \bar{x}^0 . Dalle (2') discende quindi l'asserto. Analogamente per T_{000} .

E in generale, per avere in V_n un insieme tensoriale (u_{r_v}, λ) , basta scegliere, tra gli elementi di T_R , con R avente v cifre, quelli in cui sono eguali a 0 le prime $v - 1$ cifre; tra essi quelli in cui l'ultima cifra non è 0 sono le componenti u_{r_v} di un vettore, quello in cui anche l'ultima cifra è 0 è lo scalare λ .

È ovvia l'estensione delle considerazioni precedenti al caso in cui il sistema assoluto abbia più indici, come pure al caso in cui esso appartenga ad una V_{n+1} .

3. - INSIEMI TENSORIALI DI CHRISTOFFEL.

Restando al caso dei sistemi assoluti di V_{n+1} , consideriamo in particolare un sistema a due indici (di covarianza) $T_{R,\sigma}$, il primo (R) di classe 2, e l'altro (σ) di classe 1. I suoi elementi con R avente due cifre, di cui la prima nulla, costituiscono in V_n l'insieme tensoriale $(u_{r_2,s}, \lambda'_{r_2}, \lambda''_s, \lambda)$ ove si è posto: $u_{r_2,s} = T_{0r_2,s}$; $\lambda'_{r_2} = T_{0r_2,0}$; $\lambda''_s = T_{00,s}$, $\lambda = T_{000}$.

Esempi notevoli di sistemi assoluti di questo tipo sono i simboli di Christoffel (di prima specie), insieme con le componenti del tensore fondamentale. È noto infatti che si può porre:

$$T_{R,\sigma} = \begin{cases} g_{0,\sigma} \text{ (componenti del tensore fondamentale di } V_{n+1} \text{) per } R \text{ di} \\ \text{una sola cifra: } R = 0 \\ [\rho_1 \rho_2, \sigma] \text{ (simboli di Christoffel di 1ª specie di } V_{n+1} \text{) per } R \text{ di} \\ \text{due cifre: } R = \rho_1 \rho_2 \text{ (1).} \end{cases}$$

Dunque i simboli di Christoffel di 1ª specie di V_{n+1} , col primo (o il secondo) indice nullo, danno luogo in V_n a un insieme tensoriale, costituito: *a*) da un tensore doppio che ha per componenti covarianti quei simboli $[0r_2, s]$ col primo (o il secondo) indice nullo, e gli altri diversi da 0, *b*) da un vettore che ha per componenti covarianti quei simboli $[00, s]$ coi primi due indici nulli e il terzo diverso da 0, *c*) da un altro vettore che ha per componenti covarianti quei simboli $[0r_2, 0]$ col primo (o il secondo) e il terzo indice nulli e il rimanente diverso da 0, *d*) da uno scalare $[00, 0]$.

Lo chiameremo *primo insieme tensoriale di Christoffel*.

Naturalmente l'enunciato precedente si può applicare anche ai simboli di Christoffel di seconda specie di V_{n+1} , che sono pure, come è noto, elementi di un sistema assoluto con un indice di covarianza di classe 2 e uno di controvarianza di classe 1. Solamente il tensore *a*) sarà rappresentato in forma mista e il vettore *b*) in forma controvariante.

Ma è interessante osservare che ad un insieme tensoriale come il precedente, rappresentato tutto in forma covariante, si giunge anche conside-

(1) Cfr. G. VITALI, primo loc. cit., p. 181 e segg., oppure secondo loc. cit., p. 34.

rando quei simboli di Christoffel di seconda specie di V_{n+1} , che hanno nullo l'indice di controvarianza. Basta infatti ricordare le formole generali di trasformazione dei simboli di Christoffel di seconda specie per una sostituzione di coordinate:

$$(6) \quad \left\{ \begin{matrix} \overline{\sigma} \\ \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha_1 \alpha_2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{\rho_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial \bar{x}^{\rho_2}} \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{\rho_1} \partial \bar{x}^{\rho_2}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\alpha_1}},$$

porre $\sigma = 0$ e applicare la sostituzione (2) di coordinate, tenendo conto delle (2'). Si ottiene infatti:

$$(6') \quad \left\{ \begin{matrix} \overline{0} \\ r_1 r_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ i_1 i_2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{r_2}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{0} \\ r_1 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{0} \\ 0 r_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ i_1 0 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{0} \\ 0 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 0 \end{matrix} \right\}.$$

Si ha così l'insieme tensoriale $(u_{r_1, r_2}, \lambda'_{r_1}, \lambda''_{r_2} = \lambda'_{r_2}, \lambda)$ con

$$u_{r_1, r_2} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ r_1 r_2 \end{matrix} \right\}, \quad \lambda'_{r_1} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ r_1 0 \end{matrix} \right\}, \quad \lambda''_{r_2} = \lambda'_{r_2} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 r_2 \end{matrix} \right\}, \quad \lambda = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 0 \end{matrix} \right\}.$$

Lo chiameremo *secondo insieme tensoriale di Christoffel*.

Come vedremo nella Nota seguente, i due insiemi tensoriali di Christoffel coincidono per la forma geodetica dell'elemento lineare di V_{n+1} .

Matematica. — *Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali; relazione con gli insiemi derivati.* Nota di MARIA PASTORI, pres. dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico.* — I. *Premesse e caso particolare.* Nota di F. ZAGAR, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il prof. Levi-Civita, nelle sue ricerche in *Pulviscolo Cosmico e Distribuzione Maxwelliana* ⁽²⁾ e *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile* ⁽³⁾, ha stabilito la relazione fondamentale

$$(1) \quad \frac{d(mv)}{dt} = F$$

per il moto di un pianeta che aumenta la sua massa per cattura di corpuscoli cosmici, *a condizione che:*

a) nel mezzo pulviscolare le velocità siano distribuite secondo la legge maxwelliana, se le masse si suppongono tutte uguali, e secondo una legge più generale stabilita dal prof. Levi-Civita stesso, se si ammettono masse di ogni calibro;

b) la velocità media \bar{w} dei corpuscoli sia abbastanza piccola rispetto a quella v del pianeta.

In queste condizioni infatti nella relazione generale che vale per il moto di un corpo di massa crescente

$$(2) \quad d(mv) = F dt + Q$$

il secondo termine a destra

$$(3) \quad Q = \sum \mu w = \sum p,$$

(μ e w massa e velocità di un corpuscolo generico) che rappresenta il risultante delle quantità di moto dei corpuscoli che si uniscono al pianeta, risulta trascurabile

Le ricerche del prof. Levi-Civita riguardano il moto traslatorio del pianeta considerato come punto materiale. Se invece di un solo punto si tratta di un sistema di punti isolati di masse crescenti, è facile vedere che la forma della seconda equazione cardinale del moto di un sistema rimane invariata, come è dimostrato in un mio studio sugli effetti del pulviscolo cosmico sulla

(1) Nella seduta del 4 dicembre.

(2) « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei »; anno 83, sess. IV, (marzo 1930).

(3) « Rendiconti R. Accademia Naz. dei Lincei »; vol. XI ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 7 (aprile 1930).

rotazione dalla Terra ⁽¹⁾. La cosa non è però così semplice quando si tratti di un sistema continuo, in particolare di un pianeta, nel quale i soli elementi superficiali vengono colpiti dai corpuscoli, mentre i punti interni mantengono la loro massa invariata.

La estensione della validità della (1) e quindi della seconda equazione cardinale a questo caso, per quanto appaia quasi evidente al primo momento, tanto che nello studio suddetto l'ho ammessa senza discussione, ha bisogno di un esame più particolareggiato che è appunto lo scopo della presente ricerca. In questa prima parte, seguendo l'esposizione del prof. Levi-Civita nella prima delle due Note citate, dedurremo le espressioni generali necessarie all'uopo e discuteremo un caso particolare, mentre la parte successiva sarà dedicata alla considerazione del caso generale. Vedremo che per la rotazione di un pianeta la predetta equazione cardinale rimane immutata quando l'aumento di massa avvenga nelle stesse condizioni *a*) e *b*) suddette.

1. Ammetteremo che nel pulviscolo cosmico siano rappresentate non solamente tutte le velocità, ma altresì tutte le masse. Sia *a* un'area piana animata dalla velocità assoluta *v* (vettoriale), che supporremo costante per un dato tempuscolo τ ; sia inoltre *n* il vettore unitario perpendicolare al piano dell'area *a* e tale che il suo verso positivo formi un angolo acuto (0, più precisamente, non ottuso) *k* col vettore *v*; sia infine *w* la velocità di un certo gruppo di corpuscoli, tutti animati dalla stessa velocità, Δ il modulo della velocità relativa *w* — *v* ed ω l'angolo tra i due vettori *n* e *v* — *w*, cioè quello che si può chiamare l'angolo di incidenza dei corpuscoli.

Allora tutte le particelle del gruppo ora specificato, che nel tempo τ arrivano all'area *a*, sono contenute, all'inizio dell'intervallo τ , nel volume (spazio astronomico a tre dimensioni)

$$(4) \quad V = \tau a \Delta \cos \omega,$$

dove è

$$(5) \quad \Delta \cos \omega = v \cos k - w \cos \vartheta,$$

essendo *v*, *w* i moduli dei vettori *v* e *w* ed avendo denotato con ϑ l'angolo tra i due vettori *w* ed *n*.

Conveniamo di chiamare faccia anteriore o superiore di *a* quella rivolta verso il semispazio che contiene i due vettori *v* ed *n* immaginati applicati nel centro di *a*, e faccia posteriore o inferiore quella opposta. I corpuscoli possono evidentemente incontrare ambedue queste faccie; volendo però fissare gli effetti relativi alla sola faccia anteriore, bisognerà limitare le particelle per modo che sia sempre $\cos \omega > 0$, cioè che l'angolo di incidenza ω

(1) « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei »; anno 86, sess. I (1932).

sia minore di $\frac{\pi}{2}$. L'angolo ϑ può assumere qualunque valore tra 0 e π ; se esso è maggiore di $\frac{\pi}{2}$, il $\cos \vartheta$ è negativo e, per essere $v \cos k > 0$, dalla (5) risulta che il $\cos \omega$ è positivo qualunque siano le altre condizioni, in particolare la variabilità di w e quindi di $p = \mu w$ rimane stabilita tra 0 ed ∞ ; se invece ϑ è minore di $\frac{\pi}{2}$, allora deve essere soddisfatta la condizione $w < \frac{v \cos k}{\cos \vartheta}$. Le due coppie di limitazioni

$$(6) \quad \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq p < \infty$$

$$(6') \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq p < \frac{\mu v \cos k}{\cos \vartheta}$$

corrispondono dunque a tutte e sole quelle particelle che colpiscono la faccia anteriore di a .

Fra tutti i corpuscoli del gruppo fissato (velocità w uguale), fra i quali sono manifestamente rappresentate ancora tutte le masse, immaginiamo di separare quelli che hanno inoltre una data massa μ uguale, che appartengono cioè all'elemento $d\sigma$ dello spazio rappresentativo σ (ridotto) a 4 dimensioni: massa μ e vettore p , od anche massa μ e componenti p_1, p_2, p_3 della quantità di moto⁽¹⁾. Se allora denotiamo con $f = f(\mu, p)$ la funzione di distribuzione nello spazio σ ora detto, funzione indipendente dalla orientazione del vettore p , il numero dei corpuscoli così definiti, contenuti nel volume V , la somma delle loro masse e la somma delle loro quantità di moto sono dati rispettivamente da

$$(7) \quad n = \tau a \Delta \cos \omega f d\sigma \quad , \quad m = n\mu = \tau a \mu \Delta \cos \omega f d\sigma ,$$

$$q = n\mu w = np = \tau a p \Delta \cos \omega f d\sigma .$$

In base a queste ed alle (6) e (6') avremo perciò quale massa *totale* dei corpuscoli che incontrano la faccia anteriore dell'area a nel tempo τ , e quale risultante delle loro quantità di moto, rispettivamente l'integrale della seconda e della terza delle espressioni precedenti, estesi a quella parte σ_1 del campo σ suddetto, che corrisponde alle limitazioni (6) e (6'), cioè estesi a tutte le masse dei corpuscoli ed alle velocità soddisfacenti alle (6) e (6')

$$(8) \quad M = \tau a \int_{\sigma_1} \mu f \Delta \cos \omega \cdot d\sigma \quad Q = \tau a \int_{\sigma_1} p f \Delta \cos \omega \cdot d\sigma$$

(1) Per maggiori dettagli cfr. la prima delle due Note del prof. Levi-Civita, ai nn. 1 e 2.

i quali, con l'introduzione della (5), possono scriversi

$$(9) \quad \begin{cases} M = \tau a v \cos k \int_{\sigma_1} \mu f d\sigma - \tau a \int_{\sigma_1} p f \cos \vartheta d\sigma \\ Q = \tau a v \cos k \int_{\sigma_1} p f d\sigma - \tau a \int_{\sigma_1} p w f \cos \vartheta d\sigma. \end{cases}$$

2. Avendosi

$$d\sigma = d\mu \cdot dp_1 dp_2 dp_3,$$

potremo sostituire al sistema delle coordinate cartesiane p_1, p_2, p_3 un sistema di coordinate polari con la stessa origine e l'asse diretto secondo il vettore \mathbf{n} ; avendo già indicato con ϑ l'angolo tra \mathbf{w} ed \mathbf{n} , questo diventa la distanza polare; indicando poi con φ l'angolo al polo, la trasformazione viene data da

$$(10) \quad p_1 = p \sin \vartheta \cos \varphi, \quad p_2 = p \sin \vartheta \sin \varphi, \quad p_3 = p \cos \vartheta,$$

$$(11) \quad d\sigma = d\mu \cdot p^2 dp \cdot \sin \vartheta d\vartheta \cdot d\varphi.$$

I limiti di variabilità per μ sono 0 ed ∞ , quelli per p e ϑ sono già dati nelle condizioni (6) e (6') ed infine quelli per l'argomento φ rimangono i soliti (0 e 2π).

Coll'introduzione della (11) e delle predette limitazioni nella prima delle (9), tenendo separate le parti del campo σ_1 che corrispondono rispettivamente alle condizioni (6) e (6'), risulta la seguente massa totale

$$(12) \quad \begin{aligned} M = & 2\pi\tau av \cos k \int_0^\infty \mu d\mu \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty f p^2 dp - \\ & - 2\pi\tau a \int_0^\infty d\mu \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^\infty f p^3 dp + \\ & + 2\pi\tau av \cos k \int_0^\infty \mu d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^e f p^2 dp - \\ & - 2\pi\tau a \int_0^\infty d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^e f p^3 dp \end{aligned}$$

avendo posto

$$(13) \quad \rho = \frac{\mu v \cos k}{\cos \vartheta}.$$

Calcolando poi le componenti del vettore \mathbf{Q} , dato dalla seconda delle (9), nel sistema definito dalle (10), introducendo cioè nella espressione di \mathbf{Q} ordi-

natamente le tre (10) insieme alla (11), si ottiene per le componenti nel piano dell'area a , essendo nullo l'integrale rispetto a φ ,

$$Q_1 = 0 \quad , \quad Q_2 = 0 ,$$

e quindi la componente Q_3 normale a detta area

$$\begin{aligned} (14) \quad Q_3 = & + 2 \pi \tau a v \cos k \int_0^\infty d\mu \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^\infty f p^3 dp - \\ & - 2 \pi \tau a \int_0^\infty \frac{1}{\mu} d\mu \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \int_0^\infty f p^4 dp + \\ & + 2 \pi \tau a v \cos k \int_0^\infty d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^e f p^3 dp - \\ & - 2 \pi \tau a \int_0^\infty \frac{1}{\mu} d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \int_0^e f p^4 dp . \end{aligned}$$

Si rileva così che il vettore \mathbf{Q} è normale all'area a , qualunque sia la velocità con cui questa si sposta; inoltre, come vedremo, il primo, il secondo ed il quarto termine di Q_3 sono negativi, mentre il terzo è in valore assoluto minore del primo, per cui Q_3 risulta negativo e quindi il vettore \mathbf{Q} opposto al vettore \mathbf{n} .

3. Dalla (14) segue immediatamente un'altra osservazione. Se è $\cos k = 0$, spariscono dalla espressione di Q_3 i termini che contengono v e rimane il solo secondo termine (essendo allora nullo anche ρ). Ciò significa che quando l'area a si sposta nel proprio piano, il vettore \mathbf{Q} non dipende dalla velocità con cui si muove l'area stessa; per ragioni di simmetria si comprende poi che il risultante delle quantità di moto di tutti i corpuscoli che colpiscono in questo caso la faccia posteriore di a deve essere $-\mathbf{Q}$. Ne consegue che per l'intera area a , considerata cioè soggetta all'aumento di massa simultaneamente da ambedue le sue faccie, il termine addizionale \mathbf{Q} della relazione (2) è nullo ogni volta che la velocità \mathbf{v} giace nel piano dell'area.

Immaginiamo un pianeta ipotetico dotato di moto rotatorio, ma non di moto traslatorio. Sia esso sferico e ruoti comunque intorno al suo centro di figura, e facciamo corrispondere ad ogni suo elemento superficiale a quello a' di uguale area diametralmente opposto. Essendo allora questi due elementi paralleli tra loro e normali alla loro congiungente, potremo considerarli come unica area a che abbia ambedue le sue faccie esposte all'incontro coi cor-

puscoli, ed essendo animati da velocità giacenti nel proprio piano (tangente alla sfera), le conclusioni precedenti relative al termine addizionale Q saranno senz'altro applicabili agli elementi superficiali di questo pianeta. In altre parole, il vettore Q applicato all'area a e quello $-Q$ applicato all'area a' hanno la stessa linea d'azione e quindi si distruggono.

Le stesse conclusioni possono poi estendersi al caso di un qualsiasi corpo rotondo che ruoti intorno al suo asse di simmetria e sia simmetrico rispetto ad un punto dell'asse, in particolare al caso di un pianeta che abbia la forma di un ellissoide schiacciato e ruoti intorno al suo asse minore, purchè si considerino globalmente due tali coppie di elementi superficiali (opposti rispetto al centro) situate simmetricamente rispetto all'asse di rotazione. Invero, mentre per i due elementi superficiali del pianeta sferico, opposti rispetto al centro, i corrispondenti vettori Q e $-Q$ (normali agli elementi) hanno la stessa linea d'azione, ciò non avviene per il corpo rotondo ora detto, e quindi i due vettori, pure essendo paralleli, non si annullano ma formano una coppia; associando invece ai detti elementi altri due, simmetrici a questi rispetto all'asse, i quattro vettori Q hanno risultante e momento risultante nullo.

Chimica. — *Clorito di magnesio e cloriti doppi di rame col magnesio, bario e tallio* ⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI e D. GHIRON, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

1. *Clorito di magnesio* $Mg(ClO_2)_2 \cdot 6H_2O$.

Si ottiene per doppio scambio da soluzioni concentrate di clorito di bario e solfato di magnesio. La soluzione di clorito di magnesio si lascia evaporare all'aria in ambiente scuro. (Non conviene evaporarla in essiccatore o sotto vuoto perchè in tali casi si decompone sensibilmente ingiallendo). Dopo alcuni giorni si separano delle tavole esagonali di notevoli dimensioni (fino a 6-7 mm. di diametro); i cristalli appaiono purissimi e assolutamente esenti da cloruri.

Analisi:

	Calcolato per $Mg(ClO_2)_2 \cdot 6H_2O$	Trovato
Mg	9.10	9.01
ClO_2	50.48	50.44
H_2O	40.42	40.55 (per differenza)

Il magnesio venne determinato come pirofosfato; il ClO_2 titolando lo iodio separato in soluzione acida.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1932.

I cristalli si conservano per un certo tempo; dopo alcuni giorni sfioriscono lievemente. In essiccatore su cloruro di calcio sfioriscono cadendo in polvere, però non si decompongono sensibilmente.

I cristalli si presentano sotto forma di ottaedri più sviluppati secondo una faccia. La sostanza appare però birifrangente uniassica, per cui si deve ammettere che effettivamente si tratta della combinazione della faccia di base (III) con un romboedro. Gli angoli acuti fra la faccia di base e quella del romboedro danno valori che si scostano alquanto fra di loro e le cui medie risultano di $70^{\circ}30'$. Sono, questi angoli, assai vicini a quelli dell'ottaedro per cui si deve ammettere che la sostanza è pseudocubica.

Assumendo il romboedro come quello fondamentale diretto, si cacola il rapporto assiale $c/a = 2.45$ che è esattamente quello corrispondente ad un romboedro il cui angolo al vertice acuto è di 60° .

Il fotogramma di Laue conferma l'esistenza di un asse di simmetria ternaria normale alla faccia di base. Il rapporto assiale risulta 2.44, quindi coincide perfettamente con quello dedotto dalla misura degli angoli.

Dallo studio del cristallo rotante secondo la faccia (III) si ricava il valore $a = 7.36$.

Supponendo che nella cella elementare sia contenuta una molecola, si calcolerebbe la densità 1.58 che sta in buon accordo con quella determinata sperimentalmente e cioè 1.62.

Clorito doppio di magnesio e rame $2\text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Mg}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$.

Per evaporazione, in essiccatore a vuoto, di una soluzione concentrata di clorito di rame e clorito di magnesio in quantità equimolecolari, si ottengono cristalli prismatici, che, per trasparenza in lamine sottili, appaiono gialli; se hanno un certo spessore sono opachi e colorati in bruno scuro. I cristalli sono sempre accompagnati da abbondante sale basico $3\text{Cu}(\text{OH})_2 \cdot \text{Cu}(\text{ClO}_2)_2$, polvere verde proveniente dalla decomposizione del clorito di rame. Quando non sono troppo piccoli è facile separarli da questa impurezza in modo da avere sostanza abbastanza pura per l'analisi.

Lo stesso sale si può ottenere mescolando soluzioni concentratissime di clorito di rame e clorito di magnesio, o meglio aggiungendo il clorito di magnesio solido a una soluzione di clorito di rame; precipita in queste condizioni come polvere cristallina di color giallo con riflessi verdastri; data la rapida precipitazione, il prodotto è esente da sale basico verde.

L'analisi venne fatta tanto sui cristalli ottenuti per evaporazione della soluzione (II) quanto su quelli ottenuti per precipitazione (I). Nel primo caso, data la difficoltà di avere una notevole quantità di cristalli puri, fu fatta solo la determinazione dei metalli, nel secondo invece l'analisi completa (l'acqua per differenza).

Il rame fu determinato elettroliticamente, il magnesio come pirofosfato, e il ClO_2 titolando con iposolfito lo iodio separato in soluzione acida, dopo aver precipitato il rame come carbonato.

	Calcolato per $2\text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Mg}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	Trovato	
		I	II
Ca	18.15	18.25	18.31
Mg	3.47	3.53	3.60
ClO_2	57.81	57.02	—
H_2O (per differenza)	21.57	21.20	—

Il titolo del ClO_2 (0.8 in meno) è dovuto ad una leggera decomposizione del prodotto che non si riesce ad evitare neanche nelle migliori condizioni.

Il composto appare abbastanza stabile e si conserva per un certo tempo inalterato. Dopo due settimane circa si decompone trasformandosi in polvere verde.

I cristalli presentano abito prismatico, terminato alle estremità da faccette abbastanza piccole. Le faccette prismatiche più sviluppate presentano una superficie assai imperfetta e danno al goniometro delle immagini multiple. Le misure degli angoli sono per questo sempre grossolane e mostrano trattarsi di cristalli vicini al sistema rombico, ma sono tali da non permettere di escludere una simmetria monoclinale la quale sarebbe piuttosto in accordo con quella di alcuni fotogrammi di Laue. Nella ipotesi che il cristallo sia rombico esso presenterebbe assai sviluppate le forme (001) e (101). Gli angoli tra (001) e (101) danno valori variabili da $55^\circ 11'$ e $52^\circ 13'$ con un valore medio di $53^\circ 24'$; da questo valore il rapporto fra gli assi x e z risulterebbe 0.742.

Più raramente compare un altro pinacoide che, nell'ipotesi di una simmetria rombica, sarebbe vicino alla (100). Il rapporto fra il parametro sull'asse y e quello sull'asse z non può essere calcolato nemmeno approssimativamente per la imperfezione dei cristalli. Considerato come monoclinale, il cristallo sarebbe allungato secondo l'asse delle y e l'angolo sarebbe vicino a 90° . La faccia (010) è piano di simmetria.

Clorito doppio di rame e bario $\text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Ba}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

A una soluzione di clorito di rame, ottenuto per doppio scambio da solfato di rame e clorito di bario, viene aggiunto clorito di bario. La soluzione limpida, dopo qualche tempo, deposita un po' di sale basico verde. Si filtra e si addiziona di un ugual volume di alcool assoluto; si ha ancora deposito di sale basico verde che viene separato per decantazione, e poi si forma lentamente un precipitato cristallino giallo verde fluorescente di aspetto simile ai sali di uranile, formato da prismi sottilissimi. Questi cristallini birifran-

genti monoclini o triclini, che non si prestano ad un esame cristallografico, si separano anche per rapida evaporazione all'aria di una soluzione concentrata di clorito di bario e clorito di rame; si ottengono in questo caso dei cristalli prismatici sottilissimi, lunghi fino a 6-7 mm., però sempre impuri di sale basico verde.

L'analisi venne fatta sul prodotto ottenuto per precipitazione con alcool. Esso conteneva ancora il 2.60 % di sale basico $3\text{Cu}(\text{OH})_2 \cdot \text{Cu}(\text{ClO}_2)_2$; tenendo conto di questa impurezza, i risultati dell'analisi furono i seguenti:

	Calcolato per $\text{Ba}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$	Trovato
Cu	11.71	11.65
Ba	25.32	25.24
ClO_2	49.71	49.55
H_2O	13.26	13.56 (per differenza)

La determinazione del ClO_2 venne fatta dopo aver separato il rame ed il bario come carbonati.

Clorito doppio di rame e di tallio $\text{TlClO}_2 \cdot \text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

Aggiungendo ad una soluzione concentrata di clorito di rame una soluzione concentrata di clorito di tallio, o meglio del clorito di tallio solido, si ha un precipitato cristallino pesante di color bruno rossiccio, contenente rame e tallio ed esente da cloruri. È abbastanza solubile in acqua, il sale solido, se tenuto in recipiente aperto, si conserva per parecchi giorni, mentre in recipiente chiuso dopo due giorni appare per la maggior parte decomposto in idrato tallico bruno ed in clorito basico di rame verde.

Analisi:

	Calcolato per $\text{TlClO}_2 \cdot \text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	Trovato
Cu	12.57	12.60
Tl	40.32	40.39
ClO_2	40.01	40.40
H_2O	7.10	6.61 (per differenza)

La separazione rame-tallio venne fatta, dopo aver evaporato la sostanza con acido solforico fino a comparsa di fumi bianchi per eliminare tutto il cloro presente, precipitando il rame come solfuro e determinando il tallio come ioduro talloso. Per la determinazione del ClO_2 venne precipitato il rame

come carbonato, poi il tallio come ioduro in soluzione alcalina, infine venne acidificato e titolato con iposolfito lo iodio liberato.

La maggior stabilità di questi cloriti doppi rispetto al corrispondente clorito di rame semplice, fa pensare che il gruppo ClO_2 e le molecole di acqua siano, almeno in parte, legate al rame con valenze di coordinazione.

Uno di noi (G. R. Levi) aveva già preparato nel 1923 il clorito doppio di rame e potassio⁽¹⁾: col presente lavoro la serie dei cloriti doppi resta perciò estesa; ma nessun altro autore ha preparato composti di questa serie ed il numero di essi è perciò ancora piuttosto limitato ed è prematuro far confronti con le numerosissima serie dei nitriti doppi; finora sembra tuttavia che nessuna analogia esista fra le due serie.

L'analogia nei diametri atomici del gruppo ClO_2 e NO_2 che Bernal ha fatto rilevare, in base alle nostre recenti ricerche, nel riassunto annuale di cristallografia del 1931 della Chemical Society non avrebbe quindi che un valore strettamente morfologico.

RIASSUMENDO.

Viene preparato il composto $\text{Mg}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, d. 1.62 in cristalli incolori romboedrici pseudocubici $c/a = 2.45$, non ancora descritto ed inoltre i seguenti cloriti doppi: $2\text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Mg}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$, cristalli bruni, gialli per trasparenza; $\text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{Ba}(\text{ClO}_2)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, cristalli giallo verdi fluorescenti; $\text{Cu}(\text{ClO}_2)_2 \cdot \text{TlClO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, polvere cristallina bruno rossiccia. Tutti questi cloriti doppi di rame mostrano una stabilità notevolmente maggiore di quella del clorito di rame semplice.

(1) G. R. LEVI e C. CIPOLLONE, *Cloriti di rame e di altri metalli*. « Rend. Acc. Lincei », XXXII, 5^a, 38 (1923).

Chimica (Chimica Agraria). — *Il potere assorbente del terreno per l'acido pirofosforico* ⁽¹⁾. Nota di A. FABRIS, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. MENOZZI.

1. È emerso da una serie di ricerche istituite in questo Laboratorio ⁽³⁾ che i pirofosfati non sono estranei al ciclo di trasformazione dell'acido fosforico nel terreno e alla nutrizione fosfatica delle piante.

Di fronte a tale rilievo, e accogliendo un suggerimento del prof. U. Pratolongo, ho creduto opportuno sottoporre ad indagine sperimentale il comportamento dei pirofosfati solubili nel terreno nei riguardi del potere assorbente di questo.

2. I saggi preliminari compiuti con soluzioni diluite di pirofosfato tetrasodico, $\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7 + 10\text{H}_2\text{O}$, avevano messo in rilievo un fatto di intensa fissazione dell'acido pirofosforico da parte del terreno, dopo soli 10 minuti di contatto. Era peraltro necessario misurare quale parte fosse da attribuire in tale fenomeno ai fatti di assorbimento propriamente detti, e quale parte fosse invece da attribuire alla precipitazione secondaria del pirofosfato calcico neutro (insolubile) formatosi nelle reazioni di doppio scambio coi cationi sodio.

I saggi definitivi furono perciò condotti con soluzioni diluite di pirofosfato acido di sodio (bisodico) $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$, esente da ortofosfati e da metafosfati, a fine di evitare ogni processo di precipitazione secondaria accanto al fenomeno di assorbimento propriamente detto. Al fine stesso furono provati nei riguardi del potere assorbente rispetto ai pirofosfati *quattro terreni esenti da carbonato calcico* e che sono qui sotto descritti:

Terreno I. — Terreno torboso del bassopiano padano, privo di calcare, ricchissimo di sostanza organica.

Terreno II. — Terreno della brughiera di Gallarate, privo di calcare, ricco di sostanza organica.

Terreno III. — Terreno di Puglia, di colore ocraceo, privo di calcare, povero di sostanza organica, ricco di ossido di ferro e di alluminio.

Terreno IV. — Terreno dell'Azienda del R. Istituto Superiore Agrario di Milano a Landriano, privo di calcare, povero di sostanza organica, sabbioso.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1932.

(3) O. T. ROTINI, *L'attività delle pirofosfatasi in alcuni substrati organici e nel terreno*. Comunicazione fatta alla XXI Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze in Roma il 9 ottobre 1932-X.

Le prove di assorbimento furono condotte in duplice serie per il terreno della brughiera di Gallarate.

In una prima serie fu misurata la velocità del processo di fissazione. Una stessa quantità di terreno, gr. 150, veniva posta a contatto con 300 cc. di soluzione 0.1 *n* di pirofosfato acido di sodio, $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ e la concentrazione della soluzione veniva determinata in tempi successivi previa agitazione e susseguente rapida filtrazione di parte del liquido a contatto con il terreno in esame. Su di una parte aliquota, 10 cc., di liquido filtrato, procedevo alla determinazione del titolo, idrolizzando prima il pirofosfato presente con acido nitrico e portando all'ebollizione per alcuni minuti e poscia precipitando l'anidride fosforica formatasi con molibdato ammonico. Il precipitato di fosfomolibdato ammonico ottenuto veniva trattato e titolato secondo le prescrizioni di Pemberton.

I risultati di tale prova sono riassunti nelle cifre seguenti:

L'ASSORBIMENTO DELL'ACIDO PIROFOSFORICO IN FUNZIONE DEL TEMPO.

150 grammi di terreno aggiunti di 300 cc. di $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ 0.1 *n*.

Tempo di contatto	Concentrazione iniziale gr. di $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ per 10 cc.	Concentrazione finale gr. di $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ per 10 cc.	Assorbimento assoluto	Assorbimento relativo %
5'	gr. 0.0534	gr. 0.0317	gr. 0.0217	40.6
1 ^h	» 0.0534	» 0.0269	» 0.0266	49.8
4 ^h 15'	» 0.0534	» 0.0223	» 0.0311	58.2
23 ^h	» 0.0534	» 0.0167	» 0.0367	68.7

Dai dati sopra esposti, si può trarre la conclusione che l'assorbimento da parte del terreno in esame per l'ione pirofosforico alla concentrazione 0.1 *n* è pressochè istantaneo per una frazione cospicua dell'assorbimento massimo, e raggiunge l'intensità massima nel decorso di 24 ore circa; con una soluzione 0.01 *n* l'assorbimento per lo stesso terreno della brughiera di Gallarate e dopo soli 5 minuti di contatto sale al 96.3 % del pirofosfato presente inizialmente nella soluzione; l'influenza della concentrazione sulla rapidità dei fenomeni di assorbimento appare quindi manifesta; con soluzioni 0.01 *n* e per terreni fortemente organici l'assorbimento si dimostra pressochè istantaneo.

Nella seconda serie di esperienze, effettuate per tutti e quattro i terreni descritti, vennero invece misurate le concentrazioni d'equilibrio di una serie di soluzioni variamente diluite e poste a contatto con una stessa quantità di terreno.

La parte sperimentale può essere così descritta:

gr. 50 del terreno in esame venivano posti a contatto con 100 cc. di una soluzione di pirofosfato acido di sodio, $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$. La prova veniva

ripetuta in quadruplo per ciascuno dei terreni, con soluzioni del pirofosfato, esattamente titolate, a concentrazioni 0.1 n, 0.04 n, 0.02 n, 0.01 n. Si agitava quindi per 5 minuti, indi si filtrava rapidamente e su di una parte del filtrato si determinava nuovamente il titolo che rappresentava la concentrazione salina finale.

A parte, nei terreni oggetto di studio, venne determinata l'umidità e ciò per tener conto della diluizione che subivano le concentrazioni iniziali per effetto del contatto con il terreno.

Il titolo, nelle soluzioni di pirofosfato, era determinato come ho già detto precedentemente parlando dell'assorbimento in funzione del tempo.

I risultati sono riassunti nella tabella seguente:

L'ASSORBIMENTO DELL'ACIDO PIROFOSFORICO IN FUNZIONE
DELLA CONCENTRAZIONE.

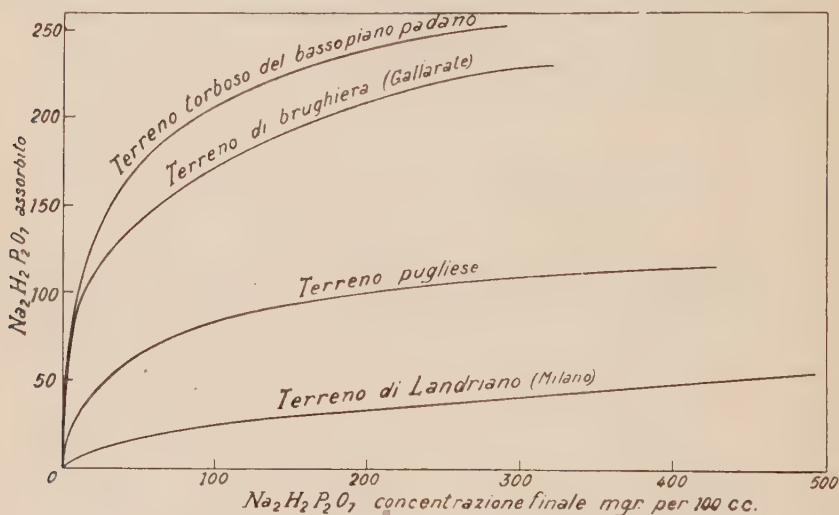
50 grammi di terreno aggiunti di 100 cc. di $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ a varie diluizioni.

5' di contatto

Terreno	Concentrazione iniziale gr. di $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ per 100 cc.	Concentrazione finale gr. di $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ per 100 cc.	Assorbimento assoluto	Assorbimento relativo %
I . . .	0.1 n - gr. 0.549	gr. 0.292	gr. 0.257	46.8
II . . .	0.1 n - » 0.549	» 0.328	» 0.221	40.2
III . . .	0.1 n - » 0.549	» 0.430	» 0.119	21.6
IV . . .	0.1 n - » 0.549	» 0.493	» 0.056	10.2
I . . .	0.04 n - » 0.219	» 0.049	» 0.170	77.6
II . . .	0.04 n - » 0.219	» 0.0695	» 0.1495	68.2
III . . .	0.04 n - » 0.219	» 0.1340	» 0.0850	38.8
IV . . .	0.04 n - » 0.219	» 0.1824	» 0.0366	16.7
I . . .	0.02 n - » 0.110	» 0.0122	» 0.0978	88.9
II . . .	0.02 n - » 0.110	» 0.0104	» 0.0996	90.5
III . . .	0.02 n - » 0.110	» 0.0465	» 0.0635	57.7
IV . . .	0.02 n - » 0.110	» 0.0842	» 0.0258	23.4
I . . .	0.01 n - » 0.0549	» 0.003	» 0.0519	94.5
II . . .	0.01 n - » 0.0549	» 0.002	» 0.0529	96.3
III . . .	0.01 n - » 0.0549	» 0.016	» 0.0389	70.8
IV . . .	0.01 n - » 0.0549	» 0.0344	» 0.0205	37.3

Come appare chiaramente dalla tabella numerica e dal diagramma che ne dà la traduzione grafica, il processo rivela, tanto nella velocità della fissazione quanto nelle correlazioni che legano le concentrazioni finali alle quantità di pirofosfati assorbiti, i caratteri tipici dei fenomeni di assorbimento colloidale.

3. L'assorbimento appare particolarmente intenso nei terreni fortemente organici. I costituenti organici del terreno rivelano cioè, con particolare intensità, l'attitudine a fissare l'acido pirofosforico dalle soluzioni di pirofosfati con le quali il terreno viene posto a contatto. È assai probabile che un'attività analoga sia spiegata dall'idrossido ferrico e dall'allumina; la riprova dell'esattezza di tale induzione è data dal comportamento del terreno rosso



*Il potere assorbente del terreno per l'acido pirofosforico
in funzione della concentrazione delle soluzioni.*

di Puglia, poverissimo di sostanza organica, che manifesta un'attività assorbente nei riguardi dell'ione pirofosforico notevolmente più intensa del terreno di Landriano; indubbiamente ciò è legato alla maggiore ricchezza in idrossido ferrico e d'alluminio di detto terreno.

CONCLUSIONI. — Il terreno è atto a fissare attivamente l'ione pirofosforico dalle soluzioni di pirofosfati con cui viene a contatto.

Tra i costituenti del terreno, sono principalmente le sostanze organiche che spiegano la massima attività assorbente.

L'assorbimento in funzione del tempo raggiunge la sua massima intensità, per soluzioni 0.1 n, e nelle nostre condizioni sperimentali, verso le 24 ore; con soluzioni più diluite — 0.01 n — l'assorbimento raggiunge la sua massima intensità nel decorso di pochi minuti.

Il fenomeno studiato ha i caratteri di un tipico fenomeno d'assorbimento colloidale.

Mineralogia. — *I giacimenti di minerali del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)* ⁽¹⁾. Nota di T. CARPANESE, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BOERIS.

PARTE I.

Qualche notizia sommaria sui giacimenti del Monte Rosso di Verra si trova in lavori concernenti alcuni minerali in essi raccolti. L'ing. Novarese diede per primo notizia di questi giacimenti con brevi cenni riportati in una Nota in cui F. Zambonini ⁽³⁾ descrive alcuni cristalli di *epidoto* fornitigli dal Novarese stesso e raccolti presso il Passo della Bettolina Nord. In seguito, nel 1910, G. Boeris ⁽⁴⁾ fornisce altre indicazioni su granuli di *perowskite* e di *ilmenite* dei surricordati giacimenti, ed accenna anche alla presenza di *prehnite*, di cristalli di *vesuviana* e di noduli di *titanolivina*. Nel 1925 io stesso ⁽⁵⁾ pubblicai due Note sull'*epidoto* del Monte Rosso, nelle quali descrissi una bella serie di cristalli raccolti da A. Bianchi. In seguito riferii in altre Note ⁽⁶⁾ sulla *proclorite*, il *granato*, la *vesuviana*, l'*ilmenite* e la *titanite* della stessa località. Espongo ora, a conclusione di questa serie di lavori, i risultati dei miei studi sulle rocce e sulla paragenesi mineralogica di questi giacimenti.

Il Monte Rosso di Verra è la prima delle cime che, a mezzogiorno del gruppo del Monte Rosa, costituiscono la catena di separazione tra l'alta Valle di Ayas (Valle di Verra) e l'alta Valle di Gressoney. Questa catena è quasi completamente formata da una potente massa di rocce verdi, prasiniti, anfiboliti, ecc. con peridotiti e serpentine, che si estendono verso la Val Sesia e verso la Val Tournanche a costituire, assieme ad intercalazioni di calcescisti ed a banchi di calcari e quarziti, la sinclinale mesozoica rovesciata che forma il rivestimento meridionale dell'anticlinale coricata di gneiss e micascisti del Monte Rosa. Il Monte Rosso, che appartiene a questa formazione di rocce

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1932.

(3) F. ZAMBONINI, *Sull'epidoto del Passo Bettolina, Vallone di Verra*, Roma, 1903, «Rend. R. Accad. Lincei», XII, 567.

(4) G. BOERIS, *Appunti di mineralogia valdostana. Minerali del Monte Rosso in Valle di Ayas*, Bologna, 1910, «Rend. R. Accad. delle Scienze», XIV, 180.

(5) T. CARPANESE, *L'epidoto del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa)*, Nota I, Roma, 1925, «Rend. R. Accad. Lincei», II, 276; Nota II, Roma, 1925, id., II, 349.

(6) T. CARPANESE, *La proclorite del Monte Rosso di Verra*, ecc., Roma, 1929, «Rend. R. Accad. Lincei», IX, 77; *Granato, vesuviana, ilmenite e titanite del Monte Rosso di Verra*, ecc.; parte I, *Granato e vesuviana*, Roma, 1932, id., XV, 591; parte II, *Ilmenite e titanite*, Roma, 1932, id., XV, 694.

verdi, sorge al limite fra queste e gli scisti del Monte Rosa. Il contatto trovasi sul versante settentrionale del Monte Rosso, che domina il Vallone di Verra, ed è quasi ovunque nascosto da detriti di falda. Nella parte più elevata del Vallone di Verra, ad occidente del più settentrionale dei valichi fra Valle di Verra e Valle di Gressoney, che l'ing. Novarese chiama Passo della Bettolina Nord per distinguerlo dal Passo della Bettolina che trovasi a sud del Monte Rosso, le rocce verdi sono rappresentate principalmente da una potente massa serpentinoso; mentre ad oriente, nella parte che domina la Valle di Gressoney, si sviluppano masse prevalentemente costituite da prasiniti ed anfiboliti. Anche verso il contatto fra la massa serpentinoso e gli scisti gneissici del Vallone di Verra si trovano dei banchi sottili di prasiniti anfiboliche ed anfiboliti.

La massa di rocce verdi che propriamente costituisce la cima del Monte Rosso ed il suo versante settentrionale si presenta quasi completamente serpentinnizzata; nuclei estesi di peridotite o pirossenite originaria sono scarsi, e si trovano solo qua e là in qualche punto. In questa zona invece si osservano numerose concentrazioni, vene e lenti, essenzialmente costituite di granato, diopside, vesuviana, clorite, epidoto e di altri minerali variamente associati, con geodi e litoclasti tappezzate di bei cristalli. Queste concentrazioni e questi giacimenti speciali sono soprattutto frequenti in vicinanza del Passo Bettolina Nord, cioè presso il contatto fra la massa serpentinoso, le prasiniti e gli scisti, ed alla base dei canali che incidono la parete settentrionale del Monte Rosso, sotto la cima.

Le maggiori e più caratteristiche fra le lenti ricordate spiccano nettamente dal resto della massa per la loro tinta più chiara, a toni verdi e rosa. Esse sono costituite da una serie di zone parallele in cui alternativamente predominano il granato, la vesuviana e la clorite, in un aggregato di questi minerali. Le lenti, incluse nel serpentino, sono talora come racchiuse da una guaina di scisto cloritico.

In sezione sottile al microscopio, il *granato* appare talora in larghe plaghe a leggera tinta giallo-rosea, quasi senza inclusioni; spesso invece costituisce dei fitti intrecci di aggregati granulari con lamelle di clorite o coi granuli del diopside.

La *clorite* è quasi sempre in lamelle minute, generalmente contorte e fittamente intrecciate, o talvolta a disposizione subparallela. Sono sempre incolore in sezione sottile, grigie o chiare a nicols incrociati, e con estinzione ondulata, parallela o quasi alle tracce di sfaldatura. Il carattere della zona d'allungamento è sempre negativo. L'angolo degli assi ottici è molto variabile, e generalmente piccolo. Nei cristalli isolati che si trovano nelle geodi tale angolo sembra essere alquanto maggiore che nella clorite che trovasi come elemento della roccia; esso è però variabile da punto a punto di una stessa lamina. Da alcune misure eseguite con oculare micrometrico ottenni per 2V i valori massimi di 45°-50°.

Il *diopside* è generalmente in piccoli granuli freschi, idiomorfi, con una marcata e regolare doppia sfaldatura pirossenica, e sempre incolori in sezione sottile; talvolta però si trova anche in larghe plaghe informi. Si notano talora dei geminati secondo (100), a lamelle polisintetiche. Il minerale è otticamente positivo. Nelle lamine parallele a (010), che presentano i più elevati colori di interferenza e da cui si osserva emergere la normale ottica, ho misurato alcuni angoli di estinzione, con massimi per $\chi : n_g$ di 39° – 40° . L'angolo degli assi ottici, misurato su vari individui col tavolino universale di Fedorow, risultò: $2V = 58^\circ$ – 59° , per la luce del sodio. Questi caratteri, posti a confronto con le numerose determinazioni note per la famiglia dei pirosseni, permettono di concludere che si tratta di un diopside con scarsissimo contenuto di Fe e di Al. Infatti per i noti, caratteristici cristalli di diopside chiaro, poco ferifero, di Val d'Ala, che si trovano in giacimenti analoghi a quelli del Monte Rosso, si ha: ⁽¹⁾

$$\begin{array}{lll} \chi : n_g = 38^\circ 41' & , & 38^\circ 49' & , & 38^\circ 54' \\ 2V & = & 59^\circ 15' & , & 59^\circ 18' & , & 58^\circ 59' \end{array}$$

Si osservano anche delle caratteristiche associazioni regolari di clorite e diopside, cioè delle lamine di clorite che presentano delle inclusioni di piccolissimi, numerosi cristallini prismatici di diopside allineati in serie parallele secondo le sfaldature della clorite.

In questi aggregati si trova la *vesuviana* in quantità subordinata. Questa, di color giallo-verde in massa, si presenta in sezione sottile in grossi elementi irregolari associati al granato, da cui a malapena si distingue per il suo bassissimo potere birifrangente. Gli elementi di vesuviana hanno colori di polarizzazione cupi, appena distinguibili, a chiazze giallo-brune o bruno-rosse, e manifestano sovente, per le note anomalie ottiche, una piccola ma evidente biassicità. Sono spesso ricchi di inclusioni di piccoli granuli di granato.

In qualche altra lente dello stesso giacimento la vesuviana prevale nettamente, associata soprattutto a clorite e diopside, e si trova in granuli prismatici allineati in lunghe serie, con poche nette tracce di sfaldatura trasversale. L'estinzione è parallela alla sfaldatura. Il carattere della zona d'allungamento si mantiene negativo in tutti i granuli.

In queste lenti l'*epidoto* si trova sempre in quantità assai limitata, e cioè si osserva, nelle sezioni sottili, in piccoli granuli irregolari sparsi qua e là nella roccia e messi in evidenza specialmente dalle tipiche distribuzioni irregolari, chiazze, dei colori di interferenza.

(1) H. ROSEBUSCH, *Mikroskopische Physiographie*, ecc., vol. I, parte II, Stuttgart, 1927, p. 467; A. BIANCHI, *Augite diopsidica del Monte Cervandone in Val Devero, (Ossola)*, Pavia, 1920, «Atti della Soc. It. di Scienze Nat.», LIX, 118.

I minerali che troviamo cristallizzati nelle geodi delle lenti ora descritte sono principalmente il granato e la clorite, dei quali riferii nelle già citate Note particolari. Ricorderò qui soltanto che dalle analisi di questi minerali, da me eseguite, risulta che il granato è costituito essenzialmente da una miscela di grossularia e andradite, con piccole quantità di almandino e spessartina, e che la clorite è una proclorite povera di Fe.

Più ricche di epidoto sono altre intercalazioni che si trovano in gran numero fra queste masse serpentinosi delle pendici settentrionali del Monte Rosso, e fra i detriti di falda del Vallone di Verra, soprattutto in vicinanza del Passo Bettolina Nord. Queste masse si presentano all'osservazione macroscopica come aggregati irregolari di clorite e di granato, con frequenti concentrazioni di epidoto e diopside. Presso queste concentrazioni, ove si sviluppano le geodi cristallizzate, la roccia presenta struttura granulare.

L'*epidoto* si trova in granuli talora a contorno cristallino, ma per lo più irregolari, spesso zonati, e coi caratteristici colori anomali d'interferenza. L'estinzione è parallela nelle sezioni allungate secondo y . Le sezioni normali a χ presentano un doppio sistema di sfaldature, di cui una più netta e regolare secondo (001), l'altra meno netta secondo (100). L'angolo di estinzione fra la direzione n_g e le tracce di sfaldatura secondo (001) nelle lamine normali ad y è di 27° – 28° , da cui si calcola che la bisettrice acuta negativa fa un angolo positivo di 1° – 2° circa con l'asse χ . L'angolo degli assi ottici, misurato col tavolino universale in alcune lamine regolari senza zonature nè chiazze di colori di polarizzazione, risultò di 80° – 81° . Si osservano anche alcuni dei caratteristici geminati di contatto secondo (100), con piccolissimo angolo di estinzione simmetrica sulla traccia del piano di geminazione: $\chi : n_p = + 1,5^\circ, + 2^\circ$. Da questi caratteri si può dedurre che si tratta di un termine non molto ferrifero della famiglia degli epidoti. I cristalli a tinta giallo-verdognola più frequente fra quelli che si trovano nelle geodi, dei quali eseguii lo studio particolareggiato ottico e chimico, già riferito in altre Note, presentano caratteri ottici molto concordanti con quelli degli elementi della roccia, e contengono il 22.9 % di ferri-epidoto.

In queste zone si trovano anche numerosi granuli di *titanite*, a sezione rombica acuta, con indici di rifrazione molto elevati e doppia rifrazione fortissima, talora geminati secondo (100). In un cristallo geminato, con estinzione esattamente simmetrica rispetto alla traccia del piano di geminazione, ho potuto determinare l'angolo di estinzione $\chi : n_g = 50^\circ$ – 51° . Alcuni di questi granuli sono circondati da chiazze di alterazione in leucoxeno. Anche nelle geodi si trovano talora dei minuscoli cristallini di titanite, sui quali potei eseguire numerose misure cristallografiche, determinandovi quattro forme nuove per il minerale. Sui risultati di tale studio cristallografico riferii già in altro lavoro.

Le geodi con cristalli di granato e clorite si trovano qui più raramente che nelle lenti di granatite sopradescritte; invece abbondano soprattutto le

litoclasti tappezzate di cristallini di diopside e di bei cristalli di epidoto. Nell'immediata vicinanza delle geodi, anche la roccia è ridotta quasi esclusivamente ad un impasto di epidoto e diopside con della clorite. Il diopside si presenta nelle geodi in cristallini opachi di color verdognolo chiaro, talora associati in fasci paralleli. Non si osservano forme cristalline distinte, cosicchè non potei eseguire uno studio particolareggiato di questo minerale. Assai ben formati sono invece i cristalli di epidoto, che descrissi nelle note già citate.

Rimando ora, per ragioni di spazio, ad una Nota successiva il seguito e le conclusioni del lavoro.

Mineralogia. — *L'acqua nella tremolite del Monte Spinosa nel Campigliese*⁽¹⁾. Nota di F. RODOLICO, presentata⁽²⁾ dal Corrispondente P. ALOISI.

In una recente Nota⁽³⁾ ho descritto la tremolite da me trovata sul Monte Spinosa nel Campigliese, ed ho fatto osservare che i risultati dell'analisi chimica, eseguita su ottimo materiale, sono concordanti con quelli teorici calcolati, col metodo proposto dal Warren, sulla base della formula: $H_2Ca_2Mg_5(SiO_3)_8$. Come è noto questa formula è stata proposta dal Gossner⁽⁴⁾, dal Kunitz⁽⁵⁾, e dallo stesso Warren⁽⁶⁾; essa differisce da quella classica $CaMg_3(SiO_3)_4$ per la variazione del rapporto $CaO : MgO$, che da 1 : 3 diviene 2 : 5, e per l'introduzione dell'acqua nella costituzione del

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1932.

(3) F. RODOLICO, *Diopside e tremolite del Monte Spinosa nel Campigliese*, «Rend. R. Accad. Lincei», XIII, [6], 705 (1931). Nella tabella a p. 707 di questo lavoro, sotto il titolo $CaMg_3(SiO_3)_4$, invece dei percenti teorici, sono riportati quelli sperimentali della tremolite studiata. La tabella deve essere sostituita dalla seguente:

	$CaMg_3(SiO_3)_4$		$H_2Ca_2Mg_5(SiO_3)_8$	
SiO ₂	57,67	0,956	59,25	0,983
MgO	28,92	0,717	24,76	0,614
CaO	13,41	0,239	13,78	0,246
H ₂ O	—	—	2,21	0,123

(4) B. GOSSNER, *Die chemische Konstitution der monoklinen Pyroxene und der Amphibole. II Amphibolgruppe*, «Zeitschr. f. Kryst.», LX, 368 (1924). Vedi anche Id., *Zur Frage der Zusammensetzung des Tremolits*, «Zeitschr. f. Kryst.», LXXIII, 114 (1930).

(5) W. KUNITZ, *Die Isomorphieverhältnisse in der Hornblendegruppe*, «N. Jahrbuch f. Min. etc.», Beilage-Band, Abt. A, LX, 192 (1930).

(6) B. E. WARREN, *The structure of Tremolite $H_2Ca_2Mg_5(SiO_3)_8$* , «Zeitschr. f. Kryst.», LXXII, 42 (1929); Id., *The crystal structure and chemical composition of the monoclinic amphiboles*, «Zeitschr. f. Kryst.», LXXII, 493 (1929).

minerale. L'acqua presente nella tremolite era stata considerata invece acqua di soluzione dall'Allen e dal Clement⁽¹⁾.

Sull'acqua contenuta nel minerale da me studiato così scrivevo: « La quantità corrisponde quasi esattamente a quella calcolata con la nuova formula, ma la sua funzione non mi appare chiara giacchè ho potuto confermare le osservazioni di Allen e Clement » sul comportamento ottico del minerale durante e dopo la disidratazione. Fino da allora mi ero proposto di eseguire dei fotogrammi, col metodo di Debye e Scherrer, per verificare se il minerale, dopo essere stato qualche ora in un forno elettrico alla temperatura di circa 1000° (condizione questa necessaria per l'eliminazione completa dell'acqua) presentasse qualche variazione nella struttura. Ho potuto adesso compiere tale ricerca nell'Istituto di Chimica generale della R. Uni-

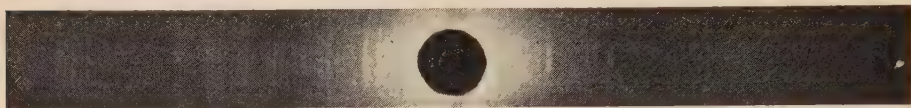


Fig. 1.

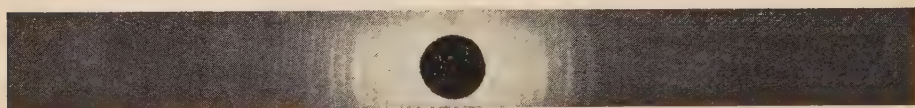


Fig. 2.

versità di Firenze diretto dal prof. Luigi Rolla; a lui ed al suo assistente dott. Rossi rivolgo i miei più vivi ringraziamenti.

Ho eseguito alcuni fotogrammi esattamente nelle stesse condizioni, e cioè utilizzando le radiazioni K del rame e dando due ore e un quarto di posa con una tensione di 35 KV. ed una intensità di 6 mA. La fig. 1 riproduce il fotogramma ottenuto dalla tremolite del Monte Spinosa; la fig. 2 quello dello stesso minerale dopo la disidratazione. I due fotogrammi non sono sovrapponibili presentando notevoli differenze, tanto nella posizione, quanto nella intensità delle righe d'interferenza. Da questa osservazione, sia pure semplicemente qualitativa, si deduce che le due sostanze non presentano lo stesso tipo strutturale.

Questo fatto è a favore dell'ipotesi che l'acqua nella tremolite sia acqua di costituzione; ed è in contrasto con quanto Allen e Clement hanno dedotto dalle loro osservazioni sulla curva di disidratazione e sulle proprietà ottiche che il minerale presenta dopo la perdita dell'acqua.

(1) E. T. ALLEN e J. K. CLEMENT, *The rôle of water in Tremolite and certain other minerals*, « Am. Jour. Sci. », XXVI [4], 102 (1908).

Per quanto riguarda la curva di disidratazione, Allen e Clement così scrivono: « Tutte le curve » eseguite per quattro tremoliti provenienti da luoghi diversi « crescono molto lentamente ed in maniera quasi rettilinea sino a quando non sia raggiunto un punto vicino a 850° , dove esse piegano fortemente verso l'alto... Le curve appaiono dolci; tuttavia si potrebbe sospettare che un così energico cambiamento nella curvatura indicasse qualche brusco cambiamento nelle condizioni fisiche o chimiche del minerale. Comunque le osservazioni ottiche mostrano che la forma cristallina, con quelle proprietà ottiche che possono essere quantitativamente misurate - angolo di estinzione, indici di rifrazione - rimangono pressochè inalterate », e dopo avere notato che per tali ragioni l'acqua « non può essere chimicamente combinata », concludono che essa « deve essere considerata come disciolta ed il minerale come una soluzione solida » ⁽¹⁾. Da questo passo, e dall'esame delle curve riportate nel lavoro di Allen e Clement, appare evidente che i due autori avrebbero considerato una parte almeno dell'acqua contenuta nel minerale come acqua di costituzione, se non avessero tenuto conto delle osservazioni ottiche.

Anche per la tremolite del Monte Spinosa, non è possibile distinguere al microscopio il minerale naturale da quello disidratato, ma, come hanno recentemente notato per il berillo lo Zambonini ed il Caglioti, « il fatto di conservare le proprietà ottiche... dopo la disidratazione, non può interpretarsi senz'altro come una prova che l'acqua eliminata non apparteneva alla costituzione del minerale » ⁽²⁾. A questa conclusione i due autori sono stati tratti da alcuni esempi molto convincenti. « Basterà ricordare - essi scrivono - la brucite, studiata assai bene dal Rinne e dal Westphal, i quali hanno dimostrato che quel minerale, che è drossido di magnesio trigonale, può perdere tutta l'acqua, conservando sempre, fino a disidratazione completa, il carattere ottico uniassico. Le stesse miche, come ha mostrato Brun, ed è stato confermato da altri studiosi, possono venire disidratate, senza che le proprietà ottiche siano modificate in modo essenziale ».

Sono certamente desiderabili nuove e più complete ricerche sull'argomento, ma nel complesso mi sembra che l'acqua nella tremolite possa essere considerata come acqua di costituzione, e ciò in perfetto accordo con la formula di Gossner, Kunitz e Warren.

Zoologia. — *Riproduzione sperimentale di un quadro anatomo-patologico simile a quello del panno tracomatoso umano.* Nota di A. BUSACCA, presentata dal Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) E. T. ALLEN e J. CLEMENT, op. cit., pp. 107-109.

(2) F. ZAMBONINI e V. CAGLIOTI, *Ricerche chimiche sulla rosterite di San Piero in Campo (Isola d'Elba) e sui berilli in generale* « Gazzetta chim. It. », LVIII, 143 (1928).

INDICE DEL VOLUME XVI, SERIE VI. — RENDICONTI

1932. Secondo Semestre

INDICE PER AUTORI

A

- AGAMENNONE G. — «La pretesa ripercussione, agli antipodi, dell'eruzione del Cracatoa del 1883». 127.
- ALLEGRETTI L. — «La struttura della riga 6708 del litio osservata in emissione». 33.
- ALMANSI E. — «Sulle deformazioni delle piastre elastiche». Nota I, 473. — Nota II, 597. — Nota III, 603.
- AMANTEA G. e FAMIANI V. — «Ancora sulla possibilità di ottenere fenomeni beriberici durevoli da privazione del fattore B». 353.
- AMATI A. — Vedi MEZZADROLI G.
- ANDREATTA C. — «Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica». 62.
- ANTONIANI C. e ZANELLI F. — «Ricerche sulla colesterina cerebrale umana». 150.
- ANTONIANI C. — «Ricerche nel gruppo delle fitosterine. — II. Sulle sterine dell'olio di riso». 510.
- ARMELLINI G. — «Alcuni teoremi sul problema dei due corpi di masse decrescenti». 77.
- ASCOLI G. — «Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale». 571, 604.
- tica di alcuni sali complessi dell'argento bivalente». 44.
- BARBIERI U. — «Stazione astronomico-geodetica eseguita nel vertice trigonometrico di 1° ordine di M. Crea nel luglio 1930». 500.
- BARONI A. — «Sulle leghe di litio. — I. Analisi termica e röntgenografica del sistema litio-stagno». 153.
- Id. — «Diselenmesoxanilidi ed ossiselenanilidi». 253.
- Id. — «Protoselensolfocloruro». 514.
- BEMPORAD A. — «Moti propri e moti orbitali risultanti dal Catalogo Astrografico di Catania». 470.
- BERNSTEIN V. — «Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet». 6.
- BIGAZZI R. — «Sopra una costante strutturale relativa ai passaggi di stato». 48.
- BIGGIOGERO G. — «Vedute geometriche sui tensori». 478.
- BLANC G. A. — «Persistenza di struttura anisotropa nella silice derivante dall'attacco della leucite con acidi». 3.
- BOGGIO T. — «Sulla curvatura delle linee di varietà». 87.
- BONVICINI D. — «Sulle deformazioni non infinitesime». 607.
- BOSSOLASCO M. — «Misure magnetiche a Mogadiscio». 438, 576.
- BOTTINI O. — «Su alcune relazioni tra composizione chimica del terreno e composizione chimica del suo contenuto colloidale». 584.

B

- BACCAREDDA M. — «Sulla struttura della sferocobaltite». 248.
- BARBIERI G. A. — «Preparazione elettroli-

BUSACCA A. — « Riproduzione sperimentale di un quadro anatomico-patologico simile a quello del panno tracomatoso umano ». 647.

C

CACCIOPOLI R. — « Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali ». Nota I. 390. Nota II. 484.

CANNATA C. — « Sopra un'estensione della formola di Woo. Intensità della luce diffusa da un elettrone in moto ». 328.

CARPANESE T. — « I giacimenti di minerali del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa) ». Parte I. 641.

CARRARA N. — « Corollario al teorema della derivazione delle funzioni definite da integrali. - Applicazione ai metodi di misura sperimentali delle grandezze fisiche ». 439.

CAVINATO A. — « Dilatazione termica nei cristalli e legge di Haüy ». 163.

CHAMARD L. — « Sur les points (α), au sens de M. Georges Durand ». 396.

CHAPIRO H. — « Sur la transplantation du transport parallèle ». 92.

CHARRIER G. e GHIGI E. — « Azione dei ioduri di alchilmagnesio sull'(1,9)-benzantrone-(10) ». 257.

ID. — « Azione dell'ammoniaca sull'acenaftenchinone ». 262.

CHERUBINO S. — « Sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale ». 285.

ID. — « Ancora sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale ». 401.

CIBRARIO M. — « Primi studii intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-paraboliche ». 10.

CIMINO M. — « Sulla legge delle aree di un moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo ». 120.

ID. — « Sulla correzione einsteiniana del tempo in un moto planetario ». 223.

CISOTTI U. — « Spostamenti rigidi finiti ». 381.

CISOTTI U. — « Corrente traslocircolatoria piana che investe un'asta rettilinea indefinita. Azioni dinamiche ». 465.

ID. — « Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo circolare munito di un'appendice rettilinea indefinita ». 541.

COLOMBO B. — « Sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine ». 291.

COMESSATTI A. — « Sulla serie canonica di una superficie algebrica ». 555.

CROCCO G. A. — « La stabilità nel volo strumentale ». 71.

D

D'AGOSTINO O. — Vedi PARRAVANO N.

DEI C. — « Sui circuiti che hanno una capacità in parallelo su un diodo in saturazione ». 334.

DEL CHIARO A. — « Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz ». 16.

DE VITO G. — Vedi PARISI E.

E

EINAUDI R. — « Sul comportamento magnetico della molecola di ossigeno ». 133.

ENRIQUES F. — « Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica ». 533.

ID. — « Sulle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la rappresentazione piana della superficie razionale a sezioni ellittiche dell'ottavo ordine ». 540.

F

FABRIS A. — « Il potere assorbente del terreno per l'acido pirofosforico ». 637.

FAMIANI V. e ZAGAMI V. — « Raffronti tra il valore alimentare ricostruttivo di alcuni legumi e quello del grano ». 57.

FAMIANI V. — « Contributo alla conoscenza del valore nutritivo degli embrioni di grano ». 275.

ID. — « Sulla capacità di consumo alimentare nella rialimentazione dopo digiuno ». 357.

- FAMIANI V. — « Contributo alla conoscenza del valore alimentare ricostruttivo degli embrioni di vari semi di cereali e leguminose ». 360.
- ID. — Vedi AMANTEA G.
- FERMI E. — « Sulle bande di oscillazione e rotazione dell'ammoniaca ». 179.
- FERRARI A. e TRAMPETTI G. — « Ricerche sul comportamento delle miscele di ossido di zinco e di cloruro di zinco anidro ad alta temperatura ». 343.
- FINZI B. — « Tensori vettoriali e loro derivazione ». 404.
- ID. — « Velocità di gruppo per onde associate a fenomeni ». 489.

G

- GARELLI F. e RACCIU G. — « Il fosfato trifosforico come solvente crioscopico ». 54.
- GHERMANESCO M. — « Sur les polynômes orthogonaux à deux variables ». 194.
- GHIGI E. — Vedi CHARRIER G.
- GHIRON D. — Vedi LEVI G. R.
- GLEIJESES M. — « Sulla teoria della "scia" nei liquidi perfetti. — Caso del cilindro rotondo ». 435.
- GOMES R. L. — « Opération linéaires. Matrices limitées ». 572.
- GUARESCHI C. — « Primi risultati del metodo combinato: suscettibilità differenziale e colori vitali, nello sviluppo degli Anfibi ». 345.
- GUERRIERI E. — « Periodicità nell'andamento progressivo della pioggia a Capodimonte 1833-1931 ». 243.

H

- HAIMOVICI M. e POPA E. — « Corrispondenza per piani tangenti paralleli ». 19.
- HAMBURGER H. — « La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — II. Applications de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique ». 200.
- ID. — « La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — III. Les systèmes cycliques de Ribaucour ». 296.

- HLAVATÝ V. — « Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$) ». 109.
- ID. — « Encore sur les invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$) ». 206.
- ID. — « Courbures projectives d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$) ». 299.
- HOSTINSKÝ B. — « Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires ». 25.

K

- KIVELIOVITCH M. — « Régularisation des chocs binaires pour des forces proportionnelles à l'inverse d'une puissance quelconque de la distance ». 227.
- KOSAMBI D. D. — « Géométrie différentielle et calcul des variations ». 410.
- KOURENSKY M. — « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — I. Cas général ». 415.
- ID. — « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — II. Systèmes contenant cinq dérivées du second ordre ». 496.
- ID. — « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — III. Systèmes contenant quatre dérivées du second ordre ». 567.
- ID. — « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — IV. Systèmes contenant trois dérivées du second ordre ». 612.
- KRALL G. — « Parametri variabili e previsioni asintotiche in qualche problema di meccanica celeste ». 575.

L

- LABOCETTA L. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — I. Sommazione delle funzioni puntiformi ». 27.

LABOCCETTA L. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — II. Riduzione a Tipi Normali e Integrali fondamentali ». 95.

ID. — « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — III. Funzioni periodiche ». 212.

LAMPARIELLO G. — « Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica sollecitata agli estremi ». 102.

LEVI G. R. e GHIRON D. — « Clorito di magnesio e cloriti doppi di rame col magnesio, bario e tallio ». 632.

M

MAJORANA Q. — « Su di una nuova esperienza fotoelettrica ». 82.

ID. — « Ancora su di una nuova esperienza fotoelettrica ». 173.

ID. — « Su di un nuovo fenomeno fotoelettrico presentato da lamine metalliche ». 548.

MAMMANA G. — « Sulla risoluzione numerica di un sistema di equazioni ». 617.

MANGERON D. — « Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie ». 305.

MARTIN E. — « Metodo II^o per il calcolo d'orbita di una binaria visuale ». 231.

MEZZADROLI G. e AMATI A. — « Azione di alcuni alcaloidi sullo sviluppo dell'Aspergillus Niger ». 366.

MINETTI S. — « Un teorema generale sulle successioni di funzioni convergenti verso una funzione olomorfa ». 572.

MITOLO M. — « Avitaminosi ed intossicazioni. - I: Polineurite sperimentale ed intossicazione chimica da metalli e metalloidi ». 451.

ID. — « Avitaminosi ed intossicazioni. - II: Scorbuto sperimentale ed intossicazione chimica da metalli e metalloidi ». 528.

MONTEROSSO B. — « Studii cirripedologici. - IX. Anaerobiosi in "Chthamalus stellatus" Ranzani ». 165.

N

NATTA G. e PIRANI R. — « Soluzioni solide per precipitazione ed isomorfismo tra complessi del platino e del tellurio trivalente. — II. Esame del clorotellurito di cesio e dei sistemi CsPtCl₆—CsTeCl₆, Rb₂PtCl₆—Cs₂PtCl₆ ». 265.

P

PALAZZO L. — « Materiali per la ricostruzione delle carte magnetiche d'Italia (IV Contributo: Piemonte) ». 373.

PARISI E. e DE VITO G. — « Distribuzione dei nitrati ed "organicazione" dell'azoto nelle foglie delle piante verdi ». 270.

PARRAVANO N. e D'AGOSTINO O. — « Velocità di dissoluzione di allumina industriali nella criolite fusa ». 186.

PASCAL M. — « Sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a se stesso. - II. Centro istantaneo di velocità e conseguenze ». 320.

PASTEGA G. — « Potenze di ricupero e di accrescimento di occhi ciclopi di embrioni "a litio" di Rana esculenta ». 170.

PASTORI M. — « Tensori emisimmetrici coniugati ». 216.

ID. — « Proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati ». 311.

ID. — « Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali ». 572, 621.

ID. — « Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali: relazione con gli insiemi derivati ». 626.

PERRI T. — « Sul comportamento dell'abozzo oculare espantato di Anfibi. Esperienze di fusione e regolazione ». 349.

PFEIFFER G. — « La simplification des recherches de L. Bianchi, généralisantes le caractère de S. Lie, que les paramètres soient essentiels ». 420.

ID. — « Sur les solutions linéairement indépendantes des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ». 427.

PINCHERLE L. — « Su una serie perturbata dello spettro dell'alluminio ionizzato ». 35.

- PIRANI R. — Vedi NATTA G.
POPA E. — Vedi HAIMOVICI M.
PRATESI P. — « Rodanpirroli, tiopirroli e disolfuri pirrolici ». 443.
PROVIERO A. — « Ancora intorno allo smorzamento dei sismografi ». 237.

Q

- QUAGLIARIELLO G. — « La presenza nella bile di un enzima deidrogenante l'acido stearico ». 387.
ID. — « Presenza nelle cellule del tessuto adiposo di una deidrogenasi attiva su gli acidi grassi superiori ». 552.

R

- RACCIU G. — Vedi GARELLI F.
RANZI I. — « Nuovo dispositivo per ricerche sulla struttura della regione di Heavyside ». 40.
RENZ O. — « La posizione tettonica delle argille scagliose tra la catena mesozoica di Gubbio e la valle Tiberina ». 448.
RODOLICO F. — « L'acqua nella tremolite del Monte Spinoso nel Campigliese ». 645.
ROSENBLATT A. — « Sopra la questione della unicità per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali ». 429.
ROVERETO G. — « Una interpretazione tettonica del promontorio occidentale del Golfo della Spezia ». 191.

S

- SABATUCCI N. — « Sull'azione tossica e sulla eliminazione della nicotina. - I: Azione tossica della nicotina e dell'ossinicotina ». 520.
ID. — « Sull'azione tossica e sull'eliminazione della nicotina. - II: Eliminazione ed assorbimento cutaneo della nicotina e della caffeina ». 524.
SALVATORI A. — « Contributo alla conoscenza della natura e del valore della Reazione di Bezssonoff per fattore C ». 369.
SCARSELLA F. — « La diffusione degli strati

a Posidonomya alpina nell'Appennino Centrale » 159.

- SEGRE B. — « Sulle condizioni per la regolarità di un sistema lineare di forme ». 114.
ID. — « Sulle superficie algebriche aventi il sistema canonico composto con un'involuzione ». 316.
ID. — « Rivendicazione di priorità ». 434.
SEGRÈ E. — « Righe di quadrupolo negli spetttri di raggi X ». 442.
STRANEO P. — « Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta ». 139.

T

- TRAMPETTI G. — Vedi FERRARI A.
TRICOMI F. — « Su di un'equazione trascendente della statica ». 560.

U

- URBAŃSKI W. S. — « Sur l'intégration des équations de Hamilton pour une durée de temps infinie ». 105.

V

- VOLTERRA E. — « Elasticità vincolata e sua schematizzazione matematica ». 220.

W

- WICK G. C. — « Sul moto di un elettrone in un reticolo cristallino ». 142.

Z

- ZAGAMI V. — « Alimentazione con semi di leguminose e riproduzione ». 279.
ID. — Vedi FAMIANI V.
ZAGAR F. — « Sopra la variazione della eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili ». 324.
ID. — « Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico. - I: Premesse e caso particolare ». 575, 627.
ID. — « Sull'aumento di massa di un pia-

neta per effetto di pulviscolo cosmico. — ZOJA R. — « Sulla distribuzione delle tensioni interne in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare. Ripartizione uniforme della tensione tangenziale ». 572.

II: Caso generale ». 575.

ZANELLI F. — Vedi ANTONIANI C.

ZOJA R. — « Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare ». 438, 505.

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — «Alcuni teoremi sul problema dei due corpi di masse decrescenti». ARMELLINI G. 77.
 — «Moti propri e moti orbitali risultanti dal Catalogo Astrografico di Catania». BEMPORAD A. 470.
 — «Metodo II° per il calcolo d'orbita di una binaria visuale». MARTIN E. 231.
 — «Sopra la variazione della eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili». ZAGAR F. 324.

B

- Biologia.** — «Primi risultati del metodo combinato: suscettibilità differenziale e colori vitali, nello sviluppo degli Anfibi». GUARESCHI C. 345.
 — «Studii cirripedologici. - IX. Anaerobiosi in "Chthamalus stellatus" Ranzani». MONTEROSSO B. 165.
 — «Potenze di ricupero e di accrescimento di occhi ciclopi di embrioni "a litio" di Rana esculenta». PASTEGA G. 170.
 — «Sul comportamento dell'abbozzo oculare espuntato di Anfibi. Esperienze di fusione e regolazione». PERRI T. 349.
Bollettino bibliografico. — 459, 595.

C

- Chimica.** — «Ricerche sulla colesterina cerebrale umana». ANTONIANI C. e ZANNELLI F. 150.
 — «Ricerche nel gruppo delle fitosterine. - II. Sulle sterine dell'olio di riso». ANTONIANI C. 510.
 — «Sulla struttura della sferocobaltite». BACCAREDDA M. 248.

- Chimica.** — «Preparazione elettrolitica di alcuni sali complessi dell'argento bivalente». BARBIERI G. A. 44.
 — «Sulle leghe di litio. - I. Analisi termica e röntgenografica del sistema litio-stagno». BARONI A. 153.
 — «Diselenmesoxanilidi ed ossiselenanilidi». Id. 253.
 — «Protoselensolfocloruro». Id. 514.
 — «Sopra una costante strutturale relativa ai passaggi di stato». BIGAZZI R. 48.
 — «Persistenza di struttura anisotropa nella silice derivante dall'attacco della leucite con acidi». BLANC G. A. 3.
 — «Su alcune relazioni tra composizione chimica del terreno e composizione chimica del suo contenuto colloidale». BOTTINI O. 584.
 — «Azione dei ioduri di alchilmagnesio sull'(1.9)-benzantrone-(10)». CHARRIER G. e GHIGI E. 257.
 — «Azione dell'ammoniaca sull'acenaftenchinone». Id., Id. 262.
 — «Il potere assorbente del terreno per l'acido pirofosforico». FABRIS A. 637.
 — «Ricerche sul comportamento delle miscele di ossido di zinco e di cloruro di zinco anidro ad alta temperatura». FERRARI A. e TRAMPETTI G. 343.
 — «Il fosfato trifenilico come solvente crioscopico». GARELLI F. e RACCIU G. 54.
 — «Clorito di magnesio e cloriti doppi di rame col magnesio, bario e tallio». LEVI G. R. e GHIRON D. 632.
 — «Soluzioni solide per precipitazione ed isomorfismo tra complessi del platino e del tellurio tetravalente. - II. Esame del clorotellurito di cesio e dei sistemi CsPtCl₆-CsTeCl₆, Rb₂PtCl₆-Cs₂PtCl₆». NATTA G. e PIRANI R. 265.
 — «Distribuzione dei nitrati ed "organica-

zione" dell'azoto nelle foglie delle piante verdi». PARISI E. e DE VITO G. 270.

- Chimica.** — « Velocità di dissoluzione di allumine industriali nella criolite fusa ». PARRAVANO N. e D'AGOSTINO O. 186.
- « Rodanpirroli, tiopirroli e disolfuri pirrolici ». PRATESI P. 443.
- « La presenza nella bile di un enzima deidrogenante l'acido stearico ». QUAGLIARIELLO G. 387.
- « Presenza nelle cellule del tessuto adiposo di una deidrogenasi attiva su gli acidi grassi superiori ». ID. 552.

Comunicazioni varie. — 457, 593.

F

- Fisica.** — « La struttura della riga 6708 del litio osservata in emissione ». ALLEGRETTI L. 33.
- « Sulle deformazioni delle piastre elastiche ». Nota I. 473. Nota II. 597. Nota III. 603. ALMANZI E.
- « Sopra un'estensione della formola di Wood. Intensità della luce diffusa da un elettrone in moto ». CANNATA C. 328.
- « Corollario al teorema della derivazione delle funzioni definite da integrali. — Applicazione ai metodi di misura sperimentali delle grandezze fisiche ». CARRARA N. 439.
- « Sui circuiti che hanno una capacità in parallelo su un diodo in saturazione ». DEI C. 334.
- « Sul comportamento magnetico della molecola di ossigeno ». EINAUDI R. 133.
- « Sulle bande di oscillazione e rotazione dell'ammoniaca ». FERMI E. 179.
- « Periodicità nell'andamento progressivo della pioggia a Capodimonte 1833-1931 ». GUERRIERI E. 243.
- « Su di una nuova esperienza fotoelettrica ». MAJORANA Q. 82.
- « Ancora su di una nuova esperienza fotoelettrica ». ID. 173.
- « Su di un nuovo fenomeno fotoelettrico presentato da lamine metalliche ». ID. 548.
- « Su una serie perturbata dello spettro

dell'alluminio ionizzato ». PINCHERLE L. 35.

- Fisica.** — « Nuovo dispositivo per ricerche sulla struttura della regione di Heavyside ». RANZI I. 40.
- « Righe di quadrupolo negli spettri di raggi X ». SEGRÈ E. 442.
- « Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta ». STRANEO P. 139.
- « Sul moto di un elettrone in un reticolo cristallino ». WICK G. C. 142.
- Fisiologia.** — « Ancora sulla possibilità di ottenere fenomeni beri-berici durevoli da privazione del fattore B ». AMANTEA G. e FAMIANI V. 353.
- « Raffronti tra il valore alimentare ricostruttivo di alcuni legumi e quello del grano ». FAMIANI V. e ZAGAMI V. 57.
- « Contributo alla conoscenza del valore nutritivo degli embrioni di grano ». FAMIANI V. 275.
- « Sulla capacità di consumo alimentare nella rialimentazione dopo digiuno ». ID. 357.
- « Contributo alla conoscenza del valore alimentare ricostruttivo degli embrioni di vari semi di cereali e leguminose ». ID. 360.
- « Azione di alcuni alcaloidi sullo sviluppo dell'*Aspergillus Niger* ». MEZZADROLI G. e AMATI A. 366.
- « Avitaminosi ed intossicazioni. — I: Polineurite sperimentale ed intossicazione chimica da metalli e metalloidi ». MITOLO M. 451.
- « Avitaminosi ed intossicazioni. — II: Scorbuto sperimentale ed intossicazione chimica da metalli e metalloidi ». ID. 528.
- « Sull'azione tossica e sull'eliminazione della nicotina. — I: Azione tossica della nicotina e dell'ossinicotina ». SABATUCCI N. 520.
- « Sull'azione tossica e sull'eliminazione della nicotina. — II: Eliminazione ed assorbimento cutaneo della nicotina e della caffeina ». ID. 524.
- « Contributo alla conoscenza della natura e del valore della Reazione di Bezssonoff per fattore C ». SALVATORI A. 369.

Fisiologia. — « Alimentazione con semi di leguminose e riproduzione ». ZAGAMI V. 279.

G

Geodesia. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita nel vertice trigonometrico di 1° ordine di M. Crea nel luglio 1930 ». BARBIERI U. 500.

Geofisica. — « La pretesa ripercussione, agli antipodi, dell'eruzione del Cracatoa del 1883 ». AGAMENNONE G. 127.

— « Misure magnetiche a Mogadiscio ». BOSOLASCO M. 438, 576.

— « Materiali per la ricostruzione delle carte magnetiche d'Italia (IV Contributo: Piemonte) ». PALAZZO L. 373.

— « Ancora intorno allo smorzamento dei sismografi ». PROVIERO A. 237.

Geologia. — « La posizione tettonica delle argille scagliose tra la catena mesozoica di Gubbio e la valle Tiberina ». RENZ O. 448.

— « Una interpretazione tettonica del promontorio occidentale del Golfo della Spezia ». ROVERETO G. 191.

— « La diffusione degli strati a Posidonomya alpina nell'Appennino Centrale ». SCARSELLA F. 159.

M

Matematica. — « Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale ». ASCOLI G. 571, 604.

— « Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet ». BERNSTEIN V. 6.

— « Vedute geometriche sui tensori ». BIGGIOGERO G. 478.

— « Sulla curvatura delle linee delle varietà ». BOGGIO T. 87.

— « Sulle deformazioni non infinitesime ». BONVICINI D. 607.

— « Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali ». Nota I. 390. Nota II. 484. CACCIOPOLI R.

Matematica. — « Sur les points (α), au sens de M. Georges Durand ». CHAMARD L. 396.

— « Sur la transplantation du transport parallèle ». CHAPIRO H. 92.

— « Sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale ». CHERUBINO S. 285.

— « Ancora sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale ». Id. 401.

— « Primi studi intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-paraboliche ». CIBRARIO M. 10.

— « Sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine ». COLOMBO B. 291.

— « Sulla serie canonica d'una superficie algebrica ». COMESSATTI A. 555.

— « Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz ». DEL CHIARO A. 16.

— « Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica ». ENRIQUES F. 533.

— « Sulle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la rappresentazione piana della superficie razionale a sezioni ellittiche dell'ottavo ordine ». Id. 540.

— « Tensori vettoriali e loro derivazione ». FINZI B. 404.

— « Sur les polynômes orthogonaux à deux variables ». GHERMANESCO M. 194.

— « Opération linéaires. Matrices limitées ». GOMES R. L. 572.

— « Corrispondenza per piani tangenti paralleli ». HAIMOVICI M. e POPA E. 19.

— « La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — II. Applications de la transformation de Ribaucour à la représentation sphérique ». HAMBURGER H. 200.

— « La transformation de Ribaucour et la représentation sphérique. — III. Les systèmes cycliques de Ribaucour ». Id. 296.

— « Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$) ». HLAVATÝ V. 109.

— « Encore sur les invariants projectifs dif-

fèrentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$). ID. 206.

Matematica. — « Courbures projectives d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$) ». ID. 299.

— « Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires ». HOSTINSKY B. 25.

— « Géométrie différentielle et calcul des variations ». KOSAMBI D. D. 410.

— « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — I. Cas général ». KOURENSKY M. 415.

— « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — II. Systèmes contenant cinq dérivées du second ordre ». ID. 496.

— « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — III. Systèmes contenant quatre dérivées du second ordre ». ID. 567.

— « L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — IV. Systèmes contenant trois dérivées du second ordre ». ID. 612.

— « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — I. Sommazione delle funzioni puntiformi ». LABOCETTA L. 27.

— « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — II. Riduzioni a Tipi Normali e Integrali fondamentali ». ID. 95.

— « Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. — III. Funzioni periodiche ». ID. 212.

— « Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica sollecitata agli estremi ». LAMPARIELLO G. 102.

— « Sulla risoluzione numerica di un sistema di equazioni ». MAMMANA G. 617.

— « Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie ». MANGERON D. 305.

Matematica. — « Un teorema generale sulle successioni di funzioni convergenti verso una funzione olomorfa ». MINETTI S. 572.

— « Tensori emisimmetrici coniugati ». PASTORI M. 216.

— « Proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati ». ID. 311.

— « Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali ». ID. 572, 621.

— « Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali; relazione con gli insiemi derivati ». ID. 626.

— « La simplification des recherches de L. Bianchi, généralisantes le caractère de S. Lie, que les paramètres soient essentiels ». PFEIFFER G. 420.

— « Sur les solutions linéairement indépendantes des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes ». ID. 427.

— « Sopra la questione della unicità per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali ». ROSENBLATT A. 429.

— « Sulle condizioni per la regolarità di un sistema lineare di forme ». SEGRE B. 114.

— « Sulle superficie algebriche aventi il sistema canonico composto con un'involuzione ». ID. 316.

— « Rivendicazione di priorità ». ID. 434.

— « Su di un'equazione trascendente della statica ». TRICOMI F. 560.

— « Sur l'intégration des équations de Hamilton pour une durée de temps infinie ». URBANSKI W. S. 105.

Meccanica. — « Sulla legge delle aree di un moto einsteiniano considerato nell'ordinario spazio euclideo ». CIMINO M. 120.

— « Sulla correzione einsteiniana del tempo in un moto planetario ». ID. 223.

— « Spostamenti rigidi finiti ». CISOTTI U. 381.

— « Corrente traslocircolatoria piana che investe un'asta rettilinea indefinita. Azioni dinamiche ». ID. 465.

— « Corrente traslocircolatoria in presenza di un ostacolo circolare munito di un'appendice rettilinea indefinita ». ID. 541.

Meccanica. — «La stabilità nel volo strumentale». CROCCO G. A. 71.

— «Velocità di gruppo per onde associate a fenomeni». FINZI B. 489.

— «Sulla teoria della "scia" nei liquidi perfetti. - Caso del cilindro rotondo». GLEIJESES M. 435.

— «Régularisation des chocs binaires pour des forces proportionnelles à l'inverse d'une puissance quelconque de la distance». KIVELIOVITCH M. 227.

— «Parametri variabili e previsioni asintotiche in qualche problema di Meccanica celeste». KRALL G. 575.

— «Sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a sè stesso. - II. Centro istantaneo di velocità e conseguenze». PASCAL M. 320.

— «Elasticità vincolata e sua schematizzazione matematica». VOLTERRA E. 220.

— «Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico. - I. Premesse e caso particolare». ZAGAR F. 575, 627.

— «Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico. II. Caso generale». Id. 575.

— «Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare». ZOJA R. 438, 505.

— «Sulla distribuzione delle tensioni interne

in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare. Ripartizione uniforme della tensione tangenziale». Id. 572.

Mineralogia. — «Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica». ANDREATTA C. 62.

— «I giacimenti di minerali del Monte Rosso di Verra (gruppo del monte Rosa). Parte I». CARPANESE T. 641.

— «Dilatazione termica nei cristalli e legge di Haüy». CAVINATO A. 163.

— «L'acqua nella tremolite del Monte Spinoso nel Campigliese». RODOLICO F. 645.

P

Patologia. — «Riproduzione sperimentale di un quadro anatomo-patologico simile a quello del panno traematoso umano». BUSACCA A. 647.

Personale accademico. — 456, 593.

Presentazione di libri. — 456, 593.

Presentazione di Note e Memorie.

— 457, 593.

Presentazione di plichi suggellati.
456.

R

Relazioni di Commissioni. — 456.

N. P.

